

DOI: [10.7242/1999-6691/2013.6.2.22](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2013.6.2.22)
УДК 539.3:534.1

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В БЕСКОНЕЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ, ПОЛНОСТЬЮ ПОГРУЖЕННОЙ В ЖИДКОСТЬ

Г.В. Филиппенко

Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия

В работе рассмотрены совместные колебания идеальной акустической жидкости и бесконечной тонкой пустой цилиндрической оболочки. Задача исследования свободных осесимметричных колебаний оболочки в жидком пространстве рассмотрена в строгой математической постановке. Находятся распространяющиеся волны и потоки энергии в системе оболочка – жидкость. Проанализировано влияние параметров системы на вибрационные и акустические поля. Проведено сравнение вкладов в общий поток энергии различных механизмов передачи энергии по оболочке, а также вклада энергии, распространяющейся по жидкости.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, поверхностная волна, колебания оболочек, локальные и интегральные потоки энергии

ENERGY ASPECTS OF AXISYMMETRIC WAVE PROPAGATION IN AN INFINITE CYLINDRICAL SHELL FULLY SUBMERGED IN LIQUID

G.V. Filippenko

Institute of Mechanical Engineering RAS, St.-Petersburg, Russia

The paper is devoted to modeling joint vibrations of an ideal acoustic liquid and an infinite thin empty cylindrical shell. The problem of free oscillations of the shell in the liquid space is considered in a rigorous mathematical statement. The propagating waves and energy flux in this system are analyzed. The influence of parameters of the system on vibration and acoustic fields is considered. A comparison is carried out to study the contributions of different energy transfer mechanisms in the shell and the contribution of energy propagating in the liquid to the general energy flux.

Key words: cylindrical shell, surface wave, shell vibrations, local and integral energy fluxes

1. Введение

Цилиндрические оболочки — часто используемый элемент при моделировании акустических волноводов, разного рода трубопроводов, опор морских буровых установок и других гидротехнических сооружений. В связи с этим вызывают интерес задачи расчета волновых и вибрационных полей в системе оболочка – жидкость для конструкций, погруженных в жидкость. Полное исследование процессов требует учета в оболочке влияния со стороны жидкости как в виде гидростатических и гидродинамических сил (например [1] и [2]), так и в виде акустических полей (например [3]). Традиционно эти задачи разделяют, и в данной статье обсуждается взаимодействие акустических полей в жидкости и вибрационных полей в оболочке. В такого рода системах возникают волновые процессы, распространяющиеся и по оболочке, и по прилегающей к ней жидкости. Здесь приходится учитывать волны, уносящие энергию от оболочки, и волны, локализованные вблизи ее поверхности (так называемые поверхностные волны).

Первым шагом в изучении обсуждаемых систем традиционно считается рассмотрение стационарных процессов. Энергетически волновые процессы в оболочке и жидкости тесно связаны, и эта связь существенно зависит от частоты процесса и параметров системы. Энергетическое взаимодействие наиболее удобно и естественно описывать в терминах потоков энергии. Но при этом следует учитывать наличие в оболочке разных типов волн (продольных, изгибных и кручения), удельный вес которых в энергетическом потоке оболочки может существенно меняться. Фактором, позволяющим упростить подход, является изучение бесконечных систем так, чтобы на первом этапе отвлечься от влияния краевых эффектов. Распространению волн в цилиндрических оболочках посвящена обширная библиография. Отметим наиболее близкие работы — это [3–7]. В монографиях [8, 9] приведен большой список литературы по обсуждаемой теме.

Сам по себе энергетический анализ (анализ потоков энергии) является лишь составной частью исследования системы, но поведение локальных и интегральных потоков энергии иногда лучше характеризует волновой процесс, чем кинематические и динамические величины, поэтому в последнее время возрос интерес к ним. В качестве примеров можно привести некоторые из последних публикаций [10–17]. Однако проводимые там исследования ограничиваются в основном энергетическими потоками в пластинах (иногда сочлененных [10]). Статей, посвященных подобному аспекту изучения цилиндрических оболочек, значительно меньше (см. [6], [12], [18]).

Данная работа призвана восполнить этот пробел. В статье рассматривается взаимодействие оболочки и жидкости в приближении, когда элемент конструкции можно считать бесконечно длинной тонкой цилиндрической оболочкой, находящейся в жидком пространстве. Такое допущение возможно, если длина волны в оболочке много меньше ее длины и влиянием краев можно пренебречь. Используется модель оболочки, представленная в [8]; ее достоинством является вывод уравнений для оболочки из вариационного принципа виртуальной работы. В итоге это приводит к энергетической замкнутости системы уравнений и позволяет получать явные выражения для потоков энергии [6], [12].

Границы применимости результатов предлагаемой вниманию статьи определяются выбранными моделями оболочки типа Кирхгофа и идеальной сжимаемой жидкости. Модели оболочек такого типа хорошо описывают поведение реальных конструкций при невысоких частотах распространяющихся в них волн. По очень грубой оценке длина волны должна быть больше толщины оболочки. Задача, учитывающая совместные колебания оболочки и жидкости, решается в линейном приближении. Колебания считаются малыми и происходят без отрыва жидкости от оболочки и кавитационных эффектов. В случае пренебрежения вязкостью возможно проскальзывание жидкости вдоль оболочки, а при учете вязкости требуется выполнение условия непрерывности касательных смещений и сил на поверхности системы оболочка – жидкость, при этом волновые процессы станут затухающими.

2. Постановка задачи

Введем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) , где ось z совпадает с осью цилиндра, и локальную систему координат $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{k})$, где \mathbf{t}, \mathbf{n} — соответственно касательный и нормальный единичные векторы к поверхности оболочки, а \mathbf{k} — единичный вектор вдоль оси z (Рис. 1). Рассматривается стационарный процесс совместных свободных колебаний пустой цилиндрической оболочки и окружающей её жидкости. В качестве переменных, описывающих акустическое и вибрационное поля в системе, выберем акустическое давление в жидкости P и вектор смещений поверхности цилиндра $\mathbf{u} = (u_r, u_\varphi, u_z)^T$ (T — знак операции транспонирования). Акустическое давление P в жидком пространстве, окружающем оболочку, подчиняется уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)P(r, \varphi, z) = 0, \quad R < r < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty, \quad (1)$$

где $k = \omega/c$ — волновое число в жидкости; c — скорость распространения звука в жидкости; ω — частота; R — радиус цилиндра. Зависимость всех процессов от времени предполагаем гармонической, а временной фактор $\exp\{-i\omega t\}$ условимся всюду опускать.

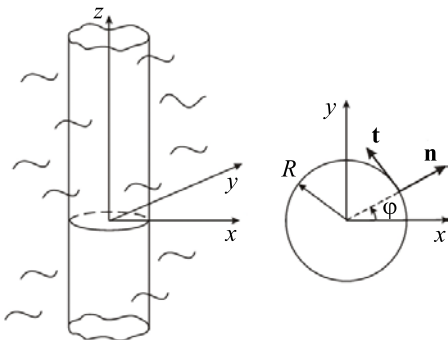


Рис. 1. Физическая модель системы оболочка – жидкость

На границе оболочка – жидкость имеют место два соотношения:
– кинематическое (безотрывность движения жидкости и цилиндра)

$$u_n(\varphi, z) = \frac{1}{\rho_w \omega^2} \left. \frac{\partial P(r, \varphi, z)}{\partial r} \right|_{r=R+0}; \quad (2)$$

$$0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty,$$

где ρ_w — плотность жидкости;

– динамическое (баланс сил, действующих на цилиндр)

$$\mathbf{L}\mathbf{u} = \frac{k_c^2 R^2}{\rho \omega^2} (0, 0, P|_{r=R+0})^T; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty. \quad (3)$$

Здесь: $k_c = \omega/c_s$ — волновое число волн деформации срединной поверхности цилиндра; $c_s = \sqrt{Eh/((1-\nu^2)\rho)}$ — скорость распространения этих волн.

Введем следующие обозначения: E , ν и ρ_s — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и объемная плотность материала оболочки соответственно, h — толщина оболочки и $\rho = \rho_s h$ — её поверхностная плотность; \mathbf{L} — линейный матричный дифференциальный оператор [12]. Дополнительно установим безразмерные параметры: толщину цилиндрической оболочки $h^* = h/R$; скорость распространения волн

в оболочке $c^* = c_s/c$; параметр $\tilde{k}_i = k_i R$, где k_i — волновое число вращательных движений оболочки; частоту $w = k_c R = \omega R/c_s$; параметр, характеризующий относительную толщину оболочки $\alpha^2 = (1/12)(h/R)^2$.

Рассмотрим осесимметричные колебания. В этом случае оператор \mathbf{L} в (3) упрощается, и исходная задача (система уравнений и граничные условия) распадается на две независимых задачи, которые далее в тексте статьи, для удобства, будут называться Задача 1 и Задача 2. Решение Задачи 1 — это вектор смещений $\mathbf{u} = (0, u_z, u_n)^T$, где отсутствуют вращательные движения, а решение Задачи 2 — вектор смещения $\mathbf{u} = (u_r, 0, 0)^T$, где присутствуют только вращательные движения. Сначала остановимся на Задаче 1.

Введем двумерный вектор смещения $\mathbf{u} = (u_z, u_n)^T$ и запишем в безразмерном виде матричный оператор системы \mathbf{L} (сохраним за ним прежнее обозначение):

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} w^2 + \tilde{\partial}_z^2 & v\tilde{\partial}_z \\ -v\tilde{\partial}_z & w^2 + \alpha^2(-1 + 2v\tilde{\partial}_z^2 - \tilde{\partial}_z^4) - 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Уравнение (3) при этом заменяется уравнением

$$\mathbf{L}\mathbf{u} = \frac{w^2}{\rho\omega^2} (0, P|_{r=R+0})^T; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty. \quad (5)$$

3. Получение представления для акустического и вибрационного полей

Вибрационные и акустические поля в системе полностью описываются парой $\{\mathbf{u}, P\}$, при этом точное выражение для смещений цилиндра можно получить только при точном определении и акустического поля в среде. Тем самым приходим к граничной задаче для уравнения Гельмгольца относительно акустического давления в жидкости [3]. Поскольку нормальные смещения u_n оболочки выражаются через давление P по формуле (2), то независимыми являются только переменные u_z и P , поэтому удобнее перейти к вектору $(u_z, P)^T$, через который вектор смещения оболочки \mathbf{u} выражается формулой:

$$\begin{pmatrix} u_z \\ u_n \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} u_z \\ P \end{pmatrix}, \quad \text{где } \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho_w \omega^2} \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=R+0} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Тогда уравнение (5) можно переписать как

$$\mathbf{S} \begin{pmatrix} u_z \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{0}, \quad \text{где } \mathbf{S} = \mathbf{L}\mathbf{M} - \mathbf{N}; \quad \mathbf{N} = \frac{w^2}{\rho\omega^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Его решение будем искать в виде

$$\begin{pmatrix} u_z \\ P \end{pmatrix} = A e^{i\lambda z} \begin{pmatrix} \xi \\ \gamma H_0^{(1)}(r\sqrt{k^2 - \lambda^2}) \end{pmatrix}, \quad (8)$$

полагая $|\xi|^2 + |\gamma|^2 = 1$. Здесь: $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода с нулевым индексом; A, ξ, γ — произвольные константы; λ — искомое волновое число.

Подставляя (8) в (7), получаем однородную алгебраическую систему вида

$$\hat{\mathbf{S}}\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (9)$$

где $\mathbf{x} = (\xi, \gamma)^T$, а матрица $\hat{\mathbf{S}}$ есть образ Фурье оператора \mathbf{S} . Условие существования нетривиального решения этой системы приводит к дисперсионному уравнению

$$\det \hat{\mathbf{S}} = 0. \quad (10)$$

В статье рассматривается свободный стационарный режим распространения волн в жидкости и оболочке, поэтому далее для заданной частоты ω находятся только вещественные положительные корни λ уравнения (10). В исходной модели реализуется случай существования не более двух таких корней. Они удовлетворяют неравенству $\lambda > k$. После подстановки такого корня в систему (9) находим собственный вектор \mathbf{x} и, следовательно, вид акустического и вибрационного полей в системе.

При исключительно вращательных движениях оболочки (Задача 2) уравнение оболочки (3) сводится к единственному уравнению, так как взаимодействие оболочки с идеальной жидкостью осуществляется только за счет нормальных смещений оболочки, которые отсутствуют в этом случае. Соответствующая дисперсионная ветка (зависимость безразмерного волнового числа $\tilde{k}_l = k_l R$ от безразмерной частоты ω) описывается выражением

$$\tilde{k}_l = \frac{\omega}{\sqrt{(1+4\alpha^2)v_-}}, \quad \text{где } v_- = (1-\nu)/2. \quad (11)$$

4. Поток энергии в системе оболочка – жидкость

Воспользуемся выражением для интегрального вектора потока энергии в жидкости. При вещественном λ он имеет единственную ненулевую компоненту, направленную вдоль оси z и вычисляемую по формуле:

$$Y_{liq} = \frac{\omega}{2} \frac{1}{\rho_w \omega^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_R^{+\infty} \text{Im} \left(\bar{P} \frac{\partial P}{\partial z} \right) r dr. \quad (12)$$

В оболочке представим локальный вектор потока энергии выражением из [6]. Рассмотрим также интегральный поток — поток через сечение цилиндрической оболочки плоскостью, перпендикулярной ее образующей [12]. Единственная ненулевая компонента потока (именно эту компоненту будем, для краткости изложения, называть далее потоком энергии в оболочке) для случая осесимметричных колебаний имеет вид

$$Y_{cyl} = \frac{\omega}{2} \int_0^{2\pi} \text{Im}(\mathbf{F} \mathbf{u}^3, \mathbf{u}^3)_{\mathbb{C}^3} R d\varphi, \quad (13)$$

где $\mathbf{u}^3 = (u_z, u_n, -\tilde{\partial}_z u_n)^T$; $\mathbf{F} = \frac{\rho c^2}{R} \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_z & \nu & 0 \\ 0 & -\nu & -\tilde{\partial}_z \\ 0 & 0 & \nu - \tilde{\partial}_z^2 \end{pmatrix}$. Выражение под знаком интеграла содержит скалярное

произведение в \mathbb{C}^3 (то есть для произвольных векторов \mathbf{f} и \mathbf{g} из \mathbb{C}^3 по определению $(\mathbf{f}, \mathbf{g})_{\mathbb{C}^3} \equiv \sum_{j=1}^3 \overline{f_j} g_j$).

Эту ненулевую компоненту удобно представить в виде суммы составляющих потока энергии. Слагаемым с индексами $j = 1, 2, 3$ отвечают составляющие, порождаемые обобщенными силами [12]: продольной (индекс z), нормальной (индекс n) и связанной с обобщенным моментом (индекс m). Преобразуем формулу (13) с учетом сказанного:

$$Y_{cyl} = \Pi_z + \Pi_n + \Pi_m; \quad \left\{ \begin{matrix} \Pi_z \\ \Pi_n \\ \Pi_m \end{matrix} \right\} = -\pi R \omega \text{Im} \left\{ \begin{matrix} \overline{u_z} \tilde{\partial}_z u_z + \nu \overline{u_z} u_n \\ -\nu \overline{u_n} u_n + u_n \tilde{\partial}_z^2 \overline{u_n} \\ \tilde{\partial}_z \overline{u_n} (\nu \tilde{\partial}_z u_n - \tilde{\partial}_z^3 u_n) \end{matrix} \right\}. \quad (14)$$

5. Характер дисперсионных кривых при отсутствии в системе жидкости («сухая» оболочка)

В «сухой» оболочке давление $P = 0$, и уравнение (5) после подстановки туда решения

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_z \\ u_n \end{pmatrix} = A e^{i\lambda z} \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} \quad (15)$$

приобретает вид

$$\begin{pmatrix} w^2 - \tilde{\lambda}^2 & i v \tilde{\lambda} \\ -i v \tilde{\lambda} & w^2 - 1 - \alpha^2 - \alpha^2(2v\tilde{\lambda}^2 + \tilde{\lambda}^4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где $\tilde{\lambda} = \lambda R$. Соответствующее условие разрешимости (16) представляет собой полином третьего порядка относительно $\tilde{\lambda}^2$ с коэффициентами, зависящими от частоты w . Фиксируя ее, находим корни полинома $\tilde{\lambda}^2$ и тем самым получаем пары чисел $(w, \tilde{\lambda})$.

Рассмотрим дисперсионные кривые на плоскости, отвечающие парам с $w \geq 0$ и вещественным неотрицательным $\tilde{\lambda}$. Фактически реализуется случай не более двух таких кривых, что отвечает двум типам волн в оболочке (Рис. 2, кривые *B* и *C*). При этом каждому значению частоты соответствует хотя бы одна распространяющаяся волна, и это видно из системы (16), решением которой является пара $w = 0, \tilde{\lambda} = 0$.

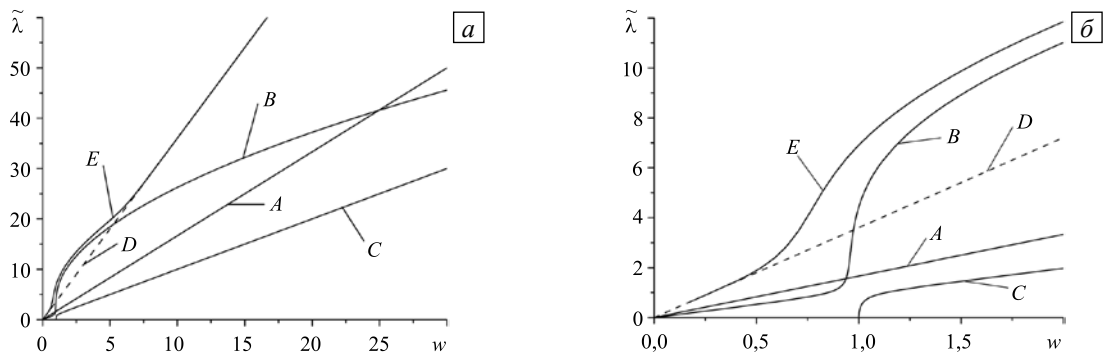


Рис. 2. Дисперсионные кривые волн в оболочке без жидкости и поверхностных волн в жидкости при $c^* = 3,6$; $h^* = 0,05$; на фрагменте (б) начальные участки кривых показаны в более подробном масштабе

Остановимся на характере дисперсионных кривых *B* и *C* подробнее (остальные кривые будут обсуждаться в последующих разделах). Рассмотрим зарождение волн, которое связывается со значением $\tilde{\lambda} = 0$. Полагая в дисперсионном уравнении $\tilde{\lambda} = 0$, находим два корня — $w = 0$ и $w = \sqrt{1 + \alpha^2}$, которые отвечают частотам зарождения кривых *B* и *C*. Важно, что в (16) для компонент собственных векторов выполнены соотношения

$$\zeta/\xi = i\tilde{\lambda}v / \left[w^2 - 1 - \alpha^2 - \alpha^2(2v\tilde{\lambda}^2 + \tilde{\lambda}^4) \right], \quad (17)$$

$$\zeta/\xi = -i\tilde{\lambda}v / \left(w^2 - \tilde{\lambda}^2 \right), \quad (18)$$

которые следуют, соответственно, из второго и первого уравнений системы (16). При $w \rightarrow 0$ и $\tilde{\lambda} \rightarrow 0$ из (17) получаем $\zeta/\xi \sim i\tilde{\lambda}v / (-1 - \alpha^2) \rightarrow 0$, то есть $\xi \gg \zeta$, что означает доминирование продольной компоненты вектора смещения (и, как видно из формулы (14), доминирование продольной составляющей потока энергии), а при $w \rightarrow \sqrt{1 + \alpha^2}$ и $\tilde{\lambda} \rightarrow 0$ из (18) вытекает $\zeta/\xi \sim -i\tilde{\lambda}v / (1 + \alpha^2) \rightarrow 0$, то есть $\xi \ll \zeta$, что, в свою очередь, указывает на преобладание изгибной компоненты вектора смещения. Таким образом, при малых $\tilde{\lambda}$ кривая *B* соответствует продольным колебаниям оболочки, а кривая *C* — изгибным. В дальнейшем, с ростом $\tilde{\lambda}$, характер кривых *B* и *C* меняется (см. следующий раздел).

Заметим, что дисперсионное уравнение, соответствующее системе (16), исследовалось в [5] при других значениях параметров. Здесь проводится более подробный его анализ для сравнения со случаем присутствия в исследуемой системе жидкости.

6. Численные результаты

При расчете представленных далее графических зависимостей (если это специально не оговаривается) значения характеристик элементов системы оболочка – жидкость взяты следующие: для стали

$\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$, $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$, $\nu = 0,28$; для воды $\rho_w = 1000 \text{ кг/м}^3$, $c = 1500 \text{ м/с}$. На всех графиках по оси абсцисс отложена безразмерная частота $w = \omega R/c_s$. Будут рассмотрены графики двух типов: зависимость безразмерных волновых чисел $\tilde{\lambda} = \lambda R$ от w и зависимость безразмерных потоков энергии Υ от w .

6.1. Случай «сухой» оболочки

На рисунке 2 «сухой» оболочке» отвечают дисперсионные кривые A, B, C , при этом кривые B, C соответствуют случаю, когда отсутствуют вращательные движения оболочки, а прямая A — случаю, когда имеют место только вращательные движения. Эта прямая описывается выражением (11). В силу того, что названные задачи независимы, наблюдаемое пересечение дисперсионных кривых A и B на рисунке 2 не является неожиданным. Такое поведение типично для случая невзаимодействующих элементов системы. В то же время наблюдается кажущееся пересечение (квазипересечение) дисперсионных кривых B и C (смена форм колебаний) вблизи частоты $w \approx 1$ (которую для краткости назовем частотой квазипересечения) (Рис. 2, б), что согласуется с обменом энергией между компонентами вектора смещения оболочки в решении Задачи 1.

Подробнее остановимся на этом эффекте. Обе кривые (B и C) отражают смешанный характер колебаний оболочки. Тем не менее, кривая B стартует (частота зарождения $w = 0$) преимущественно с продольных колебаний, а кривая C (частота зарождения $w = \sqrt{1 + \alpha^2} \equiv w_0 \approx 1,0$ при выбранном α) — преимущественно с нормальных колебаний, как отмечено в разделе 4. После частоты квазипересечения характер колебаний кривых B и C меняется. Этот факт иллюстрируют графики продольной (Π_z), нормальной (Π_n) и моментной (Π_m) составляющих потока энергии в оболочке (14), нормированных на ее полный поток энергии Υ_{cyl} . На рисунке 3 составляющие потоки изображены в случае распространения волны с волновым числом, отвечающим дисперсионным веткам B и C (их нормированные продольные, нормальные и моментные величины обозначены, соответственно, как B_z, B_N, B_M и C_z, C_N, C_M).

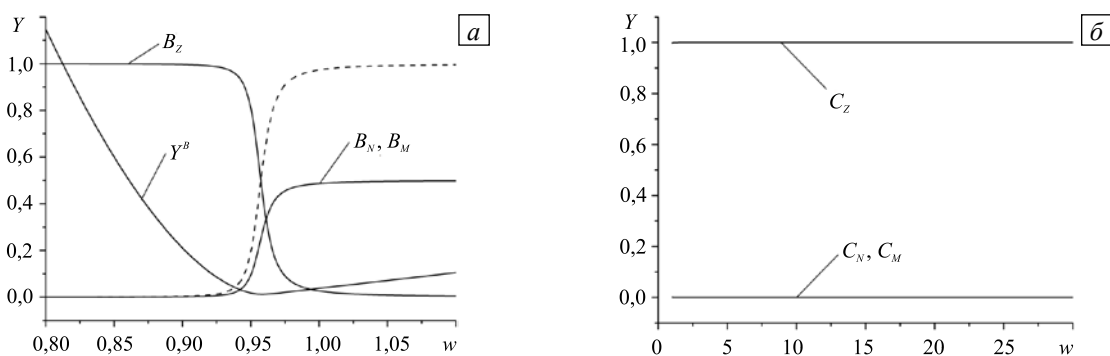


Рис. 3. Потоки энергии в «сухой» оболочке, переносимые составляющими потока энергии; дисперсионные ветки B (а) и C (б)

Пунктирная кривая на рисунке 3, а отвечает сумме изгибной и моментной составляющих (на рисунке кривые B_N и B_M визуально неразличимы). Как видно, в достаточно узком диапазоне частот ($0,9 < w < 1,1$) происходит радикальная смена характера колебаний оболочки (см. на характер кривых B и C). После частоты квазипересечения практически вся энергия волны из дисперсионной кривой B переносится теперь изгибной компонентой вектора потока энергии, а энергия волны из дисперсионной кривой C — его продольной компонентой. Заметим, что хотя началу кривой C , согласно выражению (18), действительно соответствует изгибный характер колебаний, он очень быстро меняется на продольный, поэтому на рисунке 3, б этот участок перестройки потоков почти не заметен. Из-за потери точности вычислений в малой окрестности точки квазипересечения численно прослеживается только тенденция к такой перестройке.

Для удобства анализа потоков энергии введем величину, имеющую размерность интегрального потока энергии $\Pi_0 = |A|^2 \omega r c^2$. Полный поток энергии в оболочке Υ^B , порожденный волной из дисперсионной кривой B , в нормированном на Π_0 виде представлен на рисунке 3, а кривой Y^B . Он имеет характерный минимум, близкий к нулю на частоте зарождения дисперсионной кривой C . Оболочка «тратит энергию» на внутреннюю перестройку, а не на излучение.

Другое указание на смену характера колебаний в окрестности точки квазипересечения можно получить, анализируя на рисунках 2, *a*, *б* зависимость дисперсионных кривых *A, B, C* от относительной толщины оболочки h^* . На всю ветвь *C* (см. Рис. 4), а также на начальный участок ветви *B* (до точки квазипересечения) (Рис. 4, *б*) практически не влияет замена одного значения h^* на другое (сплошная и пунктирные линии на этих участках неразличимы). Факт независимости скорости продольных колебаний пластины от ее относительной толщины хорошо известен [17, 19]. Здесь же на продольные колебания оболочки косвенно указывает характер поведения дисперсионной кривой, образованной началом (до точки квазипересечения) дисперсионной кривой *B* и продолжением кривой *C* после точки квазипересечения.

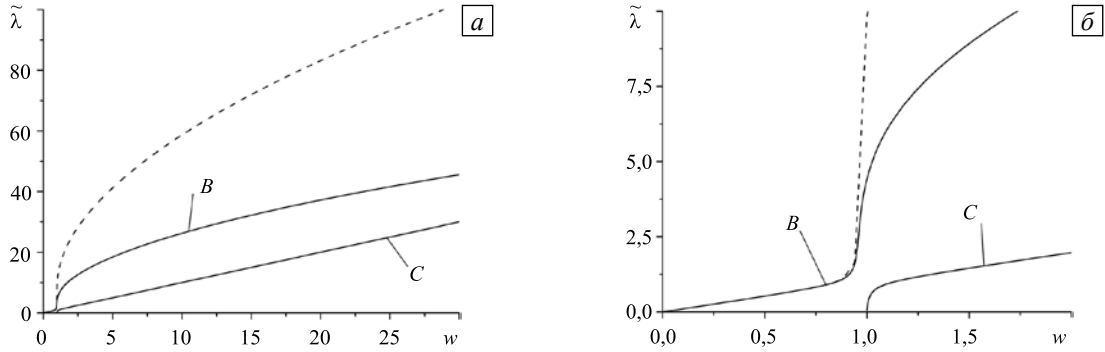


Рис. 4. Дисперсионные кривые «сухой» оболочки для разных относительных толщин h^* (*a*): 0,05 (сплошные линии), 0,01 (пунктирные линии); на фрагменте (*б*) более подробно показан начальный участок

6.2. Влияние жидкости

Теперь проанализируем влияние жидкости на колебания оболочки при тех же исходных параметрах: $c^* = 3,6$ (сталь – вода) и $h^* = 0,05$. Дисперсионная кривая *E* на рисунке 2 определяется уравнением (10). Она целиком лежит выше прямой *D* ($\lambda = k$), асимптотически приближаясь к ней на низких и высоких частотах (прямая *D* изображает зависимость волнового числа от частоты для акустических волн в безграничной жидкости, распространяющихся без дисперсии). В области $\lambda > k$ соответствующая поверхностная волна в жидкости не излучает в глубину, благодаря чему волна в оболочке распространяется без затухания. Второй вещественный корень λ , соответствующий «сухой» оболочке и порождающий дисперсионную кривую *C* (см. Рис. 2), становится комплексным для выбранных параметров системы оболочка – жидкость. Это означает, что скорость распространения соответствующей волны в оболочке становится больше, чем скорость волны в жидкости, и поверхностная волна начинает излучать вглубь жидкости. Поэтому в данном случае для оболочки в жидкости остается одна дисперсионная ветка. Однако для других соотношений скоростей в системе оболочка – жидкость возможно увеличение количества дисперсионных кривых.

Для иллюстрации проведем небольшой численный эксперимент, заменив сталь гипотетическим материалом с другими значениями $c^* = c_s/c$. На рисунке 5, *a* показаны дисперсионные кривые 1, 2, 3, *E* для оболочки в жидкости при соответствующих значениях безразмерной скорости: $c^* = 9,6; 6,6; 3,6; 0,3$. Приблизительно можно сказать, что при значении параметра $c^* > 1$ реализуется одна дисперсионная ветка,

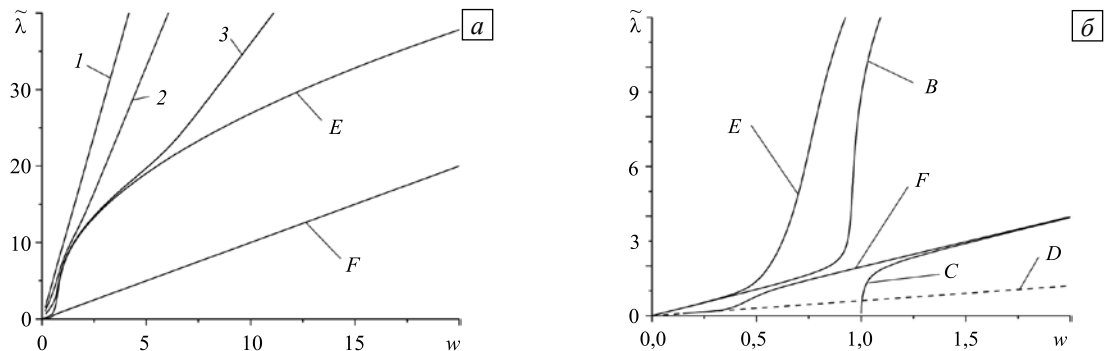


Рис. 5. Дисперсионные кривые оболочки из гипотетического материала при разных относительных скоростях c^* (*a*): 9,6 (кривая 1); 6,6 (2); 3,6 (3); 0,3 (*E, F*); на фрагменте (*б*) более подробно показан начальный участок при $c^* = 0,3$

а при значении параметра $c^* < 1$ — уже две дисперсионные ветки (кривые E и F). На рисунке 5, a они показаны для $c^* = 0,3$. На рисунке 5, b эти же кривые E и F размещены на фоне дисперсионных веток «сухой» оболочки (кривые B, C). С уменьшением значения c^* роль оболочки как волновода возрастает, и кривые E, F стремятся к соответствующим дисперсионным кривым B, C «сухой» оболочки, причем сверху. В этом проявляется тормозящее влияние присоединенной массы жидкости: волны в оболочке начинают распространяться медленнее; волновое число λ , как величина обратная скорости, увеличивается, и поэтому кривая E остается выше дисперсионной кривой B , а кривая F — выше C .

Для дальнейшего анализа составляющие потока энергии в оболочке Y_{cyl} (14) удобно нормировать на полный поток системы: $Y_{cyl} + Y_{liq}$. Так, на рисунках 6 и 7 изображены графики нормированных составляющих потока энергии в оболочке, окруженной жидкостью, переносимые бегущей волной при различных характерных значениях параметра c^* . При исходных параметрах системы сталь – жидкость (то есть при $c^* = 3,6$) имеется только одна ветвь 3 дисперсионной кривой (рисунк 5, a). В этом случае основная энергия сосредоточена в изгибной (кривая E_N) и моментной (кривая E_M) составляющей потока энергии (рисунк 6, a) (на рисунке эти кривые совпадают). Сумма всех трех составляющих дает нормированный поток энергии в оболочке: $Y_{cyl}^* \equiv Y_{cyl} / (Y_{cyl} + Y_{liq})$; ему отвечает кривая E_Σ . Однако с уменьшением параметра c^* ($c^* = 0,3$, Рис. 6, b) доминирующим волноводом становится оболочка.

Сначала рассмотрим потоки энергии, порожденные волной из дисперсионной ветки E (Рис. 5, a). Именно характер ее продольных низкочастотных колебаний (как и у «сухой» оболочки до частоты квазипересечения, см. кривую B_Z , Рис. 3, a) определяет рост вклада продольной составляющей потока энергии. При этом поток энергии в оболочке Y_{cyl} (нормированный на Π_0), описываемый кривой Y_{cyl} , и нормированный поток энергии в оболочке Y_{cyl}^* (кривая E_Σ) образуют характерный узкий провал за счет увеличения вклада на низкой частоте. Минимум провала смещен в область более низких частот, чем у «сухой» оболочки (см. кривую Y^B , Рис. 3, a) вследствие тормозящего влияния присоединенной массы воды, уменьшающей скорость, и, следовательно, волновые числа волны в оболочке. Заметим, что этот провал соответствует смене доминирующих форм колебаний. Более подробный анализ показывает, что наряду с уменьшением потока энергии по оболочке происходит и уменьшение его

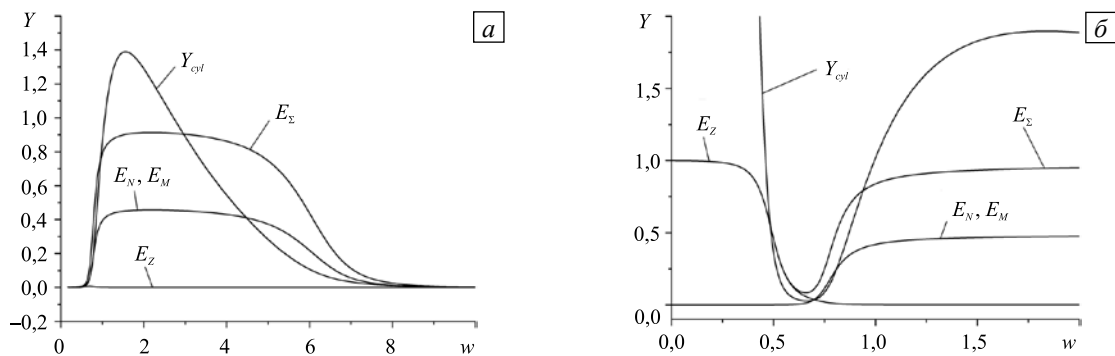


Рис. 6. Поток энергии волны из дисперсионной ветки E и его составляющие в оболочке, окруженной жидкостью при разных относительных скоростях c^* : 3,6 (a) и 0,3 (b)

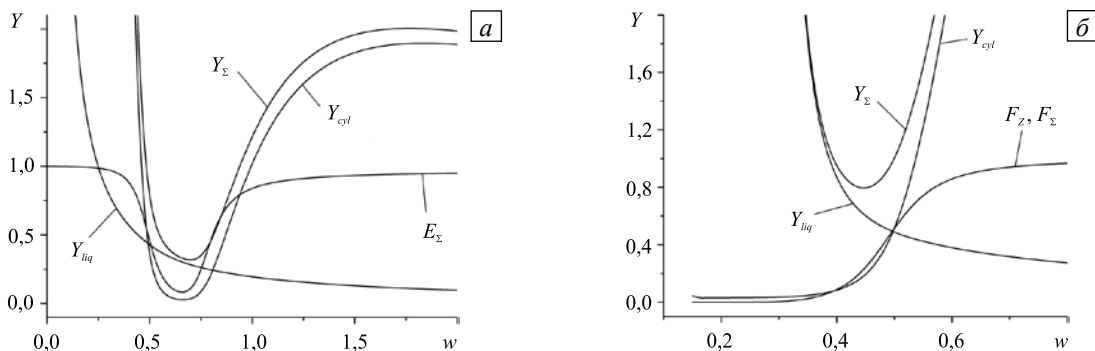


Рис. 7. Поток энергии и его составляющие в оболочке, окруженной жидкостью, для волны из дисперсионной ветки E (a) и для волны из дисперсионной ветки F (b); $c^* = 0,3$

по жидкости (на рисунке 7, *a* кривая Y_{liq} описывает поток энергии в жидкости Y_{liq} , нормированный на Π_0), так что и суммарный поток по оболочке и жидкости, нормированный на Π_0 (кривая Y_Σ), имеет минимум в этой области.

Теперь рассмотрим потоки энергии, порожденные волной из дисперсионной ветки F (Рис. 5, *a*), возникшей при тех же значениях параметра $c^* = 0,3$. В нормированном интегральном потоке энергии в оболочке (см. кривую F_Σ , Рис. 7, *b*) доминирует продольная составляющая потока энергии (кривая F_Z), что соответствует характеру ветки C «сухой» оболочки (Рис. 5, *b*). Но при этом дисперсионная кривая F для оболочки в жидкости смещена в область более низких частот, чем ветка C «сухой» оболочки, что связано с влиянием присоединенной массы жидкости.

Зависимость интегральных потоков энергии волн по оболочке из дисперсионной кривой E от относительной скорости c^* характеризуют графики на рисунке 8, *a*. Наблюдается уменьшение интегральных потоков энергии этих волн с ростом относительной скорости c^* (см. кривые 1–5, соответствующие $c^* = 0,3; 1,0; 1,3; 6,0; 8,0$), что свидетельствует об увеличении роли жидкости в системе как в волноводе. Для волн из дисперсионной кривой F эта зависимость также имеет место, но выражается заметно слабее (см. кривые 1–3, соответствующие $c^* = 0,3; 0,6; 0,9$, Рис. 8, *b*), что связано с меньшей зависимостью продольных колебаний оболочки от влияния присоединенной массы жидкости по сравнению с зависимостью от ее влияния изгибных колебаний.

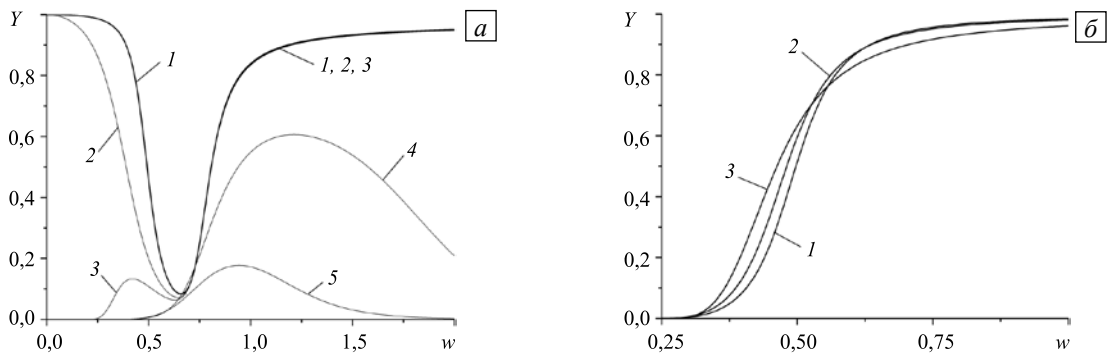


Рис. 8. Суммарные потоки энергии в оболочке, окруженной жидкостью, в зависимости от c^* : при волнах из дисперсионной ветки E (*a*); при волнах из дисперсионной ветки F (*b*)

Характер кривых на рисунках можно объяснить следующим образом. Фактически в системе есть два контактирующих и «конкурирующих за энергию» волновода: оболочка и жидкость. В грубом приближении — это аналог двухслойной среды, в которой поток энергии стремится «уйти» из слоя с большими скоростями распространения волн в слой с меньшими скоростями волн. Наиболее отчетливо это видно, когда во всем диапазоне частот скорость звука в жидкости меньше, чем скорости волн в «сухой» оболочке (при выбранных параметрах модели случай $c^* > 4$). При этом поток в оболочке быстро убывает с ростом c^* (Рис. 8, *a*). При меньших c^* , на промежуточных частотах, возможна ситуация, когда скорость волны в «сухой» оболочке, становится меньше скорости звука в жидкости (кривая B идет выше кривой D , см. Рис. 2), поэтому на этих частотах роль оболочки как канала распространения энергии возрастает. На графиках (см. Рис. 6) об этом говорит явно выраженный «куполообразный» вид потока энергии, согласующийся с формой дисперсионной кривой E в промежуточной области частот (см. Рис. 2, *a*).

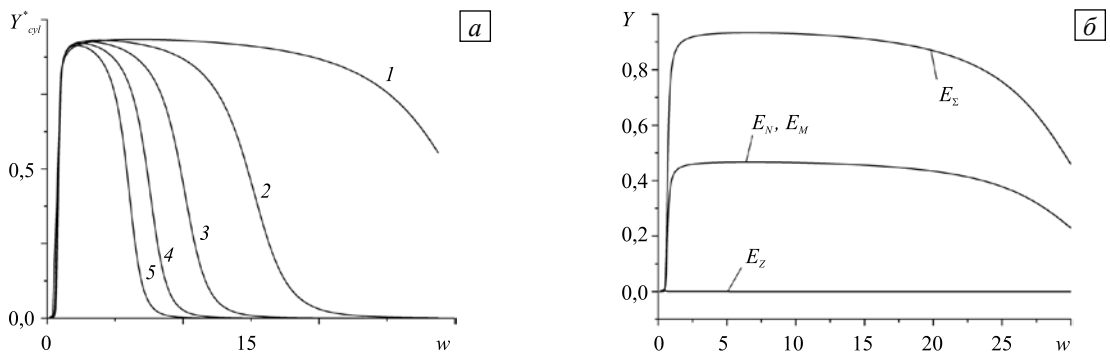


Рис. 9. Потоки энергии в оболочке: интегральные при различных h^* (*a*) и компоненты потока энергии при $h^* = 0,01$ (*b*)

Аналогичная картина наблюдается и на рисунке 9 при изменении относительной толщины оболочки h^* . Приведенные здесь кривые 1–5 описывают нормированные потоки энергии в оболочке, соответствующие относительным толщинам $h^* = 0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05$. С уменьшением h^* оболочка становится мягче, и поток энергии опять-таки стремится уйти в эту более «податливую» среду. В промежуточном диапазоне частот ($0,5 < \omega < 7$) волновое число поверхностной волны можно рассматривать как возмущенное волновое число «сухой» оболочки, поэтому и различаются эти числа незначительно (см. кривые B, E , Рис. 2). Вне этого диапазона частот разность между ними увеличивается. Это вызвано тем, что скорость волны в «сухой» оболочке становится заметно выше и скорости поверхностной волны, и скорости звука в жидкости, что в свою очередь ведет к тому, что оболочка на больших частотах как канал распространения энергии уступает жидкости и слабо влияет на распространение энергии в системе оболочка – жидкость. Поэтому на больших частотах волновое число поверхностной волны λ можно рассматривать в качестве возмущенного волнового числа в жидкости k .

7. Заключение

В статье обсуждаются энергетические аспекты распространения осесимметрических волн в системе цилиндрическая оболочка – жидкость. Такие колебания могут возникать, например, при осесимметричных нагрузках на сечениях или торцах цилиндрических оболочек или быть составляющей частью всех колебаний, имеющих место в стационарных и нестационарных задачах. Разумеется, в большинстве случаев для реальных конструкций требуется учет всех типов колебаний; тем не менее в рамках используемой модели, осесимметричные колебания как составляющая часть всех колебаний достойны отдельного рассмотрения.

Проведено сравнение долей энергии, переносимых различными компонентами потока энергии в оболочке, а также сравнение долей энергии, распространяемых по оболочке и жидкости двумя типами волн, порожденными волнами из двух дисперсионных кривых оболочки.

С энергетической точки зрения анализируется смена форм колебаний вблизи точки квазипересечения дисперсионных кривых. Полученные картины продольных и изгибных компонент потоков энергии позволяют увидеть, какая из колебательных мод (продольная или изгибная) является доминирующей на данном частотном диапазоне, чего зачастую не позволяет сделать анализ профилей обобщенных смещений и сил.

Анализ потоков энергии в этой и других более сложных составных моделях может помочь в прогнозировании поведения реальных конструкций, способствовать выявлению их «слабых» мест.

Автор выражает искреннюю признательность профессору Д.П. Коузову за полезное обсуждение и конструктивные замечания.

Литература

1. Елисеев В.В., Зиновьева Т.В. Нелинейно-упругая деформация подводного трубопровода в процессе укладки // Вычисл. мех. сплош сред. – 2012. – Т. 5, № 1. – С. 70-78. [DOI](#)
2. Kwak M.K. Free vibration analysis of a finite circular cylindrical shell in contact with unbounded external fluid // J. Fluid. Struct. – 2010. – V. 26, N. 3. – P. 377-392. [DOI](#)
3. Warburton G.B. Vibration of a cylindrical shell in an acoustic medium // J. Mech. Eng. Sci. – 1961. – V. 3, N. 1. – P. 69-79. [DOI](#)
4. Filippenko G.V., Kouzov D.P. Boundary-contact problems of acoustics. The review of last results // 7th Int. Symp. “Transport Noise and Vibration”, St.-Petersburg, Russia, June 8-10, 2004. – CD format, 2004. – Paper pl-08. – 13 p.
5. Зиновьева Т.В. Дисперсия волн в цилиндрической оболочке // Научно-технические ведомости СПбГПУ. – 2007. – № 52-1. – С. 53-58.
6. Filippenko G.V. Statement of the boundary-contact problems for the shells in acoustics // Proc. of the Int. Conf. “Days on Diffraction 2010”, St.-Petersburg, Russia, June 8-10, 2010. – P. 57-626.
7. Filippenko G.V. The forced oscillations of the cylindrical shell partially submerged into a layer of liquid // Proc. of the Int. Conf. “Days on Diffraction 2012”, St.-Petersburg, Russia, May 28-June 1, 2012. – P. 70-75.
8. Елисеев В.В. Механика упругих тел. – СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. – 336 с.
9. Еремеев В.А., Зубов Л.М. Механика упругих оболочек. – М.: Наука, 2008. – 280 с.
10. Вешев В.А., Коузов Д.П., Миролюбова Н.А. О противонаправленных потоках энергии нормальных волн, распространяющихся в тонкостенных волноводах // Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем: Тр. XXIV летней школы-семинара. – СПб: Изд-во ИПМаш РАН, 1997. – С. 71-78.
11. Вешев В.А., Коузов Д.П., Миролюбова Н.А. Потоки энергии и дисперсия нормальных волн изгибного типа в балке крестообразного профиля // Акустический журнал. – 1999. – Т. 45, № 3. – С. 331-337.
12. Filippenko G.V. The energy analysis of shell-fluid interaction // Proc. of the Int. Conf. “Days on Diffraction 2011”, St.-Petersburg, Russia, May 30-June 3, 2011. – P. 63-66.

13. Kim J.-D., Hong S.-Y., Kwon H.-W., Song J.-H. Energy flow model considering near field energy for predictions of acoustic energy in low damping medium // Sound Vib. – 2011. – V. 330, N. 2. – P. 271-286. [DOI](#)
14. Guasch O., Aragonès À. Finding the dominant energy transmission paths in statistical energy analysis // Sound Vib. – 2011. – V. 330, N. 10. – P. 2325-2338. [DOI](#)
15. Wu D., Qiu Z.P. Comparison of two non-probabilistic approaches for the energy flow uncertainty in structural vibrating system // Sound Vib. – 2011. – V. 330, N. 11. – P. 2520-2535. [DOI](#)
16. Guyomar D., Lallart M., Petit L., Wang X.-J. Impact localization and energy quantification based on the power flow: A low-power requirement approach // Sound Vib. – 2011. – V. 330, N. 13. – P. 3270-3283. [DOI](#)
17. Коузов Д.П., Миролюбова Н.А. Локальные потоки энергии вынужденных колебаний тонкой упругой полосы // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2012. – Т. 5, № 4. – С. 397-404. [DOI](#)
18. Филиппенко Г.В. Колебания трубопроводов и тонкостенных опор гидротехнических сооружений, погруженных в жидкость // Современное машиностроение. Наука и образование: Материалы 2-й Междунар. науч.-практ. конференции. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. – С. 769-778.
19. Лямшев Л.Н. Дифракция звука на тонкой ограниченной пластине в жидкости // Акустический журнал. – 1955. – Т. 1, № 2. – С. 138-143.

Поступила в редакцию 31.10.12; опубликована в электронном виде 15.07.13