

DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.2.21

УДК 539.374

## О ДИНАМИКЕ МИКРОПОРЫ В НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ В УСЛОВИЯХ АКТИВНОГО НАГРУЖЕНИЯ И ПОСЛЕДУЮЩЕЙ РАЗГРУЗКИ

Л.В. Ковтанюк<sup>1</sup>, Е.В. Мурашкин<sup>1</sup>, А.А. Роговой<sup>2</sup><sup>1</sup>Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, Владивосток, Россия<sup>2</sup>Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

В рамках теории больших деформаций приведено решение одномерной краевой задачи определения НДС материала с упругими, вязкими и пластическими свойствами в окрестности одиночного сферического дефекта сплошности при нагрузке и последующей разгрузке. Установлена закономерность продвижения упругопластической границы, приведены расчетные уровни и распределение остаточных напряжений. Указаны условия возникновения повторного пластического течения в процессе разгрузки.

*Ключевые слова:* упругость, пластичность, вязкость, остаточные напряжения, большие деформации, дефект сплошности

## ON THE DYNAMICS OF MICROPORES IN INCOMPRESSIBLE VISCOELASTOPLASTIC MEDIA UNDER ACTIVE LOADING AND SUBSEQUENT UNLOADING

L.V. Kovtanyuk<sup>1</sup>, E.V. Murashkin<sup>1</sup> and A.A. Rogovoy<sup>2</sup><sup>1</sup> Institute of Automation and Control Processes FEB RAS, Vladivostok, Russia<sup>2</sup> Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

In the framework of the theory of large deformations, the solution of one-dimensional boundary-value problem of determining the stress-strain state of the material with elastic, viscous and plastic properties in the vicinity of a single spherical continuity defect under loading and subsequent unloading is obtained. Constitutive relations governing the motion of an elastic-plastic boundary are determined. The level and distribution of residual stresses are calculated. Conditions for the occurrence of a secondary plastic flow during unloading are presented.

*Key words:* elasticity, plasticity, viscosity, residual stresses, large deformations, continuity defect

### 1. Введение

Одномерная задача деформирования и течения сплошной среды в окрестности одиночной поры (газонаполненного пузырька, каверны) является классической задачей механики, постановка которой для случая несжимаемой жидкости осуществлена еще Рэлеем [1]. В случае упругопластических сред данная задача также рассматривалась неоднократно [2–4] и уже является достоянием учебников [5, 6]. Полученные решения использовались в многочисленных приложениях.

Много позже экспериментально обнаружен эффект значительного (в несколько раз) повышения длительной прочности металлоизделий при предварительной обработке материала, из которого они затем изготавливаются, высоким гидростатическим давлением [7, 8]. Стальной образец помещался в алюминиевый кожух (контейнер Горелова), закреплялся в нем и помещался в печь. Значительный уровень гидростатического давления достигался за счет разницы в коэффициентах линейного расширения стали (образца) и алюминия (кожуха). Повышение усталостной прочности материала связывалось с залечиванием в нем микродефектов (микротрещин, микропор). Позднее этот эффект всесторонне изучался с предложением иных технологий упрочнения металлоизделий вследствие залечивания микродефектов [9–11].

Очевидно, что залечивание обусловлено накоплением необратимых деформаций в окрестности микродефектов. Эти деформации, с точки зрения феноменологической механики, вызываются диссипативным механизмом деформирования, который проявляется в пластических и вязких свойствах (ползучести) материалов. Необратимые деформации пластичности и ползучести различаются лишь механизмом их накопления. Пренебрежение вязкостью конкретных материалов приводит к приспособляемости одиночного дефекта к циклическому нагружению по типу «нагрузка–разгрузка» [12, 13]. В этом случае размеры дефекта, как и распределение остаточных напряжений в его окрестности, остаются неизменными после каждой разгрузки: никакого залечивания не происходит. Учет же вязкости в условиях пластического течения материала, как было показано авторами ранее [14], приводит к развитию дефекта; его размеры растут с каждой разгрузкой. Таким образом, при моделировании залечивания дефекта необходимо учитывать реологические свойства материалов на стадиях, предвещающих пластическое течение, и при разгрузке. С целью подтверждения возможности этого механизма

уменьшения размеров дефекта в статье рассматривается простейшая задача теории больших вязкоупругопластических деформаций, когда связь между напряжениями и деформациями (скоростями деформаций) описывается простейшей линейной зависимостью. Ясно, что при этом не удастся составить замкнутую модель процесса именно залечивания, но численно-аналитическое решение — единственный путь для получения ответа на главный вопрос: приводит ли данный реологический механизм к уменьшению размеров дефекта после разгрузки. Следует заметить, что современная вычислительная математика, включая численные исследования с применением всех известных пакетов прикладных программ, такой возможности не предоставляет. Тем более что полученное, по существу точное решение имеет самостоятельную ценность.

## 2. Основные соотношения модели

Для решения задачи динамики сферического дефекта сплошности воспользуемся моделью больших упругопластических деформаций [3, 4], обобщенной на случай учета вязких свойств материалов [5]. В декартовой системе координат уравнения изменения (переноса) компонент тензоров обратимых ( $e_{ij}$ ) и необратимых ( $p_{ij}$ ) деформаций в пространственных координатах Эйлера  $x_m$  записываются в форме

$$\begin{aligned} \frac{De_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{2}((\varepsilon_{ik} - \varepsilon_{ik}^p + z_{ik})e_{kj} + e_{ik}(\varepsilon_{kj} - \varepsilon_{kj}^p - z_{kj})), \\ \frac{Dp_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij}^p - p_{ik}\varepsilon_{kj}^p - \varepsilon_{ik}^p p_{kj}, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj}$ ,  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$ ,  $r_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) + z_{ij}(e_{sk}, \varepsilon_{sk}) = w_{ij} + z_{ij}$ ,  $v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,m}v_m$ ,  $u_{i,m} = \frac{\partial u_i}{\partial x_m}$ . Здесь:  $u_i$ ,  $v_j$  — компоненты векторов перемещений и скоростей точек среды;  $\varepsilon_{ij}^p$  (источник в уравнении изменения тензора пластических деформаций) — компоненты тензора скоростей пластических деформаций; наличие нелинейной составляющей  $z_{ij}$  (в работах [3, 4] ее выражение приведено полностью) в компонентах тензора вращений  $r_{ij}$  связано с требованием неизменности тензора необратимых деформаций в процессах разгрузки ( $\varepsilon_{ij}^p = 0$ ); полагается, что компоненты тензора необратимых деформаций  $p_{ij}$  ведут себя так же, как при жестком перемещении тела. Выполнение данного требования и использование законов термодинамики приводят к необходимости использования объективной производной  $D/Dt$ , которая в соотношениях (1) записана для компонент произвольного тензора  $n_{ij}$ .

Следствием уравнений переноса (1) является следующее представление компонент тензора полных деформаций Альманси  $d_{ij}$  через компоненты тензоров  $e_{ij}$  и  $p_{ij}$ :

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{km}e_{mj}. \tag{2}$$

Материал в дальнейшем считаем несжимаемым вязкоупругим, то есть вязкие свойства среды будем учитывать на стадии, предвещающей пластическое течение, или на стадии разгрузки. Примем, что в областях обратимого деформирования справедливы определяющие соотношения

$$\tau_{ij} + \xi_1 \frac{D\tau_{ij}}{Dt} = 2\mu q_{ij} + 2\xi_2 \varepsilon_{ij}, \quad \tau_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}, \quad q_{ij} = d_{ij} - \frac{1}{3}d_{kk}\delta_{ij}. \tag{3}$$

Здесь:  $\xi_1, \xi_2$  — постоянные материала;  $\mu$  — модуль сдвига;  $D/Dt$  — оператор производной Яуманна  $\left(\frac{D\tau_{ij}}{Dt} = \frac{d\tau_{ij}}{dt} - w_{ik}\tau_{kj} + w_{ik}\tau_{kj}\right)$ . Для областей с накопленными необратимыми деформациями зависимости (3) переписуются в форме

$$\tau_{ij} + \xi_1 \frac{D\tau_{ij}}{Dt} = 2\mu l_{ij} + 2\xi_2 \varepsilon_{ij}, \quad l_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{2}e_{is}e_{sj} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij} + \frac{1}{6}e_{sk}e_{ks}\delta_{ij}. \tag{4}$$

Соотношения (3) являются предельными для выражений (4) при стремлении к нулю необратимых деформаций в (2).

В качестве пластического потенциала далее используется условие пластичности Мизеса

$$\tau_{ij}\tau_{ji} = 8k^2/3, \quad (5)$$

где  $k$  — предел текучести материала. Скорости необратимых деформаций  $\varepsilon_{ij}^p$  связаны с напряжениями ассоциированным законом пластического течения:  $\varepsilon_{ij}^p = \lambda \partial f / \partial \sigma_{ij}$ ,  $f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = k$ ,  $\lambda > 0$ .

### 3. Постановка задачи. Начальные условия пластического течения

Полагаем, что дефект сплошности представляет собой сферическую микропору радиусом  $r = r_0$ , а внешнее граничное воздействие  $p(t)$  создается на удаленной от дефекта сферической поверхности с первоначальным радиусом  $R_0$  ( $R_0 \gg r_0$ ):

$$\sigma_{rr} \Big|_{r=R} = -p(t). \quad (6)$$

В (6)  $R = R(t)$  — радиус внешней сферической поверхности в текущий момент времени,  $\sigma_{rr}$  — радиальная компонента тензора напряжений в сферической системе координат  $Or\varphi\theta$ . Текущую граничную поверхность дефекта сплошности  $s = s(t)$  считаем свободной от напряжений

$$\sigma_{rr} \Big|_{r=s} = 0. \quad (7)$$

Таким образом, единственная отличная от нуля компонента вектора перемещений  $u = u_r$  на граничных поверхностях  $r = R(t)$  и  $r = s(t)$  представляется в виде:  $u(R(t)) = R(t) - R_0$  и  $u(s(t)) = s(t) - r_0$ .

Полагаем, что материал деформируется вязкоупруго до достижения функцией  $p(t)$  своего порогового значения  $p(t_0) = p_0$ . Время  $t = t_0$  считаем моментом начала пластического течения. Рассмотрим напряженно-деформированное состояние в промежутке времени  $0 \leq t \leq t_0$ . Условие несжимаемости материала в случае сферической симметрии, имеющее вид  $(1-u')(1-u/r)^2 = 1$ , позволяет определить кинематику среды с точностью до неизвестной функции  $\varphi(t)$  (или  $R(t)$ , или  $s(t)$ ):  $u = r - \sqrt[3]{r^3 + \varphi(t)}$ ,  $\varphi(t) = R_0^3 - R^3(t) = r_0^3 - s^3(t)$ . Тогда для отличных от нуля компонент тензора деформаций Альманси имеем:

$$d_{rr} = \frac{1}{2}(1 - H^{-4/3}), \quad d_{\varphi\varphi} = d_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}(1 - H^{2/3}), \quad (8)$$

где  $H = 1 + \frac{\varphi}{r^3}$ , а компонента скорости точек среды  $v = v_r$  запишется как

$$v = v_r = \frac{\partial u}{\partial t} (1 - u_{,r})^{-1} = -\frac{\dot{\varphi}(t)}{3r^2}, \quad \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (9)$$

С учетом кинематических зависимостей (8), (9) из равенств (3) следуют уравнения

$$\begin{aligned} \tau_{rr} + \xi_1 \left( \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial t} - \frac{\dot{\varphi}}{3r^2} \tau_{rr,r} \right) &= \frac{2\mu}{3} (H^{2/3} - H^{-4/3}) + \xi_2 \frac{4\dot{\varphi}}{3r^3}, \\ \tau_{\varphi\varphi} + \xi_1 \left( \frac{\partial \tau_{\varphi\varphi}}{\partial t} - \frac{\dot{\varphi}}{3r^2} \tau_{\varphi\varphi,r} \right) &= \frac{\mu}{3} (H^{-4/3} - H^{2/3}) - \xi_2 \frac{2\dot{\varphi}}{3r^3}. \end{aligned} \quad (10)$$

Разложение величины  $H^{2/3} - H^{-4/3}$  в ряд имеет вид:

$$A(H) = H^{2/3} - H^{-4/3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^{(n)}(0)}{n!} \frac{\varphi^n}{r^{3n}}. \tag{11}$$

Примем для функций  $\tau_{rr}(r, t)$  и  $\tau_{\theta\theta}(r, t)$  аналогичные представления:

$$\tau_{rr} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(t)}{n! r^{3n}}, \quad \tau_{\theta\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(t)}{n! r^{3n}}, \tag{12}$$

где  $a_n(t)$  и  $b_n(t)$  — неизвестные функции. Подстановка выражений (11) и (12) в систему дифференциальных уравнений в частных производных (10) приводит к новой системе:

$$\begin{cases} Q(a_n) - \xi_2 \frac{4\dot{\varphi}}{3r^3} - \frac{2\mu}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^{(n)}(0)}{n!} \frac{\varphi^n}{r^{3n}} = 0, \\ Q(b_n) + \xi_2 \frac{2\dot{\varphi}}{3r^3} + \frac{\mu}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^{(n)}(0)}{n!} \frac{\varphi^n}{r^{3n}} = 0, \end{cases} \tag{13}$$

где  $Q(a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + \xi_1 \dot{a}_n}{n! r^{3n}} + \xi_1 \dot{\varphi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)! r^{3n+3}}$ .

Интегрируя уравнение движения среды  $\sigma_{rr,r} + 2 \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = -\rho_0 \left( \frac{\ddot{\varphi}(t)}{3r^2} + \frac{2}{9} \frac{\dot{\varphi}^2(t)}{r^5} \right)$  с использованием переменных (12) и граничных условий (6) и (7), получим уравнение

$$\psi(a_n, b_n, R, s) + S(\varphi, R, s) + p(t) = 0, \tag{14}$$

где  $\psi(a_n, b_n, R, s) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{3n n!} \left( \frac{1}{R^{3n}} - \frac{1}{s^{3n}} \right)$ ,  $S(\varphi, R, s) = \rho_0 \left( \frac{\ddot{\varphi}}{3} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{s} \right) + \frac{1}{18} \dot{\varphi}^2 \left( \frac{1}{R^4} - \frac{1}{s^4} \right) \right)$ .

Приравнявая в зависимостях (13) коэффициенты при одинаковых степенях  $r$ , вместе с уравнением (14) получим бесконечную рекуррентную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций времени  $\varphi(t)$ ,  $a_n(t)$  и  $b_n(t)$ :

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= \xi_1^{-1} \left( -a_1 + \frac{4}{3} \xi_2 \dot{\varphi} + \frac{2}{3} \mu A^{(1)}(0) \varphi \right), \\ \dot{b}_1 &= -\xi_1^{-1} \left( b_1 + \frac{2}{3} \xi_2 \dot{\varphi} + \frac{\mu}{3} A^{(1)}(0) \varphi \right), \\ &\vdots \\ \dot{a}_n &= \xi_1^{-1} \left( -a_n - \xi_1 n(n-1) \dot{\varphi} a_{n-1} + \frac{2\mu}{3} A^{(n)}(0) \varphi^n \right), \\ \dot{b}_n &= -\xi_1^{-1} \left( b_n + \xi_1 n(n-1) \dot{\varphi} b_{n-1} + \frac{\mu}{3} A^{(n)}(0) \varphi^n \right). \end{aligned} \tag{15}$$

Поскольку деформирование среды начинается из свободного состояния, то начальные условия задачи для этой системы обыкновенных дифференциальных уравнений будут однородными:

$$\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = a_n(0) = b_n(0) = 0. \tag{16}$$

Переходя в уравнениях (14), (15) к безразмерным переменным

$$\begin{aligned} \tau = \frac{t}{\xi_1}, \quad f(\tau) = \frac{\varphi(t)}{R_0^3}, \quad \tilde{p}(\tau) = \frac{p(t)}{\mu}, \quad \tilde{a}_n = \frac{a_n}{\mu R_0^{3n}}, \quad \tilde{b}_n = \frac{b_n}{\mu R_0^{3n}}, \quad \tilde{r}_0 = \frac{r_0}{R_0}, \\ \dot{f} = \frac{\xi_1 \dot{\varphi}}{R_0^3}, \quad \ddot{f} = \frac{\xi_1^2 \ddot{\varphi}}{R_0^3}, \quad \dot{\tilde{a}}_n = \frac{\xi_1 \dot{a}_n}{\mu R_0^{3n}}, \quad \dot{\tilde{b}}_n = \frac{\xi_1 \dot{b}_n}{\mu R_0^{3n}} \end{aligned} \tag{17}$$

и ограничиваясь в рядах (12) конечным числом слагаемых, решаем систему (14), (15) с начальными условиями (16).

Решение было получено численно при линейной функции нагружения  $\tilde{p}(\tau) = g_0\tau$  и следующих значениях постоянных:  $\xi_0 = \rho_0 R_0^2 / (\mu \xi_1^2) = 1$ ;  $\xi_2 / (\mu \xi_1) = 2,5$ ;  $\tilde{r}_0 = 0,03$ ;  $k/\mu = 0,003$ ;  $g_0 = 10^{-4}$ . Расчеты показали, что, несмотря на малый размер микропоры, ряды (12) сходятся довольно быстро, достаточно взять шесть слагаемых. Установленное решение справедливо до момента времени  $t = t_0$ , в который нагружающее давление  $p(t)$  достигает порогового значения  $p(t_0) = p_0$ . В этот момент на границе дефекта сплошности  $r = s(t_0) = s_0$  выполняется условие пластичности (5) в форме

$$|\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}|_{r=s_0} = 2k. \quad (18)$$

В новых переменных (12) условие (18) принимает вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{n! s_0^{3n}} = 2k. \quad (19)$$

Из уравнения (19) определяется радиус  $s_0$ , при котором начинается пластическое течение. При принятых числовых значениях постоянных найденные в момент начала пластического течения величины  $\tilde{s}_0 = s_0/R_0 = 0,02997212$  и  $\tilde{p}_0 = g_0\tau_0 = 0,004$  служат начальными условиями для дальнейшего деформирования.

#### 4. Пластическое течение

Пусть начиная с момента времени  $t = t_0$  нагружающее давление продолжает расти:  $p(t) = p_0 + g(t)$ ,  $g(t_0) = 0$ ,  $g(t) > 0$ ,  $\dot{g}(t) \geq 0$  при  $t > t_0$ . При  $t > t_0$  в направлении от границы микропоры  $r = s(t)$  развивается область пластического течения  $s(t) \leq r \leq m(t)$ . Неизвестная функция  $m(t)$  задает движение границы этой области, в которой области выполняется условие пластичности

$$(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})|_{s(t) \leq r \leq m(t)} = 2k. \quad (20)$$

Для определения компонент напряжений уравнение движения проинтегрируем отдельно в области вязкоупругого деформирования  $m(t) \leq r \leq R(t)$  и в области пластического течения  $s(t) \leq r \leq m(t)$ . Принимая для компонент девиатора тензора напряжений представление (12) и учитывая условие (6), в области вязкоупругого деформирования найдем

$$\sigma_{rr} = \Psi(a_n, b_n, r, R) + S(\varphi, r, R) - p_0 - g(t), \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{n! r^{3n}}. \quad (21)$$

В области пластического течения, используя условия (7) и (20), получим

$$\sigma_{rr} = 4k \ln \frac{s}{r} + S(\varphi, r, s), \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} - 2k. \quad (22)$$

Из условий непрерывности напряжений (21) и (22) на упругопластической границе  $r = m(t)$  следуют уравнения

$$\Psi(a_n, b_n, m, R) + S(\varphi, s, R) - p_0 - g(t) - 4k \ln \frac{s}{m} = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{n! m^{3n}} = 2k. \quad (23)$$

Дифференцируя второе из соотношений (23) с использованием зависимостей (15) и (21), преобразуем его в обыкновенное дифференциальное уравнение для функции  $m(t)$ :

$$\dot{m} = \left( \frac{1}{\xi_1} \left( \frac{3\xi_2 \dot{\phi}}{m^3} - 2k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu \phi^n A^{(n)}(0)}{n! m^{3n}} \right) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\dot{\phi} (a_{n-1} - b_{n-1})}{(n-2)! m^{3n}} \right) / \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n(a_n - b_n)}{n! m^{3n+1}}. \quad (24)$$

Добавляя к первому уравнению (23) и уравнению (24) систему (15), из которой находятся коэффициенты, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций  $\phi(t)$ ,  $m(t)$ ,  $a_n(t)$  и  $b_n(t)$ . Переходя к безразмерным переменным (17) и ограничиваясь конечным числом

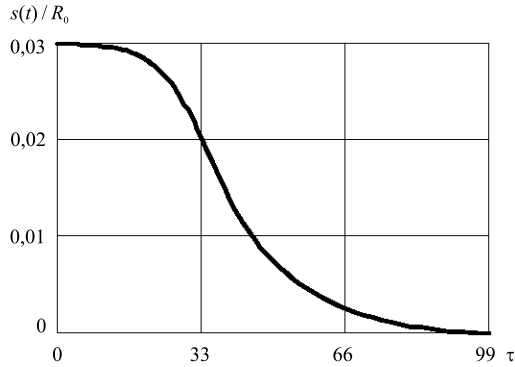


Рис. 1. Изменение границы микродефекта

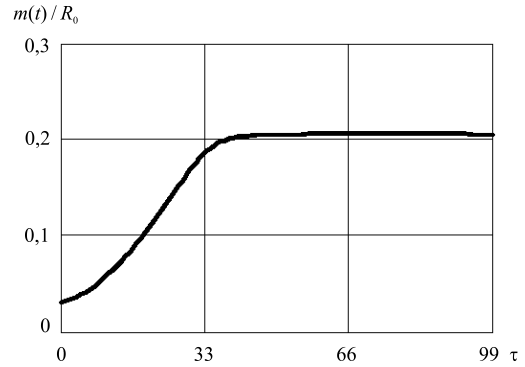


Рис. 2. Изменение упругопластической границы

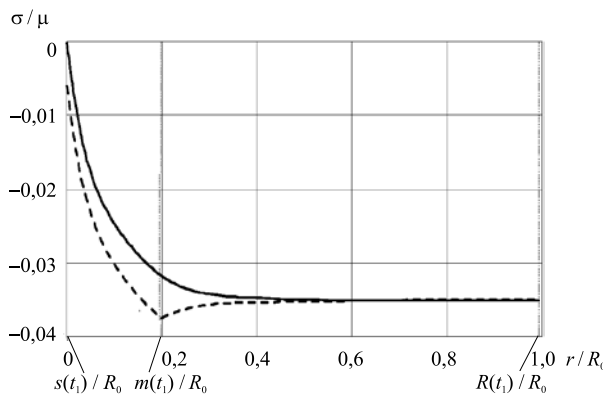


Рис. 3. Распределение напряжений в сферическом слое (сплошная линия —  $\sigma_{rr}$ , пунктирная линия —  $\sigma_{00}$ )

коэффициентов  $a_n$  и  $b_n$ , исследуем задачу Коши для данной системы численно. В качестве начальных условий в момент времени  $t = t_0$  (при  $p = p_0$ ) в данном случае следует взять значения функций, полученные из решения упругой задачи. Характерные зависимости от времени функций движения поверхности поры и границы области пластического течения приведены на рисунках 1 и 2.

На рисунке 3 показано распределение напряжений при нагружающем давлении  $p_1/\mu = \tilde{p}_0 + g_0 \tau_1 = 0,035268$ .

Компоненты вязкоупругих деформаций в области обратимого деформирования  $m(t) \leq r \leq R(t)$ , согласно (2) и (8), определяются соотношениями

$$e_{rr} = 1 - \sqrt{1 - 2d_{rr}} = 1 - H^{-2/3}, \quad e_{00} = 1 - \sqrt{1 - 2d_{00}} = 1 - H^{1/3}, \quad e_{00} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - e_{rr}}}. \quad (25)$$

Заметим, что третье соотношение (25) справедливо и на упругопластической границе  $r = m(t)$ , а, следовательно, в силу непрерывности компонент деформаций на данной границе, и в области пластического течения.

Для нахождения компонент вязкоупругих деформаций в области пластического течения воспользуемся формулой (4), из которой в рассматриваемом случае следуют зависимости

$$\begin{aligned} \tau_{rr} + \xi_1 \left( \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial t} - \frac{\dot{\phi}}{3r^2} \tau_{rr,r} \right) &= \frac{2\mu}{3} (2e_{rr} - e_{rr}^2 - 2e_{00} + e_{00}^2) + \xi_2 \frac{4\dot{\phi}}{3r^3}, \\ \tau_{00} + \xi_1 \left( \frac{\partial \tau_{00}}{\partial t} - \frac{\dot{\phi}}{3r^2} \tau_{00,r} \right) &= \frac{\mu}{3} (2e_{00} - e_{00}^2 - 2e_{rr} + e_{rr}^2) - \xi_2 \frac{2\dot{\phi}}{3r^3}. \end{aligned} \quad (26)$$

Вычитая второе уравнение (26) из первого и учитывая, что во всей области пластического течения выполняется условие пластичности Мизеса в форме  $\tau_{rr} - \tau_{00} = 2k$ , для вычисления  $e_{rr}$  и  $e_{00}$  получим уравнение

$$2\mu(e_{rr} - e_{\theta\theta}) - \mu(e_{rr}^2 - e_{\theta\theta}^2) + 2\xi_2 \frac{\dot{\phi}}{r^3} = 2k. \quad (27)$$

Учитывая зависимость (25), из уравнения (27) найдем

$$e_{rr} = 1 + c/6 - 2l_1/c, \quad e_{\theta\theta} = 1 - (-c/6 + 2l_1/c)^{-1/2}, \quad (28)$$

где  $c = \left(-108 + 12\sqrt{12l_1^3 + 81}\right)^{1/3}$ ,  $l_1 = 2(k/\mu - \xi_2\dot{\phi}/(\mu r^3))$ . По известным полным (8) и вязкоупругим (28) деформациям из (2) вычислим компоненты пластических деформаций

$$p_{rr} = \frac{72d_r c^2 - 36c^2}{2(-c^2 + 12l_1)^2} + \frac{1}{2}, \quad p_{\theta\theta} = \frac{2d_{\theta\theta}(-c^2 + 12l_1) + c^2 - 12l_1}{12c} + \frac{1}{2}. \quad (29)$$

Зависимости (28) и (29) описывают поведение составляющих тензора полных деформаций в любой момент времени с помощью предварительно найденной функции  $\phi(t)$ . Сведения о распределении полей деформаций необходимы для расчета последующего процесса разгрузки.

## 5. Процесс разгрузки

Разгрузку материала, определяемую функцией  $x(t)$ , свяжем с краевым условием

$$\sigma_{rr} \Big|_{r=R(t)} = -p_1 + x(t), \quad x(t_1) = 0, \quad x(t) > 0 \text{ при } t > t_1. \quad (30)$$

В условии (30)  $p_1$  — это давление, достигнутое в процессе нагрузки:  $p_1 = p_0 + g(t_1)$ . Время  $t = t_1$  является моментом окончания процесса нагрузки и начала разгрузки. Если давление  $p_1$  достаточно велико, процесс разгрузки может вызвать повторное пластическое течение [6] вследствие удовлетворения условию (5) теперь уже при растягивающих внутренних усилиях:

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = -2k. \quad (31)$$

Будем считать, что повторное пластическое течение при разгрузке начинается в момент времени  $t = t_2$  при значениях  $R(t_2) = R_2$ ,  $s(t_2) = s_2$ . Таким образом, если на поверхности  $r = R(t)$  напряжение  $\sigma_{rr}$  станет равным нулю до момента времени  $t_2$ , то повторного пластического течения при разгрузке не будет. В другом случае, при  $t \geq t_2$ , задача требует решения.

В промежутке времени  $t_1 \leq t \leq t_2$  материал деформируется вязкоупруго, его кинематическое поведение определяется соотношениями:  $u = r - \sqrt{r^3 + \gamma}$ ,  $\gamma = \phi(t) = R_0^3 - R^3(t) = r_0^3 - s^3(t)$ ,  $m^3(t) = m_1^3 - \gamma + \gamma_1$ ,  $m_1 = m(t_1)$ ,  $\gamma_1 = \phi(t_1)$ . В области  $m(t) \leq r \leq R(t)$ , где отсутствуют пластические деформации, после интегрирования уравнения движения среды с использованием условия (30) для радиальной компоненты напряжений получаем

$$\sigma_{rr} = \Psi(a_n, b_n, r, R) + S(\gamma, r, R) - p_1 + x(t). \quad (32)$$

Компонента  $\sigma_{\theta\theta}$  вычисляется согласно второму соотношению (21).

В рассматриваемом интервале времени пластическая область не увеличивается, но, в отличие от материальной координаты, пространственная координата границы данной области  $m(t)$ , вследствие изменения деформированного состояния, изменяется ( $m(t) \neq m_1$ ). Накопленные пластические деформации неизменны в каждой точке среды (при каждом значении материальной координаты), однако при одном и том же значении пространственной координаты они различаются. Пространственная (эйлерова) координата  $r$  связана с материальной (лагранжевой) координатой  $r_k$  точки среды, фиксированной в момент начала процесса разгрузки, зависимостью

$$r^3 = r_k^3 - \gamma + \gamma_1. \quad (33)$$

С учетом выражения (33) компоненты пластических деформаций (29) в области  $s \leq r \leq m$  вычисляются по формулам

$$p_{rr} = \frac{-18c^2 H_1^{-4/3}}{(-c^2 + 12l_1)^2} + \frac{1}{2}, \quad p_{\theta\theta} = -\frac{H_1^{2/3}(-c^2 + 12l_1)}{12c} + \frac{1}{2}, \quad H_1 = \frac{r^3 + \gamma}{r^3 + \gamma - \gamma_1}. \quad (34)$$

По известным полным (8) и пластическим (34) деформациям из (2) определяем компоненты вязкоупругих деформаций

$$e_{rr} = 1 - l_3 l_2^{-2/3}, \quad e_{\theta\theta} = 1 - \frac{l_2^{1/3}}{\sqrt{l_3}}, \quad (35)$$

при этом  $l_2 = 1 + \frac{\gamma - \gamma_1}{r^3}$ ,  $l_3 = \frac{l_4}{6c}$ ,  $l_4 = -c^2 + 24\left(\frac{k}{\mu} - \frac{\xi_2}{\mu} \frac{\dot{\gamma}_1}{r^3}\right)$ . Здесь  $c$  и  $l_1$  берутся из формулы (28), но с учетом замены  $\dot{\phi}$  на  $\dot{\gamma}_1$  согласно зависимости (33). Используя (26) и (35), для области  $s \leq r \leq m$  получим уравнения

$$\begin{aligned} \tau_{rr} + \xi_1 \left( \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial t} - \frac{\dot{\gamma}}{3r^2} \tau_{rr,r} \right) &= \frac{2\mu}{3} \left( \frac{l_2^2 - l_3^3}{l_3 l_2^{4/3}} \right) + \xi_2 \left( \frac{4\dot{\gamma}}{3r^3} \right), \\ \tau_{\theta\theta} + \xi_1 \left( \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial t} - \frac{\dot{\gamma}}{3r^2} \tau_{\theta\theta,r} \right) &= -\frac{\mu}{3} \left( \frac{l_2^2 - l_3^3}{l_3 l_2^{4/3}} \right) - \xi_2 \left( \frac{2\dot{\gamma}}{3r^3} \right). \end{aligned} \quad (36)$$

В силу того, что величина  $\dot{\gamma}_1$  мала, можно считать

$$l_1 = 2\frac{k}{\mu}, \quad l_4 = -c^2 + 24\frac{k}{\mu}. \quad (37)$$

Тогда, используя (37), член  $(l_2^2 - l_3^3)/(l_3 l_2^{4/3})$  в выражениях (36) можно разложить в ряд по степеням  $r$

$$h(z) = \frac{l_2^2(z) - l_3^3}{l_3 l_2^{4/3}(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} \frac{(\gamma - \gamma_1)^n}{r^{3n}}. \quad (38)$$

Представим, как и ранее, компоненты дивергента тензора напряжений в области с накопленными необратимыми деформациями в виде

$$\tau_{rr} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n(t)}{n! r^{3n}}, \quad \tau_{\theta\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_n(t)}{n! r^{3n}}. \quad (39)$$

Преобразуем соотношения (36) с учетом выражений (38) и (39) и значения  $Q$  (13):

$$\begin{aligned} z_0 + \xi_1 \dot{z}_0 + Q(z_n) &= \frac{2\mu}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} \frac{(\gamma - \gamma_1)^n}{r^{3n}} + \xi_2 \frac{4\dot{\gamma}}{3r^3}, \\ w_0 + \xi_1 \dot{w}_0 + Q(w_n) &= -\frac{\mu}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} \frac{(\gamma - \gamma_1)^n}{r^{3n}} - \xi_2 \frac{2\dot{\gamma}}{3r^3}. \end{aligned} \quad (40)$$

Заметим, что суммирование в рядах (39) следует вести от нуля, так как в правых частях уравнений (40) есть постоянные (не зависящие от радиуса) слагаемые. Интегрируя уравнение движения с учетом зависимостей (39) и отсутствия напряжений на поверхности дефекта (7), найдем компоненты напряжений в области  $s \leq r \leq m$ :



$$\sigma_{rr} = \psi(z_n, w_n, r, s) + S(\gamma, r, s) + 2(z_0 - w_0) \ln \frac{s}{r}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n - w_n}{n! r^{3n}}. \quad (41)$$

Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях  $r$  в левой и правой частях выражений (40) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{z}_0 &= \xi_1^{-1} \left( -z_0 - \frac{2\mu}{3} h(0) \right), \\ \dot{w}_0 &= \xi_1^{-1} \left( -w_0 + \frac{\mu}{3} h(0) \right), \\ \dot{z}_1 &= \xi_1^{-1} \left( -z_1 - \frac{2\mu}{3} h^{(1)}(0) (\gamma - \gamma_1) + \frac{4}{3} \xi_2 \dot{\gamma} \right), \\ \dot{w}_1 &= \xi_1^{-1} \left( -w_1 + \frac{\mu}{3} h^{(1)}(0) (\gamma - \gamma_1) - \frac{2}{3} \xi_2 \dot{\gamma} \right), \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= -\xi_1^{-1} \left( z_n + \xi_1 n(n-1) \dot{\gamma} z_{n-1} + \frac{2\mu}{3} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} (\gamma - \gamma_1)^n \right), \\ \dot{w}_n &= \xi_1^{-1} \left( -w_n - \xi_1 n(n-1) \dot{\gamma} w_{n-1} + \frac{\mu}{3} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} (\gamma - \gamma_1)^n \right). \end{aligned} \quad (42)$$

В результате интегрирования первых двух уравнений (42) найдем, что  $z_0 - w_0 = 2k$ .

Системы уравнений для коэффициентов  $a_n$ ,  $b_n$  (15) и  $z_n$ ,  $w_n$  (42) необходимо дополнить обыкновенным дифференциальным уравнением, следующим из условия равенства компоненты  $\sigma_{rr}$  (см. формулы (32) и (41)) на упругопластической границе  $r = m$ :

$$4k \ln \frac{s}{m} + \varphi(z_n, w_n, m, s) - \varphi(a_n, b_n, m, R) + S(\gamma, R, s) + p_1 - x(t) = 0. \quad (43)$$

Замкнутая система уравнений (15), (42) и (43) при ограничениях, связанных с конечностью числа слагаемых в рядах (12) и (39), и начальных условиях  $\gamma = \gamma_1$ ,  $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_1$ ,  $a_n = a_n(t_1)$ ,  $b_n = b_n(t_1)$ ,  $z_n = z_n(t_1) = 0$ ,  $w_n = w_n(t_1) = 0$  решается, как уже упоминалось, либо до момента времени, когда  $\sigma_{rr}|_{r=R(t)} = 0$ , либо до  $t = t_2$ , когда в направлении от границы микропоры  $r = s_2$  начнет развиваться область пластического течения. Условие ее возникновения — выполнение равенства (31), в принятых обозначениях запишется как  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n - w_n}{n! s_2^{3n}} = -2k$ .

Вычисленные значения функций

$$\gamma_2 = \gamma(t_2), \quad \dot{\gamma}_2 = \dot{\gamma}(t_2), \quad a_n(t_2), \quad b_n(t_2), \quad z_n(t_2), \quad w_n(t_2) \quad (44)$$

становятся начальными условиями для последующего процесса деформирования в условиях (7), (30), когда развивается область повторного пластического течения. Считаем, что такая область образует слой  $s(t) \leq r \leq q(t)$ , где  $q(t)$  — его внешняя граница.

Уравнение движения среды теперь необходимо проинтегрировать в трех областях:  $s \leq r \leq q$ ,  $q \leq r \leq m$ ,  $m \leq r \leq R$ . При этом  $m \neq m_2 = m(t_2)$ , несмотря на то, что пластические деформации в области  $q \leq r \leq m$  неизменны. Пространственная координата границы области пластического течения  $m$  определяется как  $m^3 = m_2^3 - \gamma + \gamma_2$ .

В области  $m \leq r \leq R$  пластические деформации отсутствуют, и напряжения вычисляются по формулам (21), в которых нагружающее усилие  $p_0 + g(t)$  следует заменить выражением  $p_1 - x(t)$ , а функцию

времени  $\varphi(t)$  — ее последующим значением  $\gamma(t)$ . В области  $q \leq r \leq m$ , где пластические деформации не изменяются, разность напряжений  $(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})$  находится из соотношения (41). Интегрируя уравнение движения при условии равенства компоненты напряжения  $\sigma_{rr}$  на границе  $r = m$ , найдем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \psi(a_n, b_n, m, R) + \psi(z_n, w_n, r, m) + S(\gamma, r, R) + 4k \ln \frac{m}{r} - p_1 + x(t), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{rr} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n - w_n}{n! r^{3n}}. \end{aligned} \tag{45}$$

В области повторного пластического течения  $s \leq r \leq q$  в результате интегрирования уравнения движения получим

$$\sigma_{rr} = -4k \ln \frac{s}{r} + S(\gamma, r, s), \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} + 2k. \tag{46}$$

Условие равенства компоненты напряжения  $\sigma_{rr}$ , вычисляемой согласно (45) и (46) на границе области повторного пластического течения  $r = q(t)$ , приводит к уравнению

$$\psi(a_n, b_n, m, R) + \psi(z_n, w_n, q, m) + S(\gamma, s, R) + 4k \ln \frac{m}{q} + 4k \ln \frac{s}{q} - p_1 + x(t) = 0. \tag{47}$$

Исходя из условия пластичности Мизеса и зависимостей (42) находим уравнение движения границы области повторного пластического течения  $r = q(t)$ :

$$\dot{q} = \frac{\frac{2}{\xi_1} \left( 2k + \frac{\xi_2 \dot{\gamma}}{q^3} - \frac{\mu}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{(n)}(0) (\gamma - \gamma_1)^n}{n! q^{3n}} \right) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\dot{\gamma} (w_{n-1} - z_{n-1})}{(n-2)! q^{3n}}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(z_n - w_n)}{(n-1)! q^{3n+1}}}. \tag{48}$$

Обыкновенные дифференциальные уравнения (47) и (48) замыкают бесконечную систему дифференциальных уравнений (15) и (42) относительно функций  $\gamma, q, a_n, b_n, z_n, w_n$ .

Решение данной задачи Коши при начальных условиях (44) и конечном числе слагаемых в рядах (12) и (39) найдено численно. Характерное распределение остаточных напряжений в конечный момент разгрузки материала с дефектом в виде сферической поры приведено на рисунке 4.

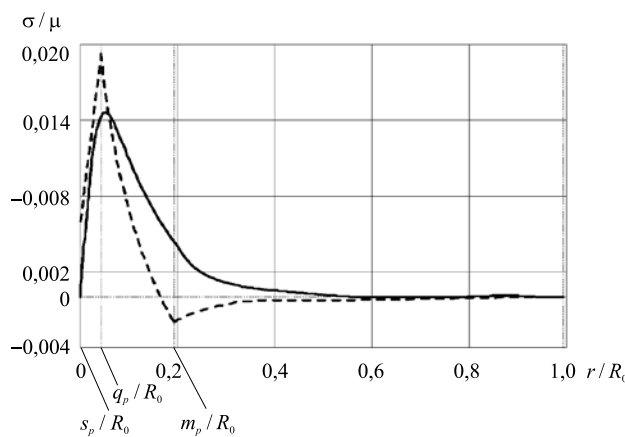


Рис. 4. Распределение остаточных напряжений ( $\sigma_{rr}$  — сплошная линия,  $\sigma_{\theta\theta}$  — пунктирная линия)

Сравнение представленных графических зависимостей с результатами, полученными в рамках модели больших упругопластических деформаций [6], показывает, что учет вязких свойств материалов не приводит к заметным количественным отличиям в процессе активного нагружения образца ни по уровню напряжений, ни по размерам микропоры. Однако в процессе разгрузки с повторным пластическим течением размеры дефекта в вязкоупругопластической среде существенно меньше (в 10 раз) в сравнении с размерами аналогичного дефекта сплошности в идеальной упругопластической среде. При этом заметного снижения уровня остаточных напряжений за счет их релаксации при учете реологических свойств материалов не замечено.

Работа выполнена в рамках Программы совместных фундаментальных исследований УрО РАН, СО РАН, ДВО РАН (проекты УрО РАН № 12-С-1-1015, ДВО РАН № 12-И-СУ-03-002).

## Литература

1. *Rayleigh O.M.F.R.S. (Lord)* On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity // *Philosophical Magazine, Series 6.* – 1917. – V. 34, N. 200. – P. 94-98. [DOI](#)
2. *Галин Л.А.* Плоская упруго-пластическая задача // *ПММ.* – 1946. – Т. 10, № 3. – С. 367-386.
3. *Шемякин Е.И.* Расширение газовой полости в несжимаемой упругопластической среде // *ПМТФ.* – 1961. – Т. 2, № 5. – С. 111-116.
4. *Садовский В.М.* Радиальное расширение сыпучей среды в сферическом и цилиндрическом слоях // *ПМТФ.* – 2009. – Т. 50, № 3. – С. 190-196.
5. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. – М.: Гостехиздат, 1956. – 408 с.
6. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1970. – Т. 2. – 568 с.
7. *Горелов В.И.* Исследование влияния высоких давлений на механические характеристики алюминиевых сплавов // *ПМТФ.* – 1984. – № 5. – С. 157-158.
8. *Горелов В.И., Зорихин В.Н.* Технология упрочнения контейнеров для прессования металлов // *Технология двигателестроения.* – 1984. – № 11-12. – С. 40-43.
9. *Лариков Л.Н.* Залечивание дефектов при механико-термической обработке металлов. – Киев: Наукова думка, 1982. – 460 с.
10. *Черемской П.Г., Слезов В.В., Бетехтин В.И.* Поры в твердом теле. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 376 с.
11. *Бетехтин В.И., Кадомцев А.Г., Амосова О.В.* Закономерности залечивания пористости в некоторых кристаллических и аморфных телах // *Известия ВУЗов. Черная металлургия.* – 2003. – № 8. – С. 65-69.
12. *Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Полоник М.В.* Формирование одномерного поля остаточных напряжений в окрестности цилиндрического дефекта сплошности упругопластической среды // *ПММ.* – 2003. – Т. 67, № 2. – С. 316-325. [DOI](#)
13. *Буренин А.А., Быковцев Г.И., Ковтанюк Л.В.* Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // *ДАН.* – 1996. – Т. 347, № 2. – С. 199-201.
14. *Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Полоник М.В.* Возможность повторного пластического течения при общей разгрузке упругопластической среды // *ДАН.* – 2000. – Т. 375, № 6. – С. 767-769. [DOI](#)
15. *Буренин А.А., Ковтанюк Л.В.* Упругие эффекты при интенсивном необратимом деформировании. – Владивосток: Из-во ДВГТУ, 2011. – 270 с.

Поступила в редакцию 15.11.12; опубликована в электронном виде 15.07.13

---

## Сведения об авторах

*Ковтанюк Лариса Валентиновна*, дфмн, проф., зав.лаб., Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН (ИАПУ ДВО РАН), 690041, Владивосток, ул. Радио, д. 5; E-mail: lk@iacp.dvo.ru

*Мурашкин Евгений Валерьевич*, кфмн, мнс, ИАПУ ДВО РАН; E-mail: murashkin@iacp.dvo.ru

*Роговой Анатолий Алексеевич*, дфмн, проф., зам.дир., Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614013, Пермь, ул. Академика Королева, д. 1; E-mail: rogovoy@icmm.ru