

DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.2.25

УДК 532.5

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ КАПЕЛЬ В СТОКСОВОМ РЕЖИМЕ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

О.А. Абрамова<sup>1,3</sup>, Ю.А. Иткулова<sup>1,3</sup>, Н.А. Гумеров<sup>1,2</sup><sup>1</sup> Центр микро- и наноскалярной динамики дисперсных систем, Башкирский государственный университет, Уфа, Россия<sup>2</sup> Institute for Advanced Computer Studies University of Maryland, USA<sup>3</sup> Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН, Уфа, Россия

Работа посвящена исследованию динамики капель под действием обтекающего потока в неограниченной области и цилиндрическом канале в трехмерной постановке при малых числах Рейнольдса методом граничных элементов. Проведено сравнение полученных в тестовых примерах численных результатов с аналитическим решением при обтекании одиночной капли. При различных параметрах каплей исследованы их угол наклона и деформация в сдвиговом потоке. Результаты расчетов сопоставлены с найденными в литературе экспериментальными и численными данными других авторов, а также с аналитическим решением в рамках теории малых деформаций. Разработана периодическая постановка задачи движения капель в канале произвольного сечения. Осуществлены расчеты динамики деформируемых капель различных объемов, произвольно распределенных в потоке.

*Ключевые слова:* течение эмульсии в канале, метод граничных элементов, деформируемые капли, уравнения Стокса

## MODELING OF THREE-DIMENSIONAL MOTION OF DEFORMABLE DROPLETS IN STOKES REGIME USING BOUNDARY ELEMENT METHOD

O.A. Abramova<sup>1,3</sup>, Yu.A. Itkulova<sup>1,3</sup> and N.A. Gumerov<sup>1,2</sup><sup>1</sup> Center for Micro- and Nanoscale Dynamics of Dispersed Systems, Bashkir State University, Ufa, Russia<sup>2</sup> Institute for Advanced Computer Studies, University of Maryland, USA<sup>3</sup> Mavlyutov Institute of Mechanics RAS, Ufa, Russia

The paper presents three-dimensional modeling of the dynamics of droplets under the imposed ambient flow in an unbounded domain and a cylindrical channel at low Reynolds numbers using the boundary element method. The obtained results for test cases are compared with the analytical solution for the flow around a single droplet. The inclination angle of drops and their deformation in a shear flow are studied at various parameters. Computational results are compared with experimental and numerical data found in the literature and with the analytical solution within the framework of small strain theory. The problem statement for the periodic motion of droplets in a channel of arbitrary cross-section is developed. Computations of the dynamics of deformable drops of different volumes and arbitrary distribution in a flow are performed.

*Key words:* emulsion channel flow, boundary element method, deformable droplets, Stokes equations

### 1. Введение

Изучение динамики дисперсных систем является актуальной проблемой современной науки и техники. Пример таких систем представляет эмульсия — жидкость, в которой во взвешенном состоянии находятся нерастворимые капельки какой-либо другой жидкости. Эмульсии встречаются во многих областях промышленности: пищевой, переработке отходов, биотехнологиях, медицине. В нефтяной области они широко используются для потокоотклоняющих целей, глушения скважин, выравнивания профиля приемистости скважин. В связи с этим очевидна важность разработки эффективного численного аппарата, позволяющего детально исследовать поведение эмульсий, включая взаимодействие капель, и изучать эффекты в подобных системах «жидкость – жидкость» на микроуровне.

Целью настоящей работы является проведение численного моделирования трехмерных течений Стокса двух вязких несмешивающихся жидкостей в неограниченной области и канале в случае, когда капли одной из жидкостей обтекает другая жидкость, которая далее называется внешней. Так как основные расчеты связаны только с границей, то для решения поставленной задачи используется подход, основанный на методе граничных элементов, уменьшающий размерность задачи на единицу. Кроме того метод допускает моделирование процессов в геометрически сложных областях, границы которых дискретизируются треугольными сетками. Настоящая работа содержит новую постановку задачи, позволяющую рассчитывать периодические течения в каналах произвольной формы.

Метод граничных элементов для стоксовых течений изложен в [1] и успешно применялся в ряде работ для расчета динамики деформируемых капель, взаимодействия капель и частиц в дисперсных течениях [2–4]. В статье [2] представлены результаты моделирования поведения разбавленной эмульсии в сдвиговом потоке. Проанализированы деформация и угол наклона одной капли при различных соотношениях ее вязкости и вязкости окружающей жидкости, а также разных капиллярных числах;

проведены некоторые реологические исследования, а именно рассмотрена эффективная вязкость и вклад, вносимый каждой отдельной каплей в тензор эффективных напряжений эмульсии в целом. В [3] гранично-интегральная формулировка описывает сдвиговое течение концентрированной эмульсии. Изучалась деформация близко расположенных друг к другу капель; вычислены некоторые реологические характеристики и представлены графики для различных концентраций эмульсий, капиллярных чисел и соотношений вязкостей. В [5] обсуждалось поведение эмульсий под действием силы тяжести. В упомянутых работах можно найти достаточно подробные обзоры литературы. Кроме того метод граничных элементов применялся при расчете медленного течения жидкости без капель в канале в трехмерной постановке при периодических и непериодических граничных условиях [6] и в двумерной постановке для периодического потока в каналах различной геометрии [7]. Авторами [8, 9] проводились экспериментальные и теоретические исследования поведения жидкости в сужающемся канале. Также существует ряд публикаций, посвященных численному анализу периодического течения эмульсий в каналах и основывающихся на использовании периодической функции Грина для уравнений Стокса. Геометрия расчетных областей в задачах, где осуществляется этот подход, обычно простая: цилиндрический канал [10], две параллельные пластины [11].

### 2. Математическая модель

В данной статье рассматриваются две задачи, описывающие динамику капель в областях, схематично показанных на рисунке 1 в прямоугольных декартовых координатах  $x, y, z$ .

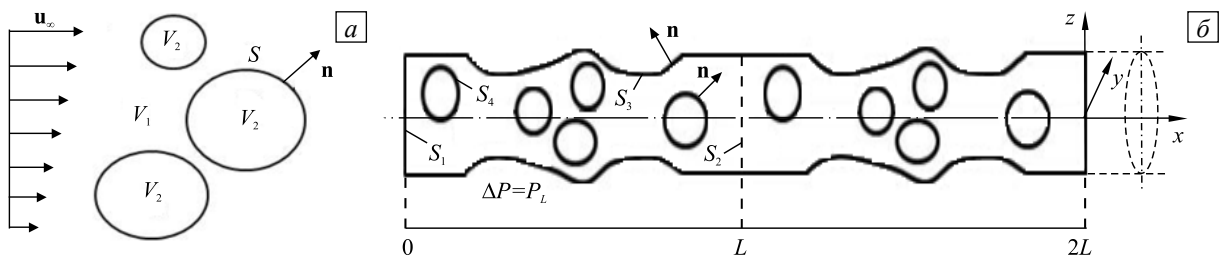


Рис. 1. Схематичное изображение исследуемых задач: неограниченная область ( $u_x$  – линейный профиль сдвигового течения) (а); канал произвольной периодической формы (б)

Динамика течения вязкой жидкости (индекс 1), содержащей в своем объеме деформируемые капли другой (несмешивающейся) жидкости (индекс 2), при малых числах Рейнольдса описывается уравнениями Стокса:

$$\nabla \cdot \sigma_i = -\nabla p_i + \mu_i \nabla^2 \mathbf{u}_i = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_i = 0 \quad (i = 1, 2), \tag{1}$$

где  $\sigma$  — тензор напряжений,  $\mathbf{u}$  — скорость,  $\mu$  — динамическая вязкость,  $p$  — давление. В данной статье рассматриваются жидкости с одинаковыми плотностями. На границе раздела жидкостей  $S$  задаются следующие граничные условия для скоростей и нормального напряжения:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{f} = \sigma \cdot \mathbf{n} = f \mathbf{n}, \quad f = \gamma (\nabla \cdot \mathbf{n}). \tag{2}$$

Здесь:  $\mathbf{f}$  — разность векторов нормального напряжения в жидкостях 1 и 2;  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к поверхности капли;  $\gamma$  — коэффициент поверхностного натяжения в каплях. Движение точек поверхности капель с радиус-вектором  $\mathbf{x}$  подчиняется кинематическому уравнению:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S. \tag{3}$$

В случае неограниченной области для внешней жидкости задается условие на бесконечности:  $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{u}_\infty(\mathbf{x})$ . Постановка задачи течения в канале при условии, что его стенка  $S_3$  (Рис. 1) смачивается жидкостью 1, дополняется равенством  $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in S_3$  и условием периодичности течения (речь о нем пойдет после).

### 3. Гранично-интегральная формулировка

Рассматриваемые задачи решаются методом граничных элементов [1]. Суть метода заключается в переходе от уравнений в частных производных, описывающих поведение искомой функции внутри

и на границе области, к интегральному уравнению, связывающему только ее граничные значения, и поиске численного решения такого уравнения. Благодаря этому размерность задачи уменьшается на единицу. Значения функции в произвольных точках расчетной области определяются далее по найденному решению на границе. Все это делает метод граничных элементов достаточно эффективным при моделировании трехмерных задач в бесконечных областях и областях со сложной геометрией.

Граничные интегральные уравнения для жидкости, занимающей объем  $V$ , ограниченный поверхностью  $S$ , с нормальными к ней, направленными вовне, могут быть записаны в следующем виде [12]:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{y}) - \int_S \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\mu_s} \int_S \mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y} \in V; \\ \frac{1}{2} \mathbf{u}(\mathbf{y}) - \int_S \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\mu_s} \int_S \mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y} \in S; \\ - \int_S \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\mu_s} \int_S \mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y} \notin S, V, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathbf{T}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{T}$  — тензоры второго и третьего ранга, компоненты которых в прямоугольной декартовой системе координат вычисляются по формулам:

$$\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{\delta_{ij}}{r} + \frac{r_i r_j}{r^3} \right), \quad \mathbf{T}_{ijk}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = -\frac{3}{4\pi} \frac{r_i r_j r_k}{r^5}, \quad r_i = y_i - x_i \quad (i, j, k = 1, 2, 3),$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. Таким образом, если  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{f}$  известны на границе области, то поле скорости  $\mathbf{u}(\mathbf{y})$  может быть определено согласно (4) в любой точке области.

Две обсуждаемые задачи приводят к разным гранично-интегральным формулировкам. В первой задаче требуется описать динамику деформируемых капель одной жидкости при обтекании их в неограниченном объеме другой жидкостью, имеющей заданную скорость на бесконечности  $\mathbf{u}_\infty(\mathbf{x})$ . Интегральное представление поля скоростей внутри и вне капель в данном случае имеет вид [12]:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{y} \in V_1, \quad \mathbf{u}(\mathbf{y}) - 2\mathbf{u}_\infty(\mathbf{y}) \\ \mathbf{y} \in V_2, \quad \lambda \mathbf{u}(\mathbf{y}) \\ \mathbf{y} \in S, \quad \frac{1+\lambda}{2} \mathbf{u}(\mathbf{y}) - \mathbf{u}_\infty(\mathbf{y}) \end{aligned} \right\} = \int_S \left\{ -\frac{1}{\mu} \mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) - (1-\lambda) \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) \right\} dS(\mathbf{x}), \quad (5)$$

где наряду с принятыми в (1), (2) обозначениями дополнительно вводятся  $\mu = \mu_1$ ;  $\lambda = \mu_2/\mu_1$ ;  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  определяется из уравнения (2). Заметим, что скорость  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  находится как решение последнего уравнения (5), которое является интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода с сингулярным ядром.

Во второй задаче рассматривается течение эмульсии в канале. Расчетная область представляет собой часть канала, ограниченную поверхностью  $S$ :  $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ , где  $S_3$  — стенка канала,  $S_1$  и  $S_2$  — поперечные сечения. Жидкость 1 занимает область, ограниченную поверхностью  $S'$ , состоящей из  $S$  и  $S_4$ , где  $S_4$  — суммарная поверхность капель. Предполагается, что канал бесконечен, его профиль (поверхность  $S_3$ ) и распределение капель в потоке повторяются в направлении координатной оси  $x$  с периодом  $L$  (Рис. 1). Таким образом, рассматривается только отрезок канала  $[0, L]$ , где предполагается, что в каждый момент времени сечения  $x=0$  и  $x=L$  заполнены внешней жидкостью (начало системы координат можно при необходимости перемещать вдоль оси  $x$ , вводя соответствующую поправку на преобразование координат). Движение жидкостей описывается уравнениями Стокса (1) со следующими периодическими граничными условиями:

$$\mathbf{u}|_{x=0} = \mathbf{u}|_{x=L} = \mathbf{u}_s, \quad \mathbf{f}_1|_{x=L} = -\mathbf{f}_1|_{x=0} + \mathbf{f}_p = \mathbf{f}_s, \quad \mathbf{f}_p = \mathbf{i}_x \Delta p,$$

где  $\Delta p$  — заданный перепад давления для потока по длине канала,  $\mathbf{u}_s$  и  $\mathbf{f}_s$  — искомые функции,  $\mathbf{f}_1$  — нормальное напряжение в жидкости 1.

Гранично-интегральные уравнения для точек, принадлежащих всей границе  $S'$ , будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1+\beta(\mathbf{y})\lambda}{2} \mathbf{u}(\mathbf{y}) - \int_S \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) + (1-\lambda) \int_{S_4} \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \\ & = \frac{1}{\mu_1} \int_S \mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) - \frac{1}{\mu_1} \int_{S_4} \mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}_4(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y} \in S', \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\beta(\mathbf{y}) = 1$  для  $\mathbf{y} \in S_4$  и  $\beta(\mathbf{y}) = 0$  для  $\mathbf{y} \in S$ ,  $\mathbf{f}_4(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  (см. формулу (2)).

#### 4. Численная реализация

При моделировании динамики капель методом граничных элементов, вне зависимости от рассматриваемой области, используется следующий подход. Поверхность каждой капли разбивается сеткой на  $M$  плоских треугольников (граней)  $N_{\Delta_j}$  ( $j = 1, \dots, M$ ) с общим числом вершин (узлов)  $N$  в точках  $\mathbf{x}_i$ , по которым строятся квадратурные формулы для вычисления поверхностных интегралов:

$$\mathbf{I}(\mathbf{y}) = \int_S F(\mathbf{x}) \Lambda(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS \begin{cases} \sum_{k=1}^p w_k F(\mathbf{z}_k) \Lambda(\mathbf{y}, \mathbf{z}_k) \mathbf{n}(\mathbf{z}_k), & \mathbf{y} \neq \mathbf{z}_k, \\ F(\mathbf{z}_j) \mathbf{J}_j + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^p w_k F(\mathbf{z}_k) \Lambda(\mathbf{y}, \mathbf{z}_k) \mathbf{n}(\mathbf{z}_k), & \mathbf{y} = \mathbf{z}_j, \end{cases} \quad (7)$$

где  $\mathbf{z}_k$  и  $w_k$  — узлы и веса квадратуры,  $F$  — произвольная искомая функция,  $\Lambda(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  — ядро интеграла,  $\mathbf{J}_j$  — вклад сингулярной части ядра,  $p$  — количество узлов, которое содержит рассматриваемая поверхность  $S$ .

Далее применяются два варианта выбора точек коллокации: в центрах граней  $\mathbf{c}_j$  ( $j = 1, \dots, M$ ) и в узлах сетки  $\mathbf{x}_i$ . В первом случае  $w_j$  определяются как площади соответствующих граней  $\Delta S_j$ , а вектор внешней нормали есть вектор нормали к поверхности в центре грани. Во втором случае веса квадратуры находятся как сумма вкладов, вносимых каждой гранью, содержащей рассматриваемый узел:  $w_i = \frac{1}{3} \sum_j \Delta S_j$ ,

а внешняя нормаль — осреднением нормалей в центрах этих граней:  $\mathbf{n}_i w_i = \frac{1}{3} \sum_j \Delta S_j \mathbf{n}_j$ .

Для получения  $\mathbf{J}_j$  в задаче обтекания капель в неограниченной области достаточно использовать известные интегральные тождества для течений Стокса [5, 12], в которые подставляется квадратура (7). В задаче же течения в канале вектор нормального напряжения на стенке не коллинеарен нормали, и требуются дополнительные соотношения. Такие соотношения получаются из второго уравнения (4),

в которое подставляются точные решения уравнений Стокса:  $\mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^3 M_{ij} \mathbf{y}_j$ ,  $\mathbf{f}_i = 2\mu \sum_{j=1}^3 M_{ij} \mathbf{n}_j$ ,  $\sum_{j=1}^3 M_{ij} = 0$ ,

$M_{ij} = M_{ji}$  ( $i = 1, 2, 3$ ), где  $M_{ij}$  — элементы произвольной симметричной матрицы с нулевым следом. Используя пять таких линейно независимых матриц, можно установить все компоненты  $\mathbf{J}_j$  для ядра  $\mathbf{G}$  методом наименьших квадратов.

Для вычисления средней кривизны поверхности капли в каждом узле сетки используется метод параболической аппроксимации [5], который показал погрешность, не превышающую 3% для эллипсоида. Этот метод сравнивался с методом контурных интегралов [3] и оказалось, что выбранный метод более точен. Применение метода параболической аппроксимации возможно, если величина валентности узлов сетки составляет не менее пяти, что и реализовано в расчетах.

В случае коллокаций в узлах сетки последнее уравнение в граничных интегралах (5) в точках  $\mathbf{y} = \mathbf{x}_j$  записывается в виде:

$$\frac{1+\lambda}{2} \mathbf{u}_j + \sum_{i=1}^N (1-\lambda) \mathbf{I}_{ji}^{(K)} \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{\infty, j} - \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^N \mathbf{I}_{ji}^{(G)} f_i \quad (j = 1, \dots, N), \quad (8)$$

где  $\mathbf{I}_{ij}^{(G)}$  и  $\mathbf{I}_{ij}^{(K)}$  — элементы, соответствующие ядрам  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{K}$ , определяемые согласно формуле (7). Решая систему линейных алгебраических уравнений (8), можно найти компоненты скорости на границе.

При течении в канале интегралы по поверхности вычисляются с использованием точек коллокации в центрах граней. Этот способ выбран для того, чтобы избежать проблем в узлах, расположенных на стыке боковой поверхности канала и плоскости его поперечного сечения. Интегралы по поверхности  $S$  в уравнении (6) могут быть представлены как суммы интегралов по соответствующим частям поверхности канала. Поскольку выполняется граничное условие  $\mathbf{u}|_{S_3} = 0$ , интегральные уравнения могут быть переписаны относительно неизвестных  $\mathbf{u}_s, \mathbf{f}_s, \mathbf{u}_4, \mathbf{f}_r = \mathbf{f}_1|_{S_3}$  в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{12} + \mathbf{A}_{13} & \mathbf{B}_{13} - \mathbf{B}_{12} & -\mathbf{B}_{11} & \mathbf{A}_{14} \\ \mathbf{A}_{22} + \mathbf{A}_{23} & \mathbf{B}_{23} - \mathbf{B}_{22} & -\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{24} \\ \mathbf{A}_{32} + \mathbf{A}_{33} & \mathbf{B}_{33} - \mathbf{B}_{32} & -\mathbf{B}_{31} & \mathbf{A}_{34} \\ \mathbf{A}_{42} + \mathbf{A}_{43} & \mathbf{B}_{43} - \mathbf{B}_{42} & -\mathbf{B}_{41} & \mathbf{A}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{f}_s \\ \mathbf{f}_r \\ \mathbf{u}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{13} \mathbf{f}_p \\ \mathbf{B}_{23} \mathbf{f}_p \\ \mathbf{B}_{33} \mathbf{f}_p \\ \mathbf{B}_{44} \mathbf{f}_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{14} \mathbf{f} \\ \mathbf{B}_{24} \mathbf{f} \\ \mathbf{B}_{34} \mathbf{f} \\ \mathbf{B}_{44} \mathbf{f} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$\mathbf{A}_{nm} = \frac{1}{2} \mathbf{I}_{nm} - \mathbf{K}_{nm} \quad (n, m = 1, 2, 3); \quad \mathbf{A}_{4m} = \frac{1+\lambda}{2} \mathbf{I}_{4m} - \mathbf{K}_{4m} \quad (m = 1, 2, 3);$$

$$\mathbf{A}_{n4} = \frac{1}{2} \mathbf{I}_{n4} - (1-\lambda) \mathbf{K}_{n4} \quad (n = 1, 2, 3); \quad \mathbf{A}_{44} = \frac{1+\lambda}{2} \mathbf{I}_{44} - (1-\lambda) \mathbf{K}_{44};$$

$$\mathbf{B}_{nm} = \frac{1}{\mu_1} \mathbf{G}_{nm} \quad (n = 1, 2, 3, 4; \quad m = 1, 2, 3); \quad \mathbf{B}_{44} = -\frac{1}{\mu_1} \mathbf{G}_{44},$$

где  $\mathbf{I}_{nm}$  — единичная матрица,  $\mathbf{K}_{nm}, \mathbf{G}_{nm}$  — расчетные матрицы, записанные для точек, принадлежащих поверхности, обозначенной индексом  $n$ , по отношению к точкам, расположенным на поверхности, обозначенной  $m$ . Элементы этих матриц находятся по формуле (7). Индексы  $n$  и  $m$  принимают значения: 1 — во входном сечении канала, 2 — в выходном сечении, 3 — на боковой поверхности, 4 — на поверхности каплей.

В процессе эволюции узлы сетки на поверхности каплей перемещаются согласно уравнению (3), однако для стабилизации сетки уравнение модифицируется:  $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{w}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in S$ , где  $\mathbf{w}(\mathbf{x})$  — локально определяемая поправка, которую можно задавать произвольно для сохранения более или менее равномерного распределения узлов сетки по поверхности каплей. Поскольку  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0$ , то такая модификация изменяет только тангенциальную скорость движения узлов по поверхности и не влияет на дискретное представление поверхности в целом. В настоящей работе используется упрощенная (без учета взаимодействия с близлежащими каплями формула), предложенная в работе [3]:

$$\mathbf{w}_i = \frac{N^{3/2}}{300} \frac{1}{1+\lambda} \sum_j \left[ 1 + |2k_j|^{3/2} \right] \Delta S_j \left\{ (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) - \mathbf{n}_i \left[ \mathbf{n}_i \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \right] \right\} \quad (i = 1, \dots, N). \quad (10)$$

Здесь:  $N$  — количество узлов сетки на поверхности одной капли;  $k_j$  — средняя кривизна поверхности капли в точке  $\mathbf{x}_j$ ;  $\Delta S_j$  — часть площади поверхности, соответствующая  $\mathbf{x}_j$ ; суммирование производится по всем узлам  $\mathbf{x}_j$ , непосредственно связанным с  $\mathbf{x}_i$ .

Интегрирование по времени является комбинацией явного и неявного многошагового метода и реализуется по предикторно–корректорной схеме (интегрирование по методу Адамса–Башфорта–Моултона 6-го порядка (АБМ)). Необходимое при этом начальное приближение для функции находится методом Рунге–Кутты 4-го порядка (РК 4). Шаг по времени должен быть небольшим, таким, чтобы выполнялось условие численной устойчивости [13]:

$$\Delta t \leq K \frac{\mu_1 \Delta x_{\min}}{\gamma}, \quad (11)$$

где  $K = O(1)$  — постоянный коэффициент (в расчетах выбиралась константа  $K \sim 0,1 \div 0,2$ ),  $\Delta x_{\min}$  — минимальное расстояние между узлами сетки.

## 5. Результаты расчетов

В рамках данной работы в среде Matlab реализованы программные модули для исследования динамики каплей одной жидкости в неограниченном потоке другой жидкости, а также периодического течения в канале. Результаты решения нескольких тестовых задач представлены ниже.

### 5.1. Обтекание одиночной сферической капли неограниченным потоком

В этом случае проведено три этапа сравнения численных результатов, полученных МГЭ, с аналитическим решением задачи обтекания жидкой сферы [14]:

*Этап 1.* Численно находились компоненты скорости на границе капли и сопоставлялись с аналитическими; относительная погрешность составила 0,5%.

*Этап 2.* Известные из [14] компоненты скорости внутри и вне капли сравнивались с численными значениями, полученными, соответственно, из первого и второго уравнений (5) при использовании аналитических выражений для вычисления  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  и  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ .

*Этап 3.* Производилось то же, что и на этапе 2, но с  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  и  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ , найденными численно.

На рисунке 2 показаны результаты, полученные на 2-м и 3-м этапах при  $\lambda = 2,5$ . Визуально наблюдается хорошее совпадение численного ( $\mathbf{u}^*$ ) и аналитического ( $\mathbf{u}$ ) полей скоростей. Погрешность численного решения зависит от  $\lambda$  и количества узлов дискретизации. Его относительная погрешность в норме  $L_\infty$ , определяемая как  $\delta(\mathbf{u}^*) = \|\mathbf{u}^* - \mathbf{u}\|_\infty / \|\mathbf{u}\|_\infty$ , где  $\|\mathbf{u}\|_\infty = \max_i |u_i|$ ,  $K = O(1)$  ( $i = 1, \dots, N$ ), при  $N = 642$  составляет  $1,0 \div 1,5\%$ . С увеличением степени дискретизации поверхности ошибка уменьшается.

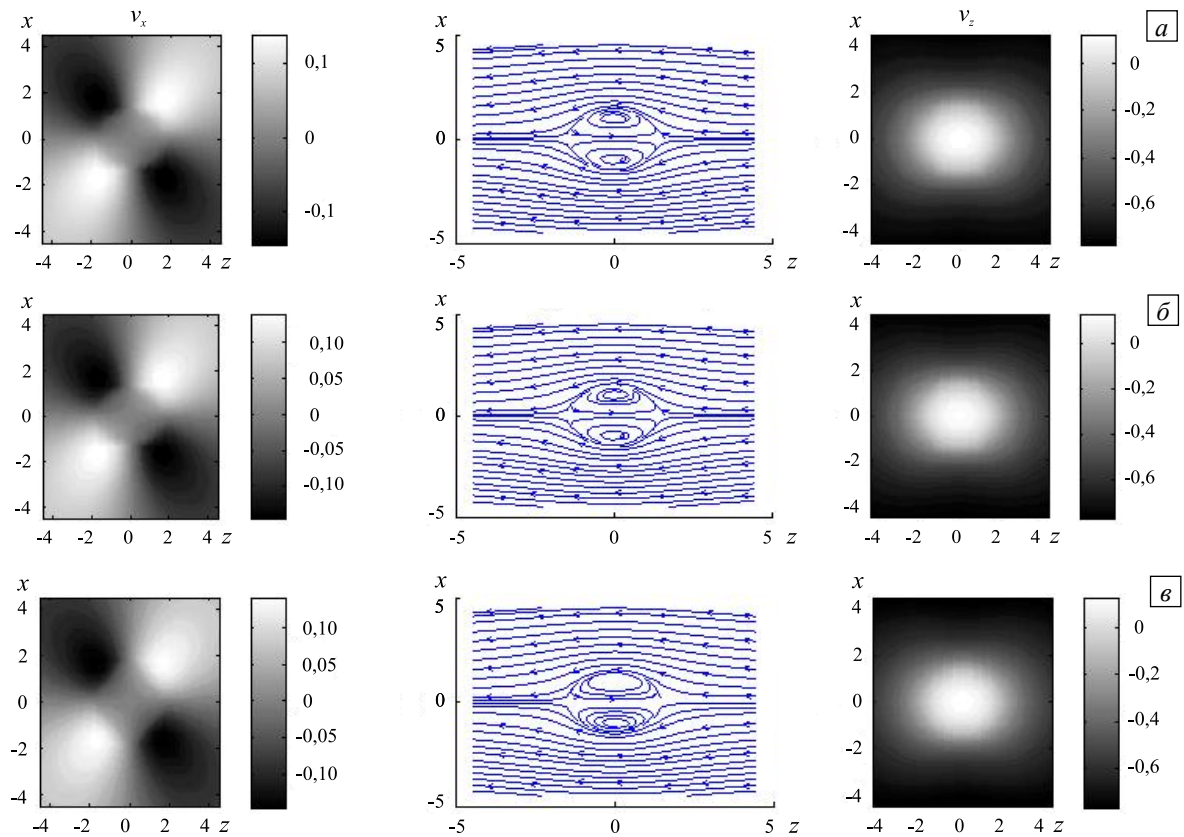
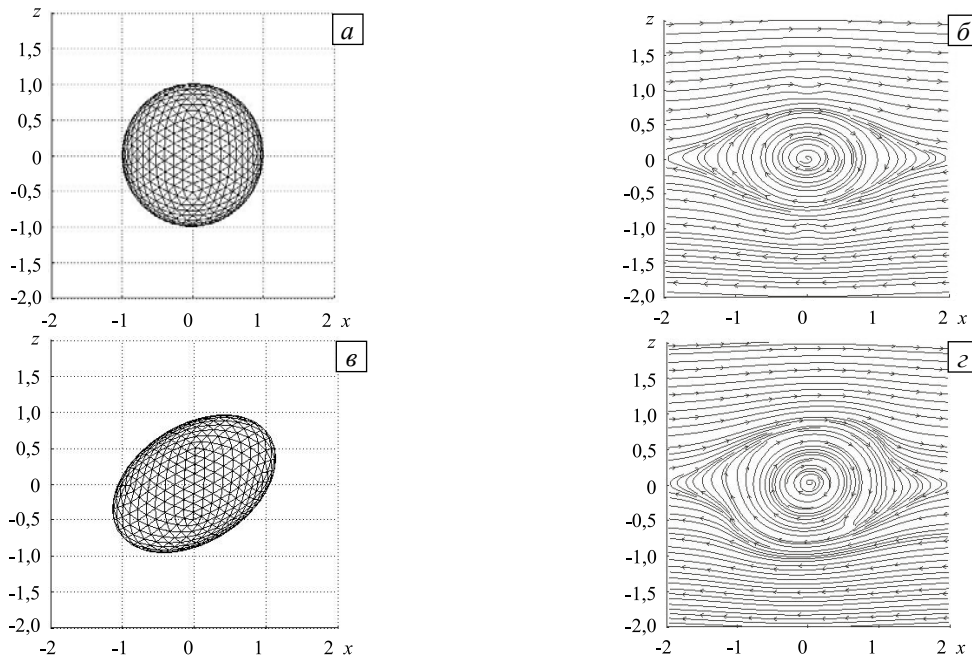


Рис. 2. Компоненты скорости внутри и вне сферической капли (слева –  $v_x$ , справа –  $v_z$ , в центре – линии тока): МГЭ при использовании аналитического решения на границе (а); МГЭ в полном объеме (б); аналитическое решение (в)

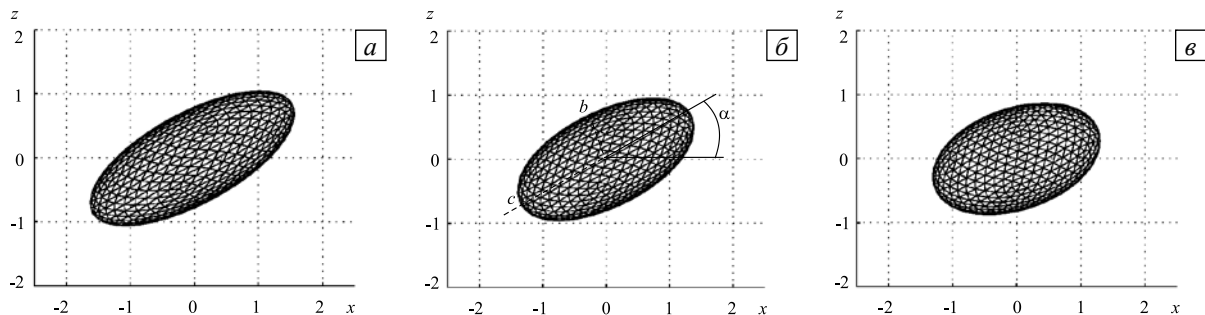
### 5.2. Одиночная капля в сдвиговом потоке

Исследовано изменение формы капли при разных капиллярных числах  $Ca = \mu_1 a G / \gamma$ , где  $a$  — радиус капли,  $G$  — скорость сдвига. Некоторые результаты тестов для различных параметров показаны



**Рис. 3.** Деформация капли в сдвиговом потоке ( $Ca = 1$ ,  $\lambda = 3,6$ ) (а, в) и поле скорости внутри и вне капли (б, г) в разные моменты безразмерного времени:  $t = 0$  (а, б) и  $t = 1$  (в, г)

На рисунке 3 — это изменение формы капли и линии тока внутри и снаружи капли, помещенной в сдвиговое течение, и на рисунке 4 — влияние свойств жидкостей и капиллярного числа на установившуюся форму капли. Все результаты для сдвигового течения представлены в безразмерном времени  $t = \gamma t_{dim} / (\mu_1 a)$ , где  $t_{dim}$  — размерное время.



**Рис. 4.** Стационарная форма капли в сдвиговом потоке при различных параметрах:  $Ca = 0,4$ ,  $\lambda = 0,08$  (а);  $Ca = 0,3$ ,  $\lambda = 1$  (б);  $Ca = 0,3$ ,  $\lambda = 3,6$  (в)

Также исследовались зависимости угла наклона и деформации поверхности капли в сдвиговом потоке от параметров  $Ca$  и  $\lambda$ . Полученные результаты сравнивались с опубликованными в литературе экспериментальными данными [15, 16], численными результатами [2, 4] и аналитическим решением в рамках теории малых деформаций [17]. Для описания деформации капли обычно используется угол наклона  $\alpha$  (угол между  $\mathbf{u}_\infty$  и направлением максимального растяжения капли) и скалярная величина деформации поверхности  $D = (c - b) / (c + b)$  (для краткости — деформация капли), где  $c$  и  $b$  — наибольшее и наименьшее расстояние от поверхности до центра капли (Рис. 4). Для изначально сферической капли эти параметры эволюционируют, но по прошествии определенного времени достигают стационарных значений.

На рисунке 5 представлены расчетные зависимости установившихся параметров  $\pi/4 - \alpha$  и  $D$  от  $Ca$  при различных  $\lambda$ . Из графиков видно, что значения деформации капли хорошо согласуются с результатами решения по теории малых деформаций, но лишь до некоторого значения капиллярного числа. Угол же наклона значительно отличается от найденного аналитически, и разница становится все существеннее при увеличении  $Ca$ . В то же время полученные результаты тестовых расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными и известными из литературы численными результатами других авторов.

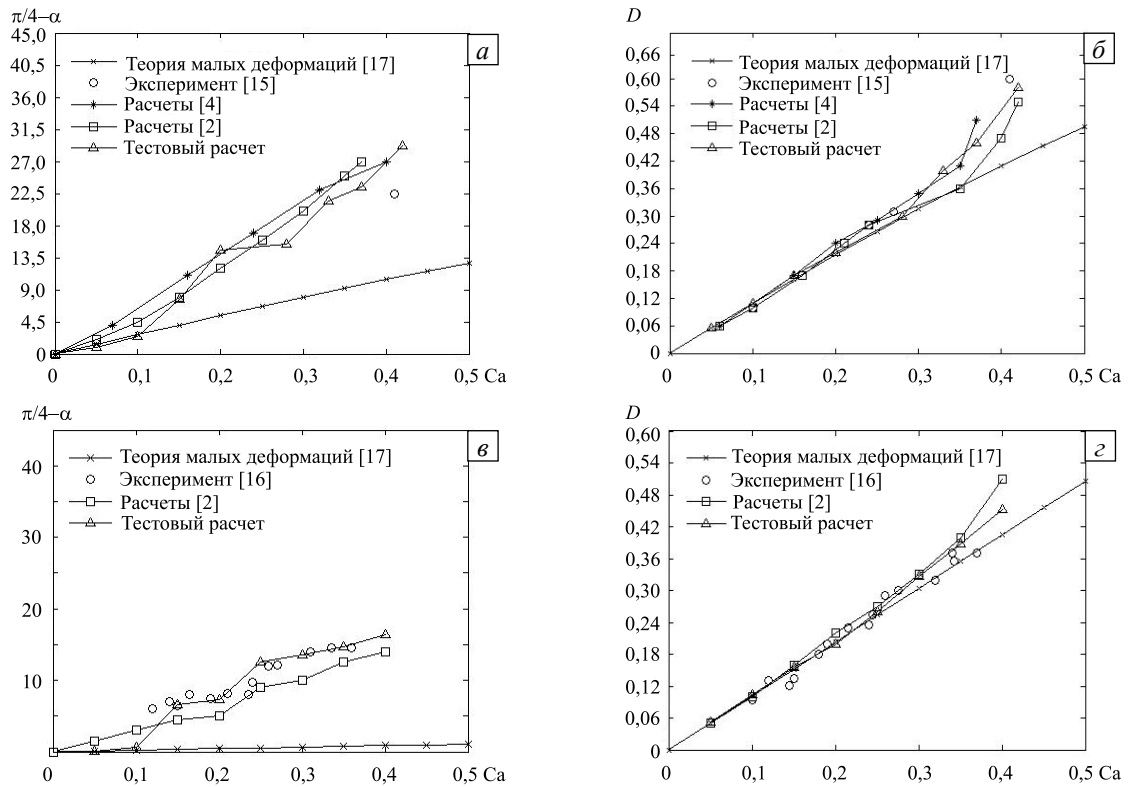


Рис. 5. Зависимость угла наклона  $\alpha$  и деформации капли  $D$  от  $Ca$  при различных значениях  $\lambda$ : 1 (а, б); 0,08 (в, г)

### 5.3. Взаимодействие нескольких капель в сдвиговом потоке

Решается тестовая задача движения нескольких близко расположенных друг к другу деформируемых капель. Рисунок 6 показывает хорошее качественное и количественное согласование полученных результатов и результатов [5] для двух капель одинакового объема при  $Ca = 0,35$ ,  $\lambda = 0,2$ . В данном примере количество узлов сетки на поверхности каждой капли составляет  $N = 642$ . Изначально капли имеют форму сферы радиусом  $a$ , расстояния между их центрами равняются:  $\Delta x = 10a$ ,  $\Delta y = 0$ ,  $\Delta z = 0,5a$ .

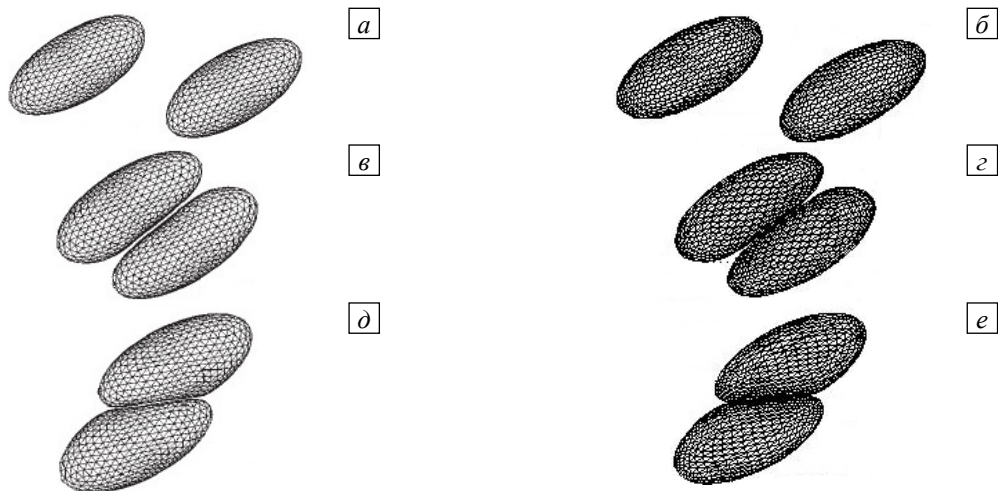


Рис. 6. Моделирование относительного движения двух одинаковых капель при  $Ca = 0,35$ ,  $\lambda = 0,2$ ; сравнение полученных результатов (б, г, е) с результатами работы [5] (а, в, д) в моменты времени  $t$ : 13 (а, б), 17 (в, г), 19 (д, е)

### 5.4. Периодическое течение малых капель в цилиндрическом канале

Далее в цилиндрическом канале с постоянными радиусом  $R$  и перепадом давления  $\Delta p$  на длине  $L$  исследовалась динамика нескольких капель равного размера (начальный радиус  $a \ll R$ ). Результаты



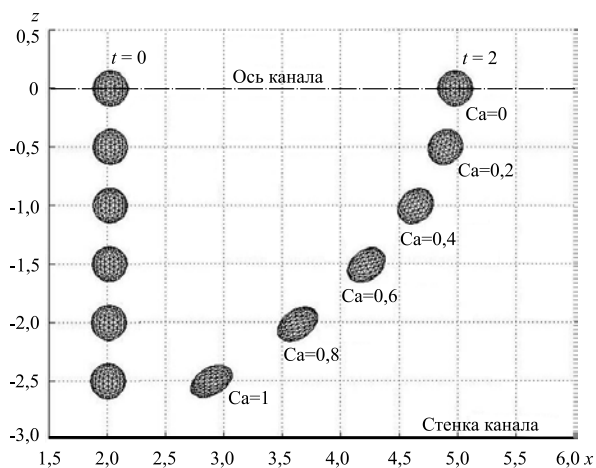


Рис. 7. Малые капли в течении Пуазейля:  $\lambda = 1,5$ ,  $P = 0,6$ ,  $R_{chan}/L = 0,43$ ,  $a/R_{chan} = 0,07$ ,  $t = 2$

численного моделирования представлены для безразмерного времени, где масштаб расстояния служит радиус самой маленькой капли:  $a_{min} = a$ . На рисунке 7 изображены капли в нижней части канала в начальный момент времени  $t = 0$  и в момент  $t = 2$ . Видно, что присутствие капель, вследствие их небольшого количества и малого размера, изменяет профиль течения внешней жидкости вдали от капель незначительно. Спустя некоторое время капли распределяются по параболическому закону согласно профилю скорости течения Пуазейля. Угол наклона и деформация каждой капли соответствуют локальному капиллярному числу  $Ca$ , которое для течения в цилиндрическом канале определяется, как и в случае неограниченной области, скоростью сдвига. Здесь она равняется  $G = 2z_0\Delta p/(\mu_1L)$ ,  $z_0$  — расстояние от центра капли до оси цилиндра.

### 5.5. Периодическое течение больших капель в цилиндрическом канале

Также представляет интерес деформация капель, имеющих радиус, сравнимый с радиусом канала: в этом случае можно наблюдать влияние близко расположенных стенок канала на изменение формы капли. На рисунке 8 изображены капли различных начальных размеров в периодическом канале, деформированные к моменту времени  $t = 2$ , при значении безразмерного параметра  $P = 1,4$ , где  $P = aR\Delta p/(\gamma L)$ . Капли малого размера качественно ведут себя аналогично малым каплям, рассмотренным в предыдущем случае: их деформация определяется лишь скоростью сдвига течения внешней жидкости. В то же время крупные капли деформируются по-другому вследствие существенного изменения скорости сдвига на расстояниях, меньших чем размер. В этом тестовом примере цилиндрический канал покрывался сеткой из 2920 треугольников, дискретизация капель зависела от радиуса (для более крупных капель число элементов составляло  $N = 642$ , для капель небольшого размера —  $N = 162$ ).

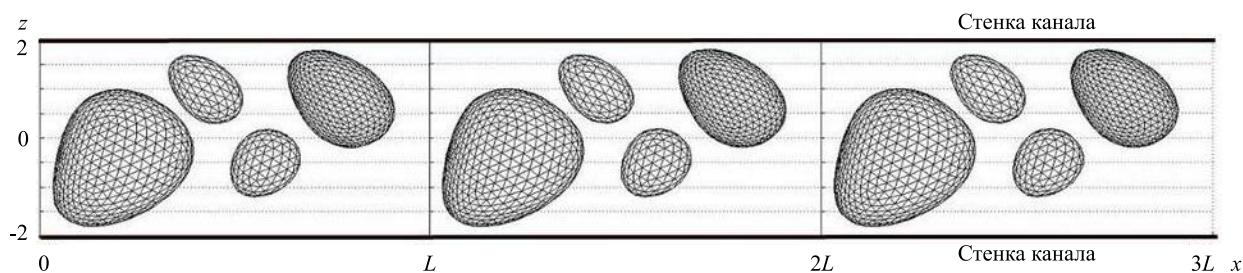


Рис. 8. Периодическое течение капель эмульсии в цилиндрическом канале

## 6. Заключение

Реализован подход к решению трехмерных задач, посвященных изучению динамики деформируемых капель одной вязкой жидкости в другой жидкости для различных областей, включая бесконечную область и периодический канал. Подход основан на методе граничных элементов. Для случая периодического канала представлен новый способ решения, приводящий к системе линейных алгебраических уравнений (9), отличной от ранее использованных.

Разработанный подход опробован на задачах обтекания капли и исследования динамики капель в сдвиговом потоке, описанных в литературе. Сопоставление показало хорошее согласие с полученными другими авторами аналитическим и численными решениями, а также с экспериментальными данными по стационарному углу наклона и деформации капель в сдвиговом потоке при различных капиллярных числах и отношениях вязкостей жидкостей. Кроме того проведены расчеты динамики капель в цилиндрическом канале. Дано качественное объяснение результатов расчетов. В случае нескольких капель с радиусом существенно меньшим, чем радиус канала, показано соответствие деформации капель локальному капиллярному числу.

Полученные результаты показали, что реализованные алгоритмы достаточно хорошо описывают поведение капель как в неограниченной области, так и в цилиндрическом канале, что дает возможность применять их для моделирования течения дисперсных систем «жидкость – жидкость», изучения реологических свойств эмульсий и для более точного предсказания их поведения при различных меняющихся внешних параметрах. Поскольку разработанный для расчета периодических течений подход не ограничивается цилиндрическими каналами, изучение течений эмульсий в микроканалах сложной геометрии может быть следующим этапом исследования.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ и Совета по грантам Правительства РФ (договор №11.G34.31.0040) и РФФИ (проект № 12-01-31173).

## Литература

1. *Pozrikidis C.* Boundary integral and singularity methods for linearized viscous flow. – Cambridge University Press: Cambridge, MA, 1992. – 270 p. [DOI](#)
2. *Kennedy M.R., Pozrikidis C., Skalak R.* Motion and deformation of liquid drops, and the rheology of dilute emulsions in simple shear flow // *Comput. Fluids.* – 1994. – V. 23, N. 2. – P. 251-278. [DOI](#)
3. *Loewenberg M., Hinch E.J.* Numerical simulation of a concentrated emulsion in shear flow // *J. Fluid Mech.* – 1996. – V. 321. – P. 395-419. [DOI](#)
4. *Rallison J.M.* A numerical study of the deformation and burst of a viscous drop in general shear flows // *J. Fluid Mech.* – 1981. – V. 109. – P. 465-482. [DOI](#)
5. *Zinchenko A.Z., Rother M.A., Davis R.H.* A novel boundary-integral algorithm for viscous interaction of deformable drops // *Phys. Fluids.* – 1997. – V. 9, N. 6. – P. 1493-1511. [DOI](#)
6. *Иткулова Ю.А.* Метод граничных элементов в численном исследовании трехмерных течений Стокса в каналах произвольной формы // *Материалы V Российской конф. с международным участием «Многофазные системы: теория и приложения»*, Уфа, 2-5 июля 2012 г. – Уфа: Нефтегазовое дело, 2012. – Ч. 1. – С. 94-97.
7. *Pozrikidis C.* Creeping flow in two-dimensional channels // *J. Fluid Mech.* – 1987. – V. 180. – P. 495-514. [DOI](#)
8. *Boger D.V.* Viscoelastic flows through contractions // *J. Fluid Mech.* – 1987. – V. 19. – P. 157-182. [DOI](#)
9. *Lubansky A.S., Boger D.V., Servais C., Burbidge A.S., Cooper-White J.J.* An approximate solution to flow through a contraction for high Trouton ratio fluids // *J. Non-Newton. Fluid.* – 2007. – V. 144, N. 2-3. – P. 87-97. [DOI](#)
10. *Coulliette C., Pozrikidis C.* Motion of an array of drops through a cylindrical tube // *J. Fluid Mech.* – 1998. – V. 358. – P. 1-28. [DOI](#)
11. *Davis R.H., Zinchenko A.Z.* Motion of deformable drops through granular media and other confined geometries // *J. Colloid Interf. Sci.* – 2009. – V. 334, N. 2. – P. 113-123. [DOI](#)
12. *Rallison J.M., Acrivos A.* A numerical study of the deformation and burst of a viscous drop in an extensional flow // *J. Fluid Mech.* – 1978. – V. 89, N. 1. – P. 191-200. [DOI](#)
13. *Zinchenko A.Z., Davis R.H.* An efficient algorithm for hydrodynamical interaction of many deformable drops // *J. Comput. Phys.* – 2000. – V. 157, N. 2. – P. 539-587. [DOI](#)
14. *Ханпель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. – М.: Мир, 1976. – 623 с.
15. *Rumscheidt F.D., Mason S.G.* Particle motions in sheared suspensions. XII. Deformation and burst of fluid drops in shear and hyperbolic flow // *J. Coll. Sci.* – 1961. – V. 16, N. 3. – P. 238-261. [DOI](#)
16. *Torza S., Henry C.P., Cox R.G., Mason S.G.* Particle motions in sheared suspensions. XXVI. Streamlines in and around liquid drops // *J. Colloid Interf. Sci.* – 1971. – V. 35, N. 4. – P. 529-543. [DOI](#)
17. *Cox R.G.* The deformation of a drop in a general time-dependent fluid flow // *J. Fluid Mech.* – 1969. – V. 37, N. 3. – P. 601-623. [DOI](#)

Поступила в редакцию 11.02.13; опубликована в электронном виде 15.07.13

---

## Сведения об авторах

*Абрамова Ольга Александровна*, стажер-исслед., Центр микро- и наномасштабной динамики дисперсных систем, Башкирский государственный университет (ЦМНДДС, БашГУ), 450076, Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32; E-mail: abramovacmnds@gmail.com  
*Иткулова Юлия Айратовна*, стажер-исслед., ЦМНДДС, БашГУ; E-mail: itkulova.yulia@bashedu.ru  
*Гумеров Наиль Асгатович*, дфн, проф., Институт передовых компьютерных исследований (UMIACS), Университет штата Мэриленд, США, UMIACS, Room 3305 A.V. Williams Building, College Park, MD 20742; E-mail: gumerov@umiacs.umd.edu