

DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.2.26

УДК 532.133

## ВЛИЯНИЕ ПЕРЕПЛЕТЕНИЙ МАКРОМОЛЕКУЛ НА ПРОСТОЕ СДВИГОВОЕ ТЕЧЕНИЕ УПРУГО-ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Ю.Л. Кузнецова, О.И. Скульский

*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия*

Рассмотрено стационарное сдвиговое течение несжимаемой упруго-вязкой жидкости, описываемой нелинейной дифференциально-векторной моделью, предложенной Реммелгассом, Харрисоном и Лилом (RHL-модель). Получены аналитические выражения для компонент тензора ориентации и материальных функций в отсутствие переплетений макромолекул, проведено исследование влияния параметров модели на их вид. Определены диапазоны параметров модели, в которых исследуемые зависимости проявляют неоднозначность. Численно исследовано влияние ограничения удлинения макромолекул за счёт их переплетения на вид компонент тензора ориентации и материальных функций.

*Ключевые слова:* упруго-вязкая жидкость, течение простого сдвига, влияние переплетений макромолекул

## EFFECT OF MACROMOLECULAR ENTANGLEMENT ON THE SIMPLE SHEAR FLOW OF VISCOELASTIC FLUID

Yu.L. Kuznetsova and O.I. Skul'skiy

*Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia*

We investigate the stationary shear flow of an incompressible fluid described by the non-linear differential-vector model proposed by Remmelgassom, Harrison and Lill (RHL-model). In the absence of macromolecular entanglements, analytical expressions for orientation tensor components and material functions are derived, and the effect of the parameters of the model on their form is studied. The ranges of model parameters, in which the examined relations show ambiguity, are determined. The influence of macromolecular length limitation on the form of tensor components and material functions is studied numerically.

*Key words:* viscoelastic fluid, simple shear flow, influence of macromolecular entanglements

### 1. Введение

При течении полимерных жидкостей наблюдается целый ряд необычных явлений. Часть из них, например, разбухание струи после выхода её из капилляра, эластическую турбулентность, «спурт эффект» — нарушение стабильности истечения жидкости из капилляров и каналов [1], можно увидеть в процессе переработки полимеров. Наблюдение других эффектов, таких как релаксация напряжений после прекращения течения, уменьшение вязкости при увеличении скорости сдвига, возникновение нормальных напряжений при чисто сдвиговом течении, гистерезисный характер кривой течения, требует специальных экспериментов. Названные явления необычны потому, что они наблюдаются только у высокомолекулярных жидкостей, и степень их проявления во многом зависит от свойств и интенсивности взаимодействия макромолекул.

Для теоретического описания течения полимерных жидкостей предложено большое количество определяющих соотношений. Физически более обоснованными являются те из них, которые учитывают при моделировании внутреннюю структуру жидкости [2], поскольку позволяют установить количественную связь между её молекулярным строением и проявляемыми реологическими свойствами жидкости в целом. Большинство реологических моделей, в зависимости от входящих в них параметров, могут описывать свойства, присущие различным типам жидкостей, проявлять в разной степени реологические эффекты, а также предсказывать физически нереализуемое поведение жидкости.

Так, при исследовании сдвигового течения нелинейной упруго-вязкой жидкости, описываемой модифицированной моделью Виноградова–Покровского [3], было выяснено, что существует диапазон значений параметров модели, при которых компоненты тензора напряжений претерпевают бифуркацию, а также появляются области возрастания эффективной вязкости и функции первой разности нормальных напряжений при увеличении скорости сдвига [4, 5]. Анализ течения в трубе под действием заданного перепада давления жидкости, представляемой четырёхконстантной моделью Олдройда [6], показал возможность неединственности решения задачи и немонотонности распределения градиента скорости в радиальном направлении. В зависимости от перепада давления в трубе и отношения времени ретардации (упругого восстановления деформаций) к времени релаксации напряжений, вычисленные профили скорости либо имеют гладкую параболическую форму, либо содержат слабые тангенциальные разрывы. Кривые течения такой жидкости имеют гистерезисный характер.

В работах [7–9] рассмотрены три различные реологические модели, описывающие течение нелинейных упруго-вязких жидкостей в плоском канале под действием постоянного перепада давления. В [7] использовалась обобщённая феноменологическая модель Джеффриса [10], которая содержит объективную временную производную с шестью произвольными материальными константами. В двух других работах модели основаны на структурно-феноменологическом подходе: в [8] — это модифицированная модель Виноградова–Покровского, в [9] — дифференциально-векторная модель, предложенная Реммелгассом, Харрисоном и Лилом (RHL-модель). Для этих моделей получены точные аналитические решения задачи течения в плоском канале. Показано, что во всех трёх случаях, в зависимости от исходных параметров модели, может иметь место как единственное, так и неединственное решение. Профили скорости могут быть либо гладкими, почти параболическими, либо содержать слабые тангенциальные разрывы.

В настоящей работе рассматривается установившееся сдвиговое течение несжимаемой упруго-вязкой жидкости, представляемой нелинейной дифференциально-векторной RHL-моделью, в которой в качестве параметров, характеризующих молекулярную цепь, выбраны:  $N_e$  — число переплетений цепи,  $n_r$  — число сегментов Куна. Конфигурация макромолекулы на микроуровне описывается вектором  $\mathbf{R} = R\mathbf{u}$ , где  $R$  — расстояние между концами макромолекулы, а  $\mathbf{u}$  — единичный вектор, направленный вдоль линии, соединяющей концы макромолекулы. Использование уравнения Фоккера–Планка при условии, что процессы релаксации ориентации и удлинения макромолекулы происходят в различных временных масштабах, позволяет записать отдельные уравнения для тензора, характеризующего среднестатистическую ориентацию макромолекулы  $\langle \mathbf{u}\mathbf{u} \rangle = \int \mathbf{u}\mathbf{u}\Psi(\mathbf{u})d\mathbf{u}$ , и для величины её среднестатистического удлинения  $\langle \mathbf{R} \cdot \mathbf{R} \rangle = \langle R^2 \rangle = \int R^2\Psi(R)dR$ , где  $\Psi$  — функция распределения вероятности. С учётом этого реологические уравнения RHL-модели имеют вид [9]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \eta_s (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) + \frac{\eta_{po}}{\tau_d} f(\langle R^2 \rangle) \mathbf{K}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \langle \mathbf{u}\mathbf{u} \rangle}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \langle \mathbf{u}\mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{u}\mathbf{u} \rangle \cdot \mathbf{L}^T - \mathbf{L} \cdot \langle \mathbf{u}\mathbf{u} \rangle = -2 \langle \mathbf{u}\mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{u}\mathbf{u} \rangle : \nabla \mathbf{v} - \frac{1}{\tau_d \langle R^2 \rangle} \left( \langle \mathbf{u}\mathbf{u} \rangle - \frac{1}{3} \mathbf{I} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \langle R^2 \rangle}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \langle R^2 \rangle = 2 \langle R^2 \rangle (\nabla \mathbf{v} : \langle \mathbf{u}\mathbf{u} \rangle) - \frac{1}{\tau_r} \left( f(\langle R^2 \rangle) \langle R^2 \rangle - 1 \right), \quad (3)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$  — тензор избыточных напряжений,  $\mathbf{v}$  — вектор скорости,  $\mathbf{L} = (\nabla \mathbf{v})^T$ ,  $\mathbf{K} = \langle R^2 \rangle \langle \mathbf{u}\mathbf{u} \rangle$  — тензорный параметр порядка, определяющий структуру материала,  $\mathbf{I}$  — единичный тензор,  $(\cdot)$  — знак, обозначающий операцию двойного скалярного произведения,  $\tau_d$  — время релаксации ориентации,  $\tau_r$  — время релаксации удлинения,  $\eta_s$  — вязкость растворителя,  $\eta_{po}$  — вязкость полимера. В частном случае, когда  $\tau_r = 0$ , RHL-модель сводится к модели невзаимодействующих жёстких стержнеобразных макромолекул [2]. Функция  $f(\langle R^2 \rangle)$  накладывает на удлинение макромолекулы ограничение, связанное с переплетениями молекулярной цепи, и записывается в виде:

$$f(\langle R^2 \rangle) = (1 - \langle R^2 \rangle / (3C)) / (1 - \langle R^2 \rangle / C), \quad (4)$$

где  $C = n_r / N_e$  — константа материала, ограничивающая удлинение сверху. Так, при  $\langle R^2 \rangle \rightarrow C$  значение  $f(\langle R^2 \rangle) \rightarrow \infty$ .

В работах [11, 12] использовалось условие  $\tau_r / \tau_d \ll 1$ , характерное для макромолекул с большим числом переплетений. Обратный случай  $\tau_r / \tau_d \gg 1$ , соответствующий материалу, в котором релаксация удлинения происходит очень медленно, а ориентация макромолекулы — мгновенно, также удовлетворяет предположению, что процессы ориентации и удлинения протекают независимо друг от друга. В данной работе, с целью выяснить, что предсказывает RHL-модель, когда процессы ориентации и удлинения макромолекулы равноценны и, как следствие, зависимы, исследован промежуточный диапазон значений отношения времён релаксаций  $\tau_r / \tau_d$ .

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим течение упруго-вязкой несжимаемой жидкости между двумя параллельными пластинами, нижняя из которых покоится, а верхняя движется поступательно с постоянной скоростью  $V_0$  в направлении оси  $y$  прямоугольной декартовой системы координат. Зазор  $h$  между пластинами значительно меньше размеров пластин; течение считается стационарным:  $\partial(\cdot)/\partial t = 0$ . Предполагается, что существует только одна ненулевая компонента вектора скорости  $v_x = \dot{\gamma}y$  (где  $\dot{\gamma} = V_0/h$  — скорость сдвига), а компоненты тензора напряжения и давление не изменяются вдоль осей  $x$  и  $y$ . В этом случае уравнение несжимаемости выполняется тождественно, а уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (5)$$

Запишем реологические уравнения RHL-модели в декартовых координатах:

$$-2u_{xy}\dot{\gamma} + 2u_{xx}u_{xy}\dot{\gamma} + \frac{1}{\tau_d r} \left( u_{xx} - \frac{1}{3} \right) = 0, \quad (6)$$

$$-u_{yy}\dot{\gamma} + 2u_{xy}^2\dot{\gamma} + \frac{1}{\tau_d r} u_{xy} = 0, \quad (7)$$

$$2u_{yy}u_{xy}\dot{\gamma} + \frac{1}{\tau_d r} \left( u_{yy} - \frac{1}{3} \right) = 0, \quad (8)$$

$$2u_{zz}u_{xy}\dot{\gamma} + \frac{1}{\tau_d r} \left( u_{zz} - \frac{1}{3} \right) = 0, \quad (9)$$

$$2u_{xy}r\dot{\gamma} - \frac{1}{\tau_r} (f(r)r - 1) = 0, \quad (10)$$

$$f(r) = \frac{3C - r}{3(C - r)}, \quad (11)$$

где обозначено:  $\langle \mathbf{uu} \rangle_{xx} = u_{xx}$ ,  $\langle \mathbf{uu} \rangle_{xy} = u_{xy}$ ,  $\langle \mathbf{uu} \rangle_{yy} = u_{yy}$ ,  $\langle \mathbf{uu} \rangle_{zz} = u_{zz}$ ,  $\langle R^2 \rangle = r$ .

Система уравнений (6)–(11) описывает эволюцию как компонент тензора среднестатистической ориентации, так и значения среднестатистического удлинения с учётом ограниченного растяжения макромолекулы. Преобразование этой системы позволяет для каждой неизвестной получить уравнение шестой степени с коэффициентами, зависящими от параметров модели  $C$ ,  $\tau_d$ ,  $\tau_r$  и скорости сдвига  $\dot{\gamma}$ . В настоящей работе корни этих уравнений находятся численно методом Ньютона.

Предположение о том, что молекулярная цепочка может бесконечно растягиваться ( $f(r) = 1$ ), существенно упрощает решение системы (6)–(11). Далее построим аналитическое решение сформулированной выше задачи при условии неограниченного удлинения макромолекулы и исследуем влияние параметров модели на вид полученных точных решений. Вклад ограниченного удлинения макромолекулы (11), связанного с переплетением молекулярной цепочки, оценим сопоставлением численных результатов с найденными аналитически.

Итак, из уравнений (8) и (9) следует, что  $u_{yy} = u_{zz}$  и

$$2u_{xy}r\dot{\gamma}\tau_d + 1 = 1/(3u_{yy}). \quad (12)$$

Первая разность нормальных компонент среднестатистического тензора ориентаций ( $u_{xx} - u_{yy}$ ) с учётом соотношения (12) равна

$$u_{xx} - u_{yy} = 1 - 3u_{yy}. \quad (13)$$

Из (7), используя соотношение (12), получаем:

$$u_{xy} = 3u_{yy}^2 r \dot{\gamma} \tau_d. \quad (14)$$

Далее для основных характеристик течения (среднестатистического удлинения  $R^2$ , касательной компоненты тензора среднестатистической ориентации  $u_{xy}$ , касательной компоненты тензорного параметра порядка  $K_{xy}$ , эффективной вязкости  $\eta$ , первой разности нормальных напряжений  $\Psi_1$ , угла ориентации макромолекулы  $\chi$ ) строятся аналитические выражения в виде неявных функций и исследуется влияние параметров модели, времени релаксации ориентации  $\tau_d$  и времени релаксации удлинения  $\tau_r$  на зависимости этих характеристик от скорости сдвига. Полученные аналитические решения задачи без учёта ограниченного удлинения макромолекулы сравниваются с численными решениями системы (6)–(11), включающей конечное растяжение молекулярной цепи при сдвиговом течении жидкости.

**3. Основные характеристики сдвигового течения и их поведение в зависимости от параметров модели**

**3.1. Среднестатистическое удлинение макромолекулы**

Возведение в квадрат уравнения (12) и подстановка в него соотношений (10) и (14), при условии неограниченного удлинения молекулярной цепочки  $f(r)=1$ , приводит к уравнению третьей степени относительно среднестатистического удлинения макромолекулы  $r$ :

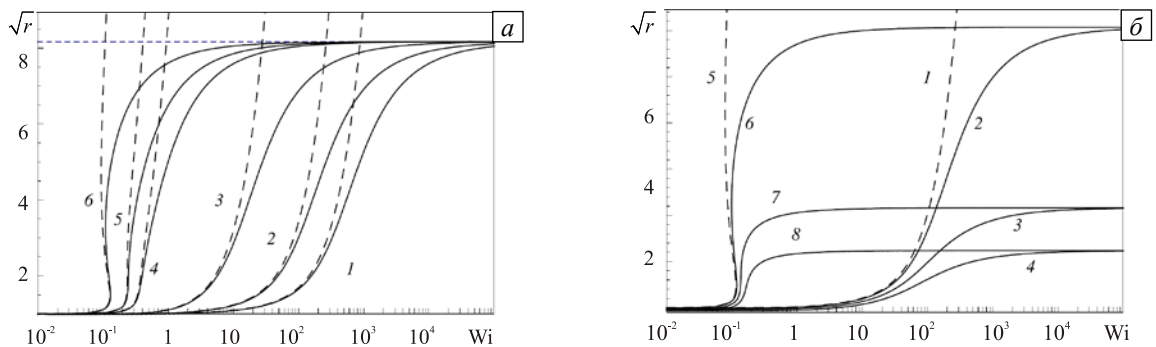
$$3r^3 + (6\varepsilon - 9 - 2Wi^2\varepsilon^3)r^2 + (3\varepsilon^2 - 12\varepsilon + 9)r + 6\varepsilon - 3\varepsilon^2 - 3 = 0, \tag{15}$$

где  $\varepsilon = \tau_r/\tau_d$  и  $Wi = \tau_d \dot{\gamma}$  — безразмерные параметры.

Число действительных корней уравнения (15) зависит от знака его дискриминанта  $Q(\varepsilon, Wi) = 18 + 18Wi^4\varepsilon^3 - 3Wi^2(\varepsilon^2 + 18\varepsilon - 27)$ . При  $\varepsilon < 9$  дискриминант  $Q(\varepsilon, Wi)$  положительный и, следовательно, уравнение (15) имеет один действительный корень. Когда  $\varepsilon > 9$ , существует диапазон значений параметра  $Wi$ , в котором дискриминант отрицательный, и зависимость  $r(Wi)$ , определяемая уравнением (15), становится неоднозначной.

На рисунке 1, а представлены графики функции  $\sqrt{r}(Wi)$  при различных значениях отношения времён релаксаций  $\varepsilon$ . На этом и всех последующих рисунках для соответствующей характеристики течения штриховыми линиями показаны точные решения в частном случае безграничного растяжения макромолекулы; сплошные линии отвечают результатам численного решения уравнения шестой степени для этой же характеристики с коэффициентами, зависящими от  $\varepsilon$ ,  $Wi$ ,  $C$ , с учётом конечного удлинения макромолекулярной цепочки.

Влияние величины предельного растяжения  $C$  на условие появления неоднозначности в характере среднестатистического удлинения  $r$  как функции параметра  $Wi$  показано на рисунке 1, б. Из рисунка видно, что число переплетений макромолекулы  $N_e$  и, как следствие, значение предельного удлинения молекулярной цепочки  $C$  качественно и количественно меняют вид кривой  $r(Wi)$ . Уменьшение значения предельного растяжения  $C$  приводит к переходу от S-образной линии  $r(Wi)$  к однозначной монотонно возрастающей. Минимальное значение критического параметра  $\varepsilon$ , равное 9,



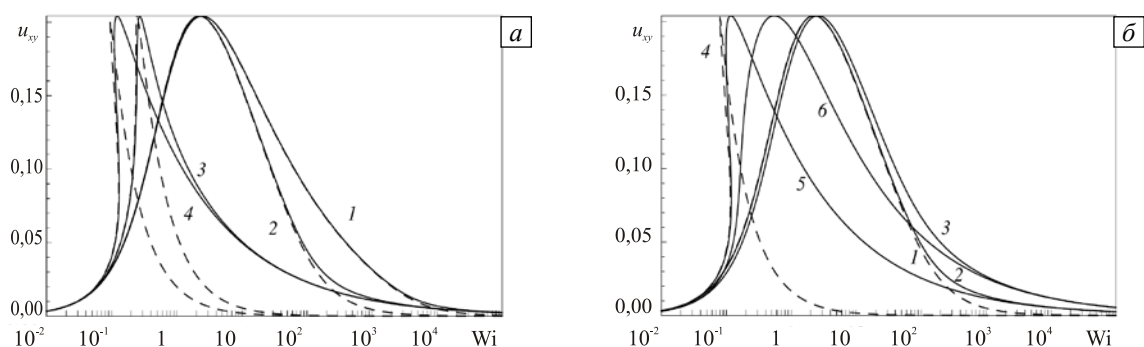
**Рис. 1.** Зависимость квадратного корня из среднестатистического удлинения макромолекулы  $\sqrt{r}$  от параметра  $Wi$  при  $C=1000/15$  и различных значениях отношения времён релаксаций  $\varepsilon$  (а): 0,05 (кривая 1), 1/9 (2), 0,5 (3), 5,0 (4), 9 (5), 25 (6), а также при  $\varepsilon=1/9$  и  $\varepsilon=30$  от величины предельного растяжения  $C$  (б):  $\rightarrow \infty$  (кривые 1 и 5), 50 (2 и 6), 10 (3 и 7), 5 (4 и 8)

соответствует неограниченному удлинению макромолекулы. При  $\varepsilon < 9$  зависимость  $r(Wi)$  является однозначной монотонно возрастающей функцией, и величина максимально возможного растяжения молекулярной цепочки  $C$  влияет только на её численное значение и не сказывается на качественном поведении. Таким образом, когда процессы удлинения и ориентации макромолекулы происходят в одном масштабе времени, то есть  $\varepsilon \sim 1$ , предсказания RHL-модели не противоречат физическим представлениям о поведении среднестатистического удлинения макромолекулы.

### 3.2. Касательная компонента ориентационного тензора

Аналогичным образом получается уравнение третьей степени относительно касательной компоненты ориентационного тензора  $u_{xy}$ . При этом его дискриминант полностью совпадает с дискриминантом уравнения (15), и, как следствие, неоднозначность зависимости  $u_{xy}(Wi)$  в случае неограниченного растяжения макромолекулы появляется при условии  $\varepsilon > 9$ .

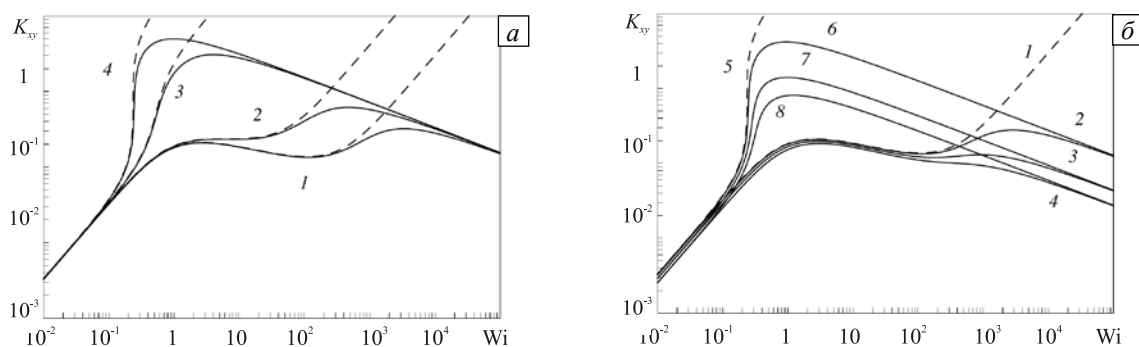
На рисунке 2 представлены зависимости  $u_{xy}(Wi)$  при различных значениях параметров  $\varepsilon$  и  $C$ . Как видно из рисунка, зависимость  $u_{xy}(Wi)$  всегда имеет максимум, не связанный с параметрами модели  $\varepsilon$  и  $C$ :  $\max u_{xy}(Wi) = 1/(2\sqrt{6}) \approx 0,204124$ . Значение параметра  $Wi$ , при котором достигается максимум, смещается к нулю при увеличении  $\varepsilon$  и возрастает при уменьшении значения предельного растяжения.



**Рис. 2.** Зависимость касательной компоненты ориентационного тензора  $u_{xy}$  от параметра  $Wi$  при  $C=1000/15$  и различных значениях отношения времён релаксаций  $\varepsilon$  (а): 0,01 (кривая 1), 1/9 (2), 9 (3), 25 (4), а также при  $\varepsilon=1/9$  и  $\varepsilon=30$  от величины предельного растяжения  $C$  (б):  $\rightarrow \infty$  (кривые 1 и 4), 50 (2 и 5), 5 (3 и 6)

### 3.3. Касательная компонента тензорного параметра порядка

Используя (7), (10) и (12), получим кубическое уравнение для касательной компоненты тензорного параметра порядка  $K_{xy}$ , которое одновременно является уравнением третьей степени относительно параметра  $Wi$ :  $3K_{xy}(1+2K_{xy}Wi)^2 - Wi(1+2K_{xy}Wi\varepsilon)^2 = 0$ . Исследование данного уравнения показало, что неоднозначность зависимости  $K_{xy}(Wi)$  проявляется при условии  $\varepsilon > 9$ . Неоднозначность обратной величины  $Wi(K_{xy})$  наступает при  $\varepsilon < 1/9$ .



**Рис. 3.** Зависимость касательной компоненты тензорного параметра порядка  $K_{xy}$  от параметра  $Wi$  при  $C=1000/15$  и различных значениях отношения времён релаксаций  $\varepsilon$  (а): 0,03 (кривая 1), 1/9 (2), 3 (3), 9 (4), а также при  $\varepsilon=0,03$  и  $\varepsilon=9$  от величины предельного растяжения  $C$  (б):  $\rightarrow \infty$  (кривые 1 и 5), 50 (2 и 6), 10 (3 и 7), 5 (4 и 8)

Влияние отношения времён релаксаций  $\varepsilon$  и значения предельного растяжения  $C$  на вид кривых  $K_{xy}(Wi)$  показано на рисунке 3. Неоднозначность зависимости  $Wi(K_{xy})$  при  $\varepsilon < 1/9$  проявляется также в немонотонном характере кривой течения  $Wi(\sigma_{xy}^*)$  ( $\sigma_{xy}^* = \sigma_{xy}\tau_d/\eta_s = Wi + (\eta_{po}/\eta_s)K_{xy}$  при  $\eta_{po}/\eta_s = 1$ ). Подобная неоднозначность кривой течения, которая в литературе называется эффектом сверх-аномалии вязкости [13], имеет экспериментальное подтверждение и широко используется в технологических процессах.

### 3.4. Материальные функции

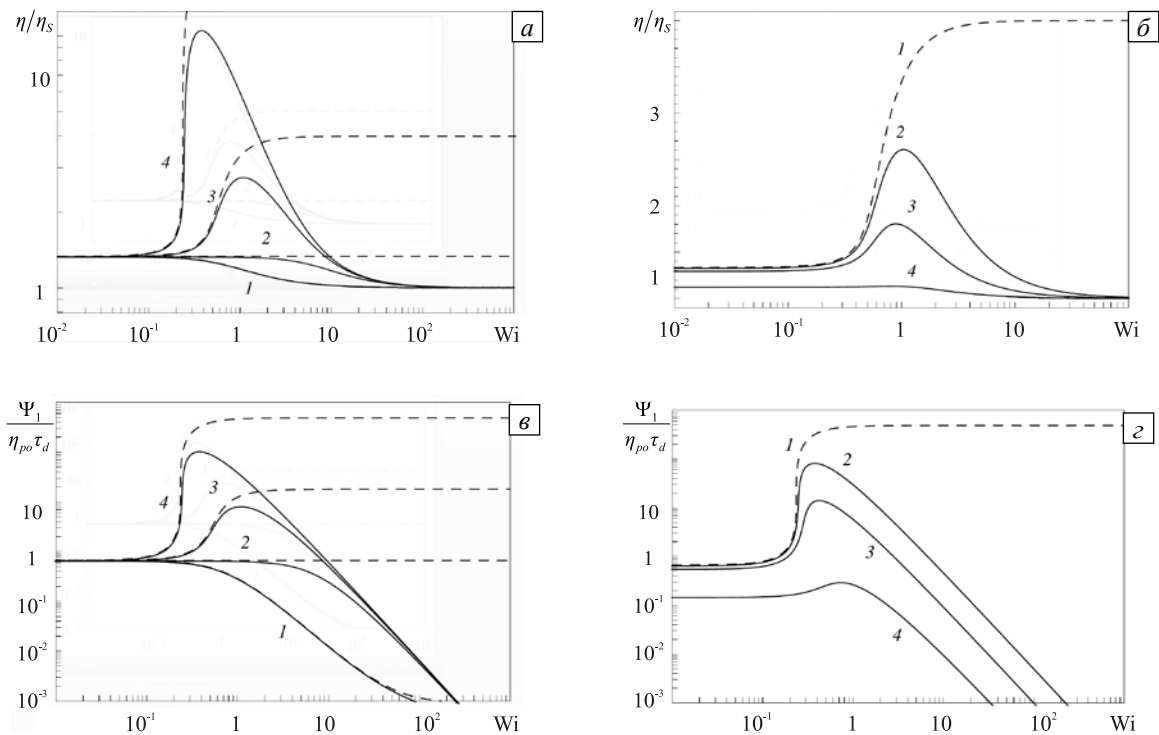
Как показано Колеманом и Ноллом [14], при установившемся сдвиговом течении гомогенной несжимаемой жидкости тензор напряжения определяется тремя независимыми функциями: эффективной вязкостью  $\sigma_{xy} = \eta(\dot{\gamma})\dot{\gamma}$ , первой и второй разностями нормальных напряжений  $\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = \Psi_1(\dot{\gamma})\dot{\gamma}^2$  и  $\sigma_{yy} - \sigma_{zz} = \Psi_2(\dot{\gamma})\dot{\gamma}^2$ . Используя уравнения (10), (13) и (15), получаем параметрическую зависимость эффективной вязкости и первой разности нормальных напряжений от скорости сдвига  $Wi$ :

$$\eta = \frac{\sigma_{xy}}{\dot{\gamma}} = \eta_s + \eta_{po} \frac{K_{xy}}{Wi} = \eta_s \left( 1 + k \frac{r-1}{2\varepsilon Wi^2} \right),$$

$$\Psi_1 = \frac{\eta_{po}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{\tau_d \dot{\gamma}^2} = \eta_{po} \tau_d \frac{r(r-1)}{Wi^2(r-1+\varepsilon)},$$

$$Wi = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{r-1}(r-1+\varepsilon)}{r\sqrt{\varepsilon^3}},$$

где в качестве параметра используется среднестатистическое удлинение  $r$ . Безразмерный комплекс  $k = \eta_{po}/\eta_s$ , определяющий во сколько раз вязкость полимера превышает вязкость растворителя, качественно не меняет картину зависимости  $\eta/\eta_s(Wi)$  и в дальнейших исследованиях полагается равным единице.



**Рис. 4.** Зависимость безразмерной эффективной вязкости  $\eta/\eta_s$  (а, б) и безразмерной функции первой разности нормальных напряжений  $\Psi_1/\eta_{po}\tau_d$  (в, г) от параметра  $Wi$  при  $C = 1000/15$  и различных значениях  $\varepsilon$  (а, в):  $1/9$  (кривая 1), 1 (2), 3 (3), 9 (4), а также при  $\varepsilon = 9$  от величины предельного растяжения  $C$  (б, г):  $\rightarrow \infty$  (кривые 1), 50 (2), 10 (3), 1,2 (4)

Влияние отношения времён релаксаций  $\varepsilon$  и предельного растяжения макромолекулы  $C$  на вид безразмерных функций  $\eta_{po}/\eta_s(Wi)$  и  $\Psi_1/(\eta_{po}\tau_d)$  (для  $k=1$ ) представлено на рисунке 4. Как видно, при времени релаксации ориентации, превышающем время релаксации удлинения ( $\varepsilon < 1$ ), RHL-модель описывает поведение псевдопластической жидкости. В обратном случае ( $\varepsilon > 1$ ), когда процессы релаксации удлинения происходят медленнее процессов релаксации ориентации, материальные функции возрастают в некотором диапазоне скоростей сдвига, что характерно для дилатантных жидкостей. Но существование в природе жидкостей с ведущими себя подобным образом материальными функциями требует экспериментального подтверждения. Количество переплетений макромолекулярной цепочки, ограничивающее её удлинение, качественно не меняет вид зависимостей от параметра  $Wi$  при  $\varepsilon > 1$ , но сказывается на степени их возрастания и значении  $\varepsilon$ , при котором появляется неоднозначность. В силу того, что  $u_{yy} = u_{zz}$ , функция второй разности нормальных напряжений равняется нулю.

### 3.5. Ориентация макромолекулы

Ориентация макромолекулы отслеживается с помощью угла  $\chi$ , образованного собственным вектором тензора ориентации, соответствующим его максимальному собственному значению, и вектором скорости, который в данной задаче совпадает по направлению с осью  $x$ . На рисунке 6 представлены кривые  $\chi(Wi)$  при различных значениях параметров  $\varepsilon$  и  $C$ . Из рисунка следует, что с ростом скорости сдвига угол  $\chi$  уменьшается от начального значения  $45^\circ$  при  $Wi=0$  до  $0^\circ$  при  $Wi \rightarrow \infty$ . Увеличение значений предельного растяжения  $C$  и параметра  $\varepsilon$  — отношения времени релаксации удлинения к времени релаксации ориентации, приводит к более быстрому стремлению угла ориентации  $\chi$  к нулю. Следовательно, RHL-модель предсказывает вполне реалистичное изменение угла ориентации макромолекулы с ростом скорости сдвига в диапазоне параметров модели, отвечающих одинаковому масштабу времени релаксации процессов ориентации и удлинения макромолекулы.

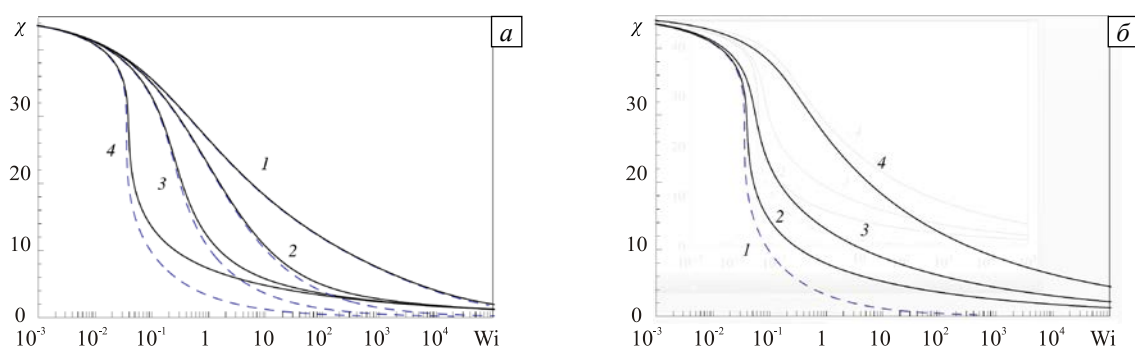


Рис. 6. Зависимость угла ориентации  $\chi$  от параметра  $Wi$  при  $C=1000/15$  и различных значениях  $\varepsilon$  (а):  $1/9$  (кривая 1), 1 (2), 3 (3), 9 (4), а также при  $\varepsilon=9$  от величины предельного растяжения  $C$  (б):  $\rightarrow \infty$  (кривые 1), 50 (2), 10 (3), 1,2 (4)

## 4. Заключение

Структурно-феноменологическая RHL-модель построена для жидкостей, в которых процессы удлинения и ориентации макромолекул происходят в различных масштабах времени  $\tau_R/\tau_d \ll 1$ . Полученные на ее основе результаты показали возможность применения модели для описания псевдопластических жидкостей в более широком диапазоне параметров, вплоть до соразмерных:  $\tau_R/\tau_d < 1$ . Превышение значения времени релаксации удлинения над временем релаксации ориентации макромолекулы приводит в некотором диапазоне скоростей сдвига к возрастанию вязкости и первой разности нормальных напряжений с последующим монотонным снижением.

Оказалось, что ограниченное удлинение макромолекулы, связанное с переплетением молекулярной цепочки, влияет на условия возникновения неоднозначностей зависимостей материальных функций и компонент тензора напряжения от скорости сдвига. Так, материалы, у которых отношение времени релаксации удлинения к времени релаксации ориентации  $\varepsilon > 9$  при неограниченном растяжении макромолекулы имеют неоднозначную зависимость всех исследованных характеристик течения от параметра  $Wi$ , а при уменьшении предельного растяжения молекулярной цепочки зависимости становятся однозначными.

RHL-модель всегда предсказывает равенство нулю второй разности нормальных напряжений, что не соответствует экспериментальным данным, однако позволяет описать немонотонный характер кривой течения (эффект сверх-аномалии вязкости), который имеет важное технологическое значение. Выяснено, что, согласно модели, сверх-аномалия вязкости наблюдается только при условии  $\varepsilon < 1/9$ . Заметим, что в задаче течения в плоском канале под действием заданного перепада давления жидкости, описываемой RHL-моделью [8], аналогичное условие  $\varepsilon < 1/9$  получено как необходимый критерий возникновения слабых тангенциальных разрывов в профиле скорости и гистерезиса у расходно-напорной характеристики.

Возможность использования RHL-модели в качестве феноменологической для жидкостей в случае  $\varepsilon > 1$  должна быть проверена экспериментально. Таким образом, закономерности, выявленные в данной работе в этом диапазоне времён релаксаций, носят иллюстративный характер.

Работа выполнена при финансовой поддержке УрО РАН (проект № 13-1-НП-592).

## Литература

1. *Skul'skiy O.I., Slavnov Ye.V., Shakirov N.V.* The hysteresis phenomenon in nonisothermal channel flow of a non-newtonian liquid // *J. Non-Newton. Fluid.* – 1999. – V. 81, N. 1-2. – P. 17-26. [DOI](#)
2. *Дой М., Эдвардс С.* Динамическая теория полимеров. – М.: Мир, 1998. – 440 с.
3. *Пышинограй Г.В., Покровский В.Н., Яновский Ю.Г.* Определяющее уравнение нелинейных вязкоупругих (полимерных) сред в нулевом приближении по параметрам молекулярной теории и следствия для сдвига и растяжения // *ДАН.* – 1994. – Т. 339, № 5. – С. 612-615.
4. *Кузнецова Ю.Л., Скульский О.И.* Сдвиговое течение нелинейной упруговязкой жидкости // *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика.* – 2011. – № 4 (8). – С. 18-26.
5. *Skulsky O.I.* Numerical solution problems of highly concentrated rod-like macromolecules // *Int. J. Polym. Mater.* – 1994. – V. 27, N. 1-2. – P. 67-75. [DOI](#)
6. *Андрейченко Ю.А., Брутян М.А., Образцов И.Ф., Яновский Ю.Г.* Спурт-эффект для вязкоупругих жидкостей в 4-константной модели Олдройда // *ДАН.* – 1997. – Т. 352, № 3. – С. 327-330.
7. *Аристов С.Н., Скульский О.И.* Точное решение задачи течения шестиконстантной модели жидкости Джеффриса в плоском канале // *ПМТФ.* – 2002. – Т. 43, № 6. – С. 39-45.
8. *Кузнецова Ю.Л., Скульский О.И., Пышинограй Г.В.* Течение нелинейной упруговязкой жидкости в плоском канале под действием заданного перепада давления // *Вычисл. мех. сплош. сред.* – 2010. – Т. 3, № 2. – С. 55-69. [DOI](#)
9. *Аристов С.Н., Скульский О.И.* Точное решение задачи течения раствора полимера в плоском канале // *Инженерно-физический журнал.* – 2003. – Т. 76, № 3. – С. 88-95.
10. *Астарита Дж., Марручи Дж.* Основы гидродинамики неньютоновских жидкостей. – М.: Мир, 1978. – 309 с.
11. *Remmelgas J., Harrison G., Leal L.G.* A differential constitutive equation for entangled polymer solutions // *J. Non-Newton. Fluid.* – 1999. – V. 80, N. 2-3. – P. 115-134. [DOI](#)
12. *Remmelgas J., Leal L.G.* Numerical studies of viscoelastic flows using a model for entangled polymer solutions with a shear stress maximum // *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics.* – 2000. – V. 90, N. 2-3. – P. 187-216. [DOI](#)
13. *Малкин А.Я., Исаев А.И.* Реология: концепция, методы, приложения. – СПб.: Профессия, 2007. – 560 с.
14. *Noll W.* A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media // *Arch. Ration. Mech. An.* – 1958. – V. 2, N. 1. – P. 197-226. [DOI](#)

Поступила в редакцию 11.04.13; опубликована в электронном виде 15.07.13

## Сведения об авторах

Скульский Олег Иванович, дтн, вед.н.с., Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614013, Пермь, ул. Академика Королева, д. 1; E-mail: skul@icmm.ru

Кузнецова Юлия Леонидовна, инж., ИМСС УрО РАН; E-mail: julyas@icmm.ru