

DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.2.19
УДК 539.3

О СОУДАРЕНИИ ДВУХ УПРУГИХ ТЕЛ С ПЛОСКИМИ ГРАНИЦАМИ

А.А. Буренин¹, О.В. Дудко², Д.А. Потянихин²

¹*Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре, Россия*

²*Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, Владивосток, Россия*

Рассматривается автомоделная задача соударения двух нелинейно-упругих тел, плоские границы которых не параллельны. Механические свойства взаимодействующих тел определяются различным набором упругих модулей. В зависимости от коэффициента трения возможно проскальзывание или сцепление на контактирующих поверхностях. Выбор единственной волновой картины из числа математически допустимых вариантов определяется вторым законом термодинамики и условием эволюционности ударных волн. Решение задачи и одновременная проверка критериев выбора волновой картины реализованы в виде серии вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: теория упругости, ударные волны, волна Римана, вычислительный эксперимент

ON THE COLLISION OF TWO ELASTIC SOLIDS WITH PLANE BOUNDARIES

A.A. Burenin¹, O.V. Dudko² and D.A. Potianikhin²

¹*Institute of Machine Science and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia*

²*Institute of Automation and Control Processes FEB RAS, Vladivostok, Russia*

The self-similar problem of the collision of two nonlinearly elastic solids with plane nonparallel boundaries is considered. The mechanical properties of colliding solids are characterized by different sets of elastic constants. It is shown that, depending on the friction coefficient, both slip and adhesion between the surfaces in contact may occur. The choice of a unique solution out of mathematically possible solutions is governed by the second law of thermodynamics and the shockwave evolutionary condition. The solution of this problem is carried out as a series of computational experiments involving simultaneous verification of wave pattern selection criteria.

Key words: theory of elasticity, shock wave, Riemann waves, computational experiment

1. Введение

Экспериментальное изучение закономерностей распространения ударных волн в твердых телах часто проводится при помощи плоского удара — нагружения, обеспечивающего создание плоского деформированного состояния. Одним из способов формирования плоской ударной волны является высокоскоростной лобовой удар одной пластины по другой. Для проведения высокоточных экспериментов необходимо, чтобы угол между соударяющимися поверхностями пластин был нулевым. На практике выполнение такого условия трудоемко и дорогостояще. Цель настоящей работы заключается в том, чтобы теоретически исследовать процесс соударения двух упругих тел с плоскими непараллельными границами и установить зависимости параметров напряженно-деформированного состояния в контактирующих телах от угла между граничными плоскостями. Знание последнего позволяет понизить требование к точности эксперимента.

Впервые задача оптимизации условий эксперимента путем выявления связи между давлением за фронтом ударной волны и углом между соударяющимися поверхностями рассматривалась в [1], где предполагалось, что материалы ведут себя как жидкости или как линейно упругие тела. В работе [2] изучалось соударение двух нелинейных изотропных упругих тел (материал Мурнагана), в [3] аналогичная задача была поставлена для упругих материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию (модель Мясникова–Олейникова [4]). Однако уровень развития вычислительной техники того времени позволил решить задачу лишь частично: не были в достаточной степени изучены волновые картины, содержащие волны Римана. Настоящая работа продолжает исследования, предпринятые в [2]. Проведен более подробный анализ волновых картин, возникающих при «косом» соударении упругих тел. Частный случай, когда одно из тел полагается абсолютно твердым, рассмотрен авторами в статье [5].

Любое динамическое воздействие на твердое тело неизменно сопровождается нагреванием материала, поэтому полная система модельных соотношений динамики деформирования содержит закон теплопроводности. С другой стороны, в сплошной среде тепло распространяется существенно медленнее, чем ударные волны, которые представляют собой передний фронт продвижения граничных возмущений. Поэтому пренебрежение тепловыми эффектами — естественный логический шаг при изучении волн деформаций в твердых телах. Такое адиабатическое приближение приводит в автомоделных задачах упругого деформирования к неединственности их решения [2, 3, 5–9]. На этапе постановки краевой задачи невозможно определить, какая именно комбинация из ударных и простых волн возникнет.

Так, если в газовой динамике целый ряд постановочных вопросов снимает теорема Цемплена об образовании только ударных волн сжатия и невозможности появления поверхностей разрывов при растяжении, то в динамике деформирования твердых тел такого однозначного ответа не существует, особенно для квазипоперечных ударных волн, на которых преобладают сдвиговые деформации. Термодинамические ограничения (аналог теоремы Цемплена) на существование различных ударных волн и ограничения, следующие из их эволюционности, в механике твердых тел не имеют ярко выраженного механического смысла, поэтому их можно ставить только в процессе решения краевых задач. В работе предложен инструмент для исследования закономерностей распространения граничных возмущений в твердых телах — алгоритм решения автомодельной задачи соударения упругих тел с выбором волновой картины во время численного счета.

2. Определяющие соотношения

Динамическое деформирование изотропной нелинейно-упругой сжимаемой среды без учета массовых сил и тепловых эффектов представляется в переменных Эйлера системой уравнений

$$\begin{aligned} v_i &= \dot{u}_i + v_j u_{i,j}, & w_i &= \dot{v}_i + v_j v_{i,j}, & \alpha_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} u_{k,j}), \\ \sigma_{ij} &= \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}} (\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}), & \sigma_{ij,j} &= \rho w_i, \\ \frac{\rho}{\rho_0} &= \sqrt{1 - 2I_1 + 2I_1^2 - 2I_2 - \frac{4}{3}I_1^3 + 4I_1 I_2 - \frac{8}{3}I_3}, \\ W &= \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 + \kappa I_1 I_2 + \chi I_1^3 + \eta I_3, \\ I_1 &= \alpha_{kk}, & I_2 &= \alpha_{ik} \alpha_{ki}, & I_3 &= \alpha_{ik} \alpha_{kj} \alpha_{ji}. \end{aligned} \quad (1)$$

В соотношениях (1) приняты обозначения: u_i , v_i , w_i — компоненты векторов перемещений, скоростей и ускорений точек среды; α_{ij} , σ_{ij} — компоненты тензора деформаций Альманси и тензора напряжений Эйлера–Коши; ρ_0 , ρ — плотность материала в начальном и текущем состоянии соответственно; δ_{ij} — символ Кронекера. При адиабатическом деформировании изотропной среды упругий потенциал W зависит только от инвариантов тензора деформаций I_1 , I_2 , I_3 ; λ и μ — параметры Ламе; κ , χ , η — упругие модули третьего порядка. Латинский индекс после запятой означает частное дифференцирование по пространственной координате ($m_{,j} = \partial m / \partial x_j$), точкой обозначена частная производная по времени ($\dot{m} = \partial m / \partial t$). Здесь и далее принято правило суммирования по повторяющимся индексам.

Система (1) определяет движение среды всюду, где входящие в нее функции непрерывны и дифференцируемы требуемое число раз. На движущихся в среде поверхностях разрывов локальные следствия законов сохранения в форме (1) не справедливы. Вместо них необходимо использовать динамические условия совместности разрывов, вытекающие из законов сохранения в интегральной форме, а также кинематические условия совместности [10].

На ударных волнах параметры напряженно-деформированного состояния и движения точек среды связаны условиями совместности разрывов первого порядка:

$$[\sigma_{ij}] n_j = \rho^+ (v_j^+ n_j - G) [v_i], \quad [\dot{u}_i] = -G [u_{i,j}] n_j \quad \text{при } [u_i] = 0. \quad (2)$$

На поверхностях разрывов ускорений требуется выполнение условий совместности разрывов второго порядка:

$$[\sigma_{ij,j}] = \rho^+ [w_i], \quad [\ddot{u}_i] = G^2 [u_{i,jk}] n_j n_k \quad \text{при } [u_i] = 0, [u_{i,j}] = 0. \quad (3)$$

В соотношениях (2), (3) и далее квадратными скобками обозначен скачок функции на поверхности: $[m] = m^+ - m^-$, где m^+ и m^- — предельные значения функции m перед поверхностью разрывов и после нее; n_j — компоненты единичной нормали к поверхности волны ($n_i n_j = \delta_{ij}$); G — скорость распространения соответствующей поверхности разрывов.

В принятом адиабатическом приближении единственным необратимым процессом в среде остается ударная волна. Условие неубывания энтропии на поверхности сильных разрывов приводит к термодинамическому условию совместности [11]:

$$\sigma_{ij}^+ [v_i] n_j - \rho^+ (v_j^+ n_j - G) \left(\frac{[v_k][v_k]}{2} + \frac{W}{\rho_0} \right) \geq 0. \quad (4)$$

Общий анализ соотношений (1)–(3) показывает, что в нелинейно-упругой среде с потенциалом W в условиях плоского деформированного состояния возможно существование плоских ударных волн двух типов — квазипродольных (с преобладанием на них изменения объемных деформаций) и квазипоперечных (вызывающих преимущественно сдвиговые деформации), а также волн Римана, передним и задним фронтами которых являются плоские волны разрывов ускорений. При этом скорость распространения квазипродольной волны больше, чем скорость квазипоперечной [11].

Известно, что при описании квазипоперечных ударных волн нелинейные эффекты оказываются связанными с учетом в разложении $W(I_1, I_2, I_3)$ слагаемых с четвертой степенью компонент градиента перемещений. Зависят эти эффекты как от физической нелинейности, задаваемой упругими модулями четвертого порядка, так и от геометрической нелинейности, которая учитывается через слагаемые, включающие компоненты тензора градиента перемещений в четвертой степени, во всех соотношениях из (1). До настоящего времени надежных экспериментальных сведений об упругих модулях четвертого порядка не существует [7, 12], поэтому в работе при разложении упругого потенциала W в ряд в окрестности свободного состояния в соотношениях (1) удерживается пять слагаемых, и, таким образом, учитывается только геометрическая нелинейность четвертого порядка.

Условие (4) служит аналогом теоремы Цемплена, запрещающей в газовой динамике существование ударных волн разрежения. Если же воспользоваться экспериментальными данными об упругих постоянных κ , χ , η [12], то можно получить [11] подобное ограничение для квазипродольных ударных волн. На квазипоперечных ударных волнах неравенство (4) не приводит к следствиям, которые могли бы непосредственно использоваться при постановке задачи.

3. Постановка краевой задачи

Пусть неподвижное упругое тело I с границей L_1 занимает полупространство $x_1 > 0$. Механические свойства тела определяются модулями λ_I , μ_I , κ_I , χ_I , η_I ; плотность в начальном состоянии составляет ρ_I . Второе тело с плоской границей L_2 , перемещаясь с постоянной скоростью $\mathbf{v}_0 = \{v_{10}, v_{20}\}$,

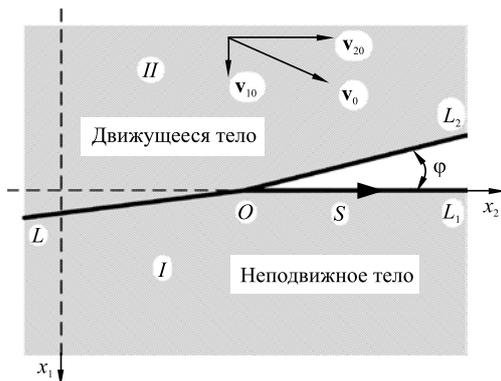


Рис. 1. Схема соударения двух упругих тел с плоскими непараллельными границами

сталкивается с первым так, что образуется общая граница OL (Рис. 1). Свойства движущегося тела II обозначим по аналогии с предыдущим как λ_{II} , μ_{II} , κ_{II} , χ_{II} , η_{II} , ρ_{II} . На полуплоскости контакта OL выполняется закон сухого трения.

Поставим задачу в автомодельном виде, согласно которому свяжем скорость S движения точки O с заданными параметрами v_{10} , v_{20} и углом столкновения φ : $S = v_{20} + v_{10} \cdot \text{ctg } \varphi$. Считаем эту скорость настолько большой, что возникающие в результате ударного столкновения волновые фронты не могут отделиться от точки O . Это предположение подразумевает либо достаточно большую скорость соударения \mathbf{v}_0 , либо малый угол соударения φ .

Зададим автомодельную переменную θ в виде $\theta = x_1 / (St - x_2)$ и положим, что ненулевые компоненты вектора перемещений имеют вид

$$\begin{aligned} u_1 &= (St - x_2)F(\theta) + g_1 t, \\ u_2 &= (St - x_2)\Phi(\theta) + g_2 t, \end{aligned} \quad (5)$$

где $F(\theta)$ и $\Phi(\theta)$ — искомые функции компонент безразмерного вектора перемещений; постоянные g_1 и g_2 равны нулю для тела I и $g_1 = v_{10}$, $g_2 = v_{20}$ для тела II .

С учетом автомодельного представления (5) для параметров напряженно-деформированного состояния и движения точек среды получим:

$$\begin{aligned}
 u_{1,1} &= F', & u_{1,2} &= \theta F' - F, & u_{2,1} &= \Phi', & u_{2,2} &= \theta \Phi' - \Phi, \\
 \dot{u}_1 &= -S(\theta F' - F) + g_1, & \dot{u}_2 &= -S(\theta \Phi' - \Phi) + g_2, \\
 v_1 &= \frac{-S(\theta F' - F) + g_1(1 + \Phi - \theta \Phi') + g_2(\theta F' - F)}{(1 - F')(1 + \Phi) - \Phi'(F - \theta)}, \\
 v_2 &= \frac{S(\Phi(1 - F') + \Phi'(F - \theta)) + g_1\Phi' + g_2(F - \theta)}{(1 - F')(1 + \Phi) - \Phi'(F - \theta)}, \\
 \alpha_{11} &= F' - \frac{1}{2}(F'^2 + \Phi'^2), & \alpha_{22} &= (\theta \Phi' - \Phi) - \frac{1}{2}((\theta F' - F)^2 + (\theta \Phi' - \Phi)^2), \\
 \alpha_{12} &= \alpha_{21} = \frac{1}{2}((\theta F' - F) + \Phi' - (\theta F' - F)F' - (\theta \Phi' - \Phi)\Phi'), \\
 \frac{\rho}{\rho_0} &= (1 - F')(1 + \Phi) - \Phi'(F - \theta).
 \end{aligned} \tag{6}$$

Запись компонент тензора напряжений опускаем из-за их громоздкости.

Подстановка соотношений (6) в уравнение движения приводит к однородной системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $F(\theta)$ и $\Phi(\theta)$:

$$\begin{cases} A \cdot F''(\theta) + B \cdot \Phi''(\theta) = 0, \\ C \cdot F''(\theta) + D \cdot \Phi''(\theta) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

где коэффициенты A , B , C , D зависят от θ , F , Φ , F' , Φ' и упругих модулей среды. Условие существования нетривиального решения системы (7) имеет вид:

$$AD - BC = 0 \tag{8}$$

и может выполняться либо при некотором значении $\theta = \theta^*$ (такое решение определяет ударную волну), либо в интервале $\theta \in [\theta^+, \theta^-]$ (волна Римана, переднему и заднему фронтам которой соответствуют значения автомодельной переменной $\theta = \theta^+$ и $\theta = \theta^-$).

В областях между волнами равенство (8) не выполняется и, следовательно, имеет место тривиальное решение системы (7): $F'' = 0$, $\Phi'' = 0$. Функции $F(\theta)$ и $\Phi(\theta)$ в этих областях можно записать как $F(\theta) = a\theta - b$, $\Phi(\theta) = e\theta - f$, где a , b , e , f — произвольные постоянные интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений (7), собственные для каждой из областей между волнами. В областях существования тривиального решения ненулевые параметры движения точек среды и напряженно-деформированного состояния остаются постоянными и выражаются через константы интегрирования:

$$\begin{aligned}
 u_{1,1} &= a, & u_{1,2} &= b, & u_{2,1} &= e, & u_{2,2} &= f, & v_1 &= \frac{-Sb}{(1-a)(1-f)-be}, & v_2 &= \frac{-S(f-af+be)}{(1-a)(1-f)-be}, & w_1 &= 0, \\
 w_2 &= 0, & \frac{\rho}{\rho_0} &= (1-a)(1-f)-be, & \alpha_{11} &= a - \frac{1}{2}(a^2 + e^2), & \alpha_{12} &= \alpha_{21} = \frac{1}{2}(b + e - ab - ef), & \alpha_{22} &= f - \frac{1}{2}(b^2 + f^2).
 \end{aligned}$$

Математически возможные волновые картины, состоящие из различных комбинаций плоских ударных волн и простых волн Римана, представлены на рисунке 2. Здесь линиями Σ_i показаны волновые фронты, цифрами в кружках обозначены области между волнами. В соударяющихся телах отсутствуют предварительные деформации, поэтому передними фронтами граничных возмущений оказываются продольные ударные волны Σ_1 и Σ_4 . Следом за ними могут распространяться либо квазипоперечные ударные волны (Рис. 2, а), либо простые волны Римана (Рис. 2, б-г).

На полуплоскости контакта OL потребуем выполнения условий непрерывности нормальных и касательных напряжений, а также отсутствия разрыва нормальной составляющей вектора скорости:

$$\begin{aligned}
 (\sigma_{ij}^{(2)} - \sigma_{ij}^{(3)})n_i^{(OL)}n_j^{(OL)} &= 0, \\
 (\sigma_{ij}^{(2)} - \sigma_{ij}^{(3)})n_i^{(OL)}\tau_j^{(OL)} &= 0, \\
 (v_i^{(2)} - v_i^{(3)})n_i^{(OL)} &= 0.
 \end{aligned} \tag{9}$$

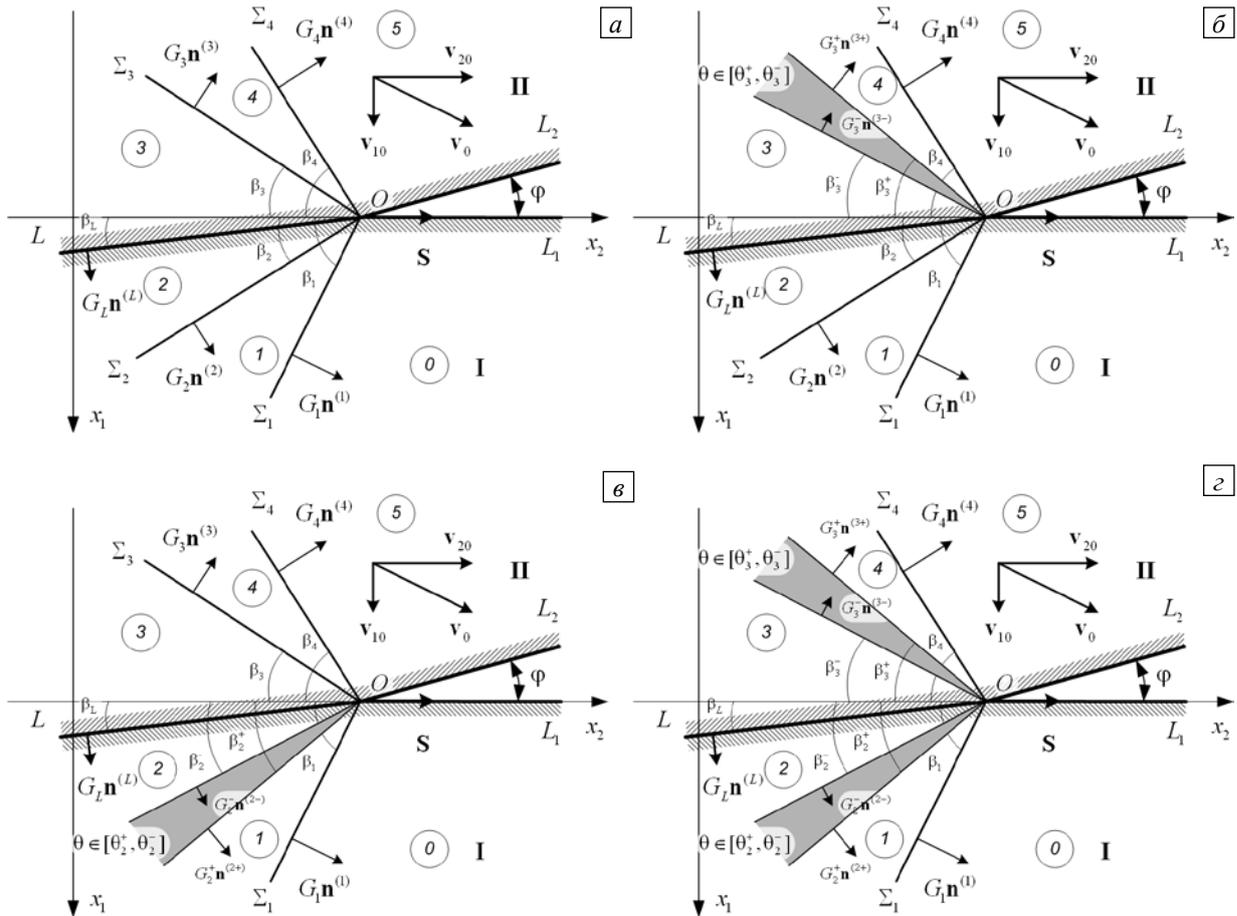


Рис. 2. Возможные волновые картины в задаче соударения двух упругих тел с плоскими непараллельными границами: четыре ударных волны (а), простая волна Римана, возникающая только в одном из тел (б, в), простая волна Римана, возникающая в обоих телах (г)

Здесь и далее верхним индексом в скобках обозначена область постоянства параметров напряженно-деформированного состояния; $n_i^{(OL)}$, $\tau_j^{(OL)}$ — компоненты единичных векторов нормали ($\mathbf{n}^{(OL)}$)

и касательной ($\boldsymbol{\tau}^{(OL)}$) к полуплоскости OL : $\mathbf{n}^{(OL)} = \left\{ \cos \beta_L, \sin \beta_L \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+\theta_L^2}}, \frac{\theta_L}{\sqrt{1+\theta_L^2}} \right\}$,

$$\boldsymbol{\tau}^{(OL)} = \left\{ \sin \beta_L, -\cos \beta_L \right\} = \left\{ \frac{\theta_L}{\sqrt{1+\theta_L^2}}, -\frac{1}{\sqrt{1+\theta_L^2}} \right\}.$$

Наличие разрыва касательных составляющих вектора скорости зависит от неравенства

$$\left| \sigma_{ij}^{(2)} n_i^{(OL)} \tau_j^{(OL)} \right| \leq k \left| \sigma_{ij}^{(2)} n_i^{(OL)} n_j^{(OL)} \right|. \quad (10)$$

Если (10) выполняется, то разрыв касательных компонент вектора скорости на взаимодействующих участках соударяющихся тел запрещаем:

$$\left(v_i^{(2)} - v_i^{(3)} \right) \tau_i^{(OL)} = 0. \quad (11)$$

В противном случае условие (11) заменяем следствием закона трения Кулона (k — коэффициент трения):

$$\left| \sigma_{ij}^{(2)} n_i^{(OL)} \tau_j^{(OL)} \right| = k \left| \sigma_{ij}^{(2)} n_i^{(OL)} n_j^{(OL)} \right|. \quad (12)$$

Для сохранения конфигурации волновых картин необходимо также выполнить на OL соотношение для скорости

$$G_L = v_1^{(2)} n_1^{(OL)} + v_2^{(2)} n_2^{(OL)}. \quad (13)$$

Таким образом, задача заключается в определении типа волновой картины, положения волновых фронтов и параметров напряженно-деформированного состояния взаимодействующих тел в зависимости от скорости соударения $\mathbf{v}_0 = \{v_{10}, v_{20}\}$, угла соударения φ и коэффициента трения k .

4. Численный метод решения задачи

Рассмотрим задачу соударения двух упругих тел, одно из которых неподвижно, при всех возможных с математической точки зрения сочетаниях плоских ударных волн и простых волн Римана. Получив эти решения, сравним их между собой, пользуясь термодинамическим условием совместности (4) и условием эволюционности ударных волн.

Найдем решение, предполагая возникновение только ударных волн (Рис. 2, а). Направление движения продольных (Σ_1, Σ_4) и квазипоперечных (Σ_2, Σ_3) ударных волн определяется единичными векторами нормали

$$\mathbf{n}^{(1)} = \{\cos \beta_1, \sin \beta_1\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+\theta_1^2}}, \frac{\theta_1}{\sqrt{1+\theta_1^2}} \right\}, \quad \mathbf{n}^{(2)} = \{\cos \beta_2, \sin \beta_2\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+\theta_2^2}}, \frac{\theta_2}{\sqrt{1+\theta_2^2}} \right\},$$

$$\mathbf{n}^{(3)} = \{-\cos \beta_3, \sin \beta_3\} = \left\{ \frac{-1}{\sqrt{1+\theta_3^2}}, \frac{-\theta_3}{\sqrt{1+\theta_3^2}} \right\}, \quad \mathbf{n}^{(4)} = \{-\cos \beta_4, \sin \beta_4\} = \left\{ \frac{-1}{\sqrt{1+\theta_4^2}}, \frac{-\theta_4}{\sqrt{1+\theta_4^2}} \right\}.$$

Условия непрерывности перемещений на волновых фронтах $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ приводят к восьми соотношениям:

$$\begin{aligned} a_1 \theta_1 - b_1 = 0, \quad e_1 \theta_1 - f_1 = 0, \quad a_1 \theta_2 - b_1 = a_2 \theta_2 - b_2, \quad e_1 \theta_2 - f_1 = e_2 \theta_2 - f_2, \\ a_4 \theta_3 - b_4 = a_3 \theta_3 - b_3, \quad e_4 \theta_3 - f_4 = e_3 \theta_3 - f_3, \quad a_4 \theta_4 - b_4 = 0, \quad e_4 \theta_4 - f_4 = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Из динамических условий совместности разрывов следуют еще восемь уравнений:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{11}^{(1)} + \tilde{\sigma}_{12}^{(1)} \theta_1 + \frac{\rho_I}{\rho_{II}} M^2 \theta_1 \tilde{v}_1^{(1)} &= 0, \\ \tilde{\sigma}_{21}^{(1)} + \tilde{\sigma}_{22}^{(1)} \theta_1 + \frac{\rho_I}{\rho_{II}} M^2 \theta_1 \tilde{v}_2^{(1)} &= 0, \\ (\tilde{\sigma}_{11}^{(1)} - \tilde{\sigma}_{11}^{(2)}) + (\tilde{\sigma}_{12}^{(1)} - \tilde{\sigma}_{12}^{(2)}) \theta_2 &= \frac{\rho_I}{\rho_{II}} M^2 d^{(1)} (\tilde{v}_1^{(1)} + \tilde{v}_2^{(1)} \theta_2 - \theta_2) (\tilde{v}_1^{(1)} - \tilde{v}_1^{(2)}), \\ (\tilde{\sigma}_{21}^{(1)} - \tilde{\sigma}_{21}^{(2)}) + (\tilde{\sigma}_{22}^{(1)} - \tilde{\sigma}_{22}^{(2)}) \theta_2 &= \frac{\rho_I}{\rho_{II}} M^2 d^{(1)} (\tilde{v}_1^{(1)} + \tilde{v}_2^{(1)} \theta_2 - \theta_2) (\tilde{v}_2^{(1)} - \tilde{v}_2^{(2)}), \\ (\tilde{\sigma}_{11}^{(4)} - \tilde{\sigma}_{11}^{(3)}) + (\tilde{\sigma}_{12}^{(4)} - \tilde{\sigma}_{12}^{(3)}) \theta_3 &= M^2 d^{(4)} (\tilde{v}_1^{(4)} + \tilde{v}_2^{(4)} \theta_3 - \theta_3) (\tilde{v}_1^{(4)} - \tilde{v}_1^{(3)}), \\ (\tilde{\sigma}_{21}^{(4)} - \tilde{\sigma}_{21}^{(3)}) + (\tilde{\sigma}_{22}^{(4)} - \tilde{\sigma}_{22}^{(3)}) \theta_3 &= M^2 d^{(4)} (\tilde{v}_1^{(4)} + \tilde{v}_2^{(4)} \theta_3 - \theta_3) (\tilde{v}_2^{(4)} - \tilde{v}_2^{(3)}), \\ \tilde{\sigma}_{11}^{(4)} + \tilde{\sigma}_{12}^{(4)} \theta_4 + M^2 (\tilde{v}_{10} + \tilde{v}_{20} \theta_4 - \theta_4) (\tilde{v}_{10} - \tilde{v}_1^{(4)}) &= 0, \\ \tilde{\sigma}_{21}^{(4)} + \tilde{\sigma}_{22}^{(4)} \theta_4 + M^2 (\tilde{v}_{10} + \tilde{v}_{20} \theta_4 - \theta_4) (\tilde{v}_{20} - \tilde{v}_2^{(4)}) &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

В (15) и далее приняты обозначения: $M^2 = \frac{\rho_{II} S^2}{\lambda_{II} + 2\mu_{II}} = \frac{S^2}{c_I^2}$, $c_I = \sqrt{\frac{\lambda_{II} + 2\mu_{II}}{\rho_{II}}}$, $\tilde{\sigma}_{ij}^{(l)} = \frac{\sigma_{ij}^{(l)}}{\lambda_{II} + 2\mu_{II}}$, $\tilde{v}_i^{(l)} = \frac{v_i^{(l)}}{S}$,

$$\tilde{v}_{10} = \frac{v_{10}}{S}, \quad \tilde{v}_{20} = \frac{v_{20}}{S}, \quad d^{(1)} = \frac{\rho^{(1)}}{\rho_I} = (1-a_1)(1-f_1) - b_1 e_1, \quad d^{(4)} = \frac{\rho^{(4)}}{\rho_{II}} = (1-a_4)(1-f_4) - b_4 e_4.$$

Для замыкания системы (14), (15) в случае жесткого контакта соударяющихся тел используем соотношения (9), (11) и (13), а при проскальзывании — (9), (12) и (13). Таким образом, из системы нелинейных алгебраических уравнений удается определить все константы интегрирования a, b, e, f в областях 1–4 (Рис. 2), положение ударных волн $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ и контактной границы θ_L .

Теперь рассмотрим решение задачи в постановке с тремя ударными волнами и волной Римана (Рис. 2, в). Предлагаемый далее алгоритм в общих чертах повторяет алгоритм, описанный в [13]. Отличия состоят в использовании других граничных условий.

Шаг 1. Динамические условия совместности разрывов (2) и условия непрерывности перемещений на продольной ударной волне Σ_1 приводят к системе четырех нелинейных алгебраических уравнений относительно пяти неизвестных $\theta_1, a_1, b_1, e_1, f_1$:

$$\begin{cases} a_1\theta_1 - b_1 = 0, \\ e_1\theta_1 - f_1 = 0, \\ \tilde{\sigma}_{11}^{(1)} + \tilde{\sigma}_{12}^{(1)}\theta_1 + \frac{\rho_I}{\rho_{II}}M^2\theta_1\tilde{v}_1^{(1)} = 0, \\ \tilde{\sigma}_{21}^{(1)} + \tilde{\sigma}_{22}^{(1)}\theta_1 + \frac{\rho_I}{\rho_{II}}M^2\theta_1\tilde{v}_2^{(1)} = 0. \end{cases}$$

Задавая произвольно θ_1 (положение ударного фронта) и выбирая в качестве первого приближения решение с четырьмя ударными волнами, находим a_1, b_1, e_1, f_1 .

Шаг 2. Подставляя в условие (8) параметры движения в зоне 1, определяем положение переднего фронта θ_2^+ простой волны.

Шаг 3. Решение в области простой волны $\theta \in [\theta_2^+, \theta_2^-]$ строим путем интегрирования по автомодельной переменной θ системы обыкновенных дифференциальных уравнений, составленной из уравнения движения (7) и условия (8):

$$\begin{cases} A \cdot F''(\theta) + B \cdot \Phi''(\theta) = 0, \\ AD - BC = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Для ее численного интегрирования используем неявную конечно-разностную схему с трехточечным шаблоном $\{\theta_{(i-1)}, \theta_{(i)}, \theta_{(i+1)}\}$ и постоянным шагом $h = (\theta_2^- - \theta_2^+) / n$. Разбивая отрезок $[\theta_2^+, \theta_2^-]$ на элементы, получаем систему точек $\theta_2^+ = \theta_{(0)} > \theta_{(1)} > \theta_{(2)} > \dots > \theta_{(n)} = \theta_2^-$, в которых аппроксимируем производные

$$\begin{aligned} \text{функций } F \text{ и } \Phi \text{ согласно конечно-разностным формулам: } F'_{(i)} &= \frac{F_{(i+1)} - F_{(i-1)}}{2h}, \quad \Phi'_{(i)} = \frac{\Phi_{(i+1)} - \Phi_{(i-1)}}{2h}, \\ F''_{(i)} &= \frac{F_{(i+1)} - 2F_{(i)} + F_{(i-1)})}{h^2}, \quad \Phi''_{(i)} = \frac{\Phi_{(i+1)} - 2\Phi_{(i)} + \Phi_{(i-1)})}{h^2} \quad (1 \leq i \leq n); \quad F'_{(0)} = \frac{-3F_{(0)} + 4F_{(1)} - F_{(2)})}{2h}, \\ F'_{(n)} &= \frac{3F_{(n)} - 4F_{(n-1)} + F_{(n-2)})}{2h}, \quad \Phi'_{(0)} = \frac{-3\Phi_{(0)} + 4\Phi_{(1)} - \Phi_{(2)})}{2h}, \quad \Phi'_{(n)} = \frac{3\Phi_{(n)} - 4\Phi_{(n-1)} + \Phi_{(n-2)})}{2h}. \end{aligned}$$

На переднем фронте волны Римана $[\theta_2^+, \theta_2^-]$ значения искомых функций F и Φ и их производных связаны с параметрами в области 1 соотношениями

$$F_{(0)} = a_1\theta_2^+ - b_1, \quad \Phi_{(0)} = e_1\theta_2^+ - f_1, \quad \Phi'_{(0)} = a_1, \quad \Phi'_{(0)} = e_1. \quad (17)$$

Положение заднего фронта θ_2^- простой волны заранее неизвестно, его приходится уточнять непосредственно во время счета, согласовывая получаемые значения с граничными условиями задачи. Записывая в каждом внутреннем узле $\theta_{(1)}, \theta_{(2)}, \dots, \theta_{(n-1)}$ два дифференциальных уравнения (16) в конечно-разностной форме, приходим, с учетом (17), к замкнутой системе $2(n+1)$ нелинейных алгебраических уравнений относительно $2(n+1)$ неизвестных $F_{(i)}, \Phi_{(i)}$ ($1 \leq i \leq n$). Установив численное решение системы, определяем константы a, b, e, f в зоне 2 из соотношений

$$F_{(n)} = a_2\theta_2^- - b_2, \quad \Phi_{(n)} = e_2\theta_2^- - f_2, \quad \Phi'_{(n)} = a_2, \quad \Phi'_{(n)} = e_2. \quad (18)$$

Шаг 4. Вычисленные по формулам (18) параметры в области 2 должны удовлетворять условиям совместности разрывов на ударных волнах Σ_3, Σ_4 и граничным условиям на OL . Условия совместности приводят к восьми алгебраическим уравнениям:

$$\begin{aligned}
a_4\theta_3 - b_4 &= a_3\theta_3 - b_3, & e_4\theta_3 - f_4 &= e_3\theta_3 - f_3, & a_4\theta_4 - b_4 &= 0, & e_4\theta_4 - f_4 &= 0, \\
(\tilde{\sigma}_{11}^{(4)} - \tilde{\sigma}_{11}^{(3)}) + (\tilde{\sigma}_{12}^{(4)} - \tilde{\sigma}_{12}^{(3)})\theta_3 &= M^2 d^{(4)} (\tilde{v}_1^{(4)} + \tilde{v}_2^{(4)}\theta_3 - \theta_3) (\tilde{v}_1^{(4)} - \tilde{v}_1^{(3)}), \\
(\tilde{\sigma}_{21}^{(4)} - \tilde{\sigma}_{21}^{(3)}) + (\tilde{\sigma}_{22}^{(4)} - \tilde{\sigma}_{22}^{(3)})\theta_3 &= M^2 d^{(4)} (\tilde{v}_1^{(4)} + \tilde{v}_2^{(4)}\theta_3 - \theta_3) (\tilde{v}_2^{(4)} - \tilde{v}_2^{(3)}), \\
\tilde{\sigma}_{11}^{(4)} + \tilde{\sigma}_{12}^{(4)}\theta_4 + M^2 (\tilde{v}_{10} + \tilde{v}_{20}\theta_4 - \theta_4) (\tilde{v}_{10} - \tilde{v}_1^{(4)}) &= 0, \\
\tilde{\sigma}_{21}^{(4)} + \tilde{\sigma}_{22}^{(4)}\theta_4 + M^2 (\tilde{v}_{10} + \tilde{v}_{20}\theta_4 - \theta_4) (\tilde{v}_{20} - \tilde{v}_2^{(4)}) &= 0.
\end{aligned} \tag{19}$$

Граничные условия на полуплоскости контакта задаются в случае проскальзывания соотношениями (9), (12) и (13), а при жестком контакте — (9), (11) и (13). Варьируя в процессе счета задаваемые величины θ_1 и θ_2^- , находим такие значения a_2 , b_2 , e_2 , f_2 , которые удовлетворяют условиям совместности (19) и граничным условиям на OL .

Решения задачи в присутствии в ее постановке волн, изображенных на рисунках 2, б и 2, з, строятся аналогично. Получив все математически возможные решения краевой задачи (в общем случае четыре), сравниваем их между собой, одновременно проверяя выполнение двух критериев. Во-первых, ревизируем на каждой ударной волне термодинамическое условие совместности (4). Если соотношение (4) не выполняется для некоторой волновой картины, то соответствующее решение исключаем из числа возможных. Еще одним ограничением на существование ударных волн является условие эволюционности. Если в результате сопоставления двух решений оказывается, что фронт ударной волны занимает промежуточное положение «внутри» веера простой волны, полагаем такую волну неэволюционной и выбираем решение с волной Римана.

Условие эволюционности считается более строгим, чем условие неубывания энтропии на ударной волне [7]. Однако в рассмотренной задаче оба критерия оказались равноправными при выбранных диапазонах параметров. Аналогичный вывод был получен авторами при решении других автомодельных задач [5, 9] при свойствах среды, определяемых тем же потенциалом W . Следовательно, можно предположить, что эквивалентность двух критериев выбора единственного решения связана с видом упругого потенциала.

5. Результаты вычислительных экспериментов

Вычислительные эксперименты показали, что при различных параметрах задачи в соударяющихся телах могут возникать комбинации ударных и простых волн, приведенные на рисунке 2. При этом каждая из них может иметь место как в случае сцепления тел, так и при проскальзывании. Приведенные ниже результаты получены при следующих параметрах: для тела I — $\tilde{\lambda}_I = 0,4$, $\tilde{\mu}_I = 0,3$, $\tilde{\kappa}_I = -1,0$, $\tilde{\chi}_I = -1,0$, $\tilde{\eta}_I = -1,0$; для тела II — $\tilde{\lambda}_{II} = 0,4$, $\tilde{\mu}_{II} = 0,3$, $\tilde{\kappa}_{II} = -10,0$, $\tilde{\chi}_{II} = -10,0$, $\tilde{\eta}_{II} = -10,0$; плотности соударяющихся тел соотносятся как $\rho_{II} = 2\rho_I$. Выбранные параметры не ассоциируются с конкретными материалами. В расчетах они варьировались в достаточно широком диапазоне. Решения с другими упругими модулями качественно не отличаются от приводимого далее.

На рисунке 3 представлены диаграммы распределения напряжений в соударяющихся телах, полученные при $\varphi = 1^\circ$, $v_{10} = 0,3c_1$, $v_{20} = 0,2c_1$, $k = 0,5$ и соответствующие случаю сцепления тел. При данных параметрах реализуется волновая картина, показанная на рисунке 2, з. Если при неизменных остальных параметрах увеличим угол соударения до $\varphi = 5^\circ$, получим другую волновую картину (Рис. 2, б). Далее при графическом изображении результатов расчетов используются безразмерные величины напряжений $\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} / (\lambda_{II} + 2\mu_{II})$ и скоростей v_k / c_1 .

Изменение плотности и компоненты v_2 вектора скорости в контактных областях 2 и 3 в зависимости от коэффициента трения k показано на рисунках 4 и 5 при значениях параметров $\varphi = 1^\circ$, $v_{10} = v_{20} = 0,3c_1$. Пороговая величина коэффициента трения k^* , при которой графики функций имеют излом, соответствует изменению характера взаимодействия тел: при $k < k^*$ происходит скольжение граничных плоскостей соударяющихся тел; $k = k^*$ соответствует сцеплению. Для остальных параметров задачи φ , v_{10} , v_{20} также можно указать пороговые значения, при которых меняется характер взаимодействия тел.

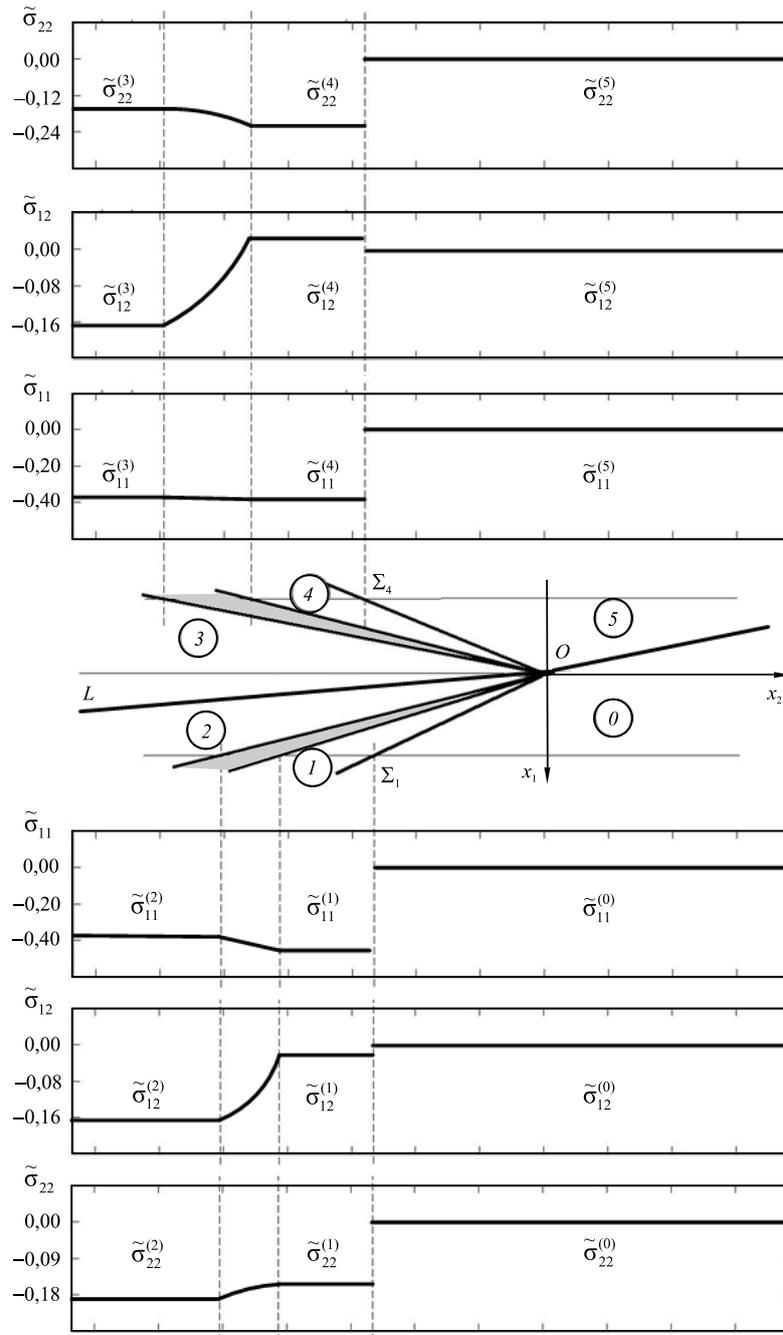


Рис. 3. Диаграммы распределения напряжений при $\varphi = 1^\circ$, $v_{10} = 0,3c_1$, $v_{20} = 0,2c_1$, $k = 0,5$, соответствующие сцеплению тел; на ударных волновых фронтах напряжения изменяются скачкообразно, а на волнах Римана – непрерывно

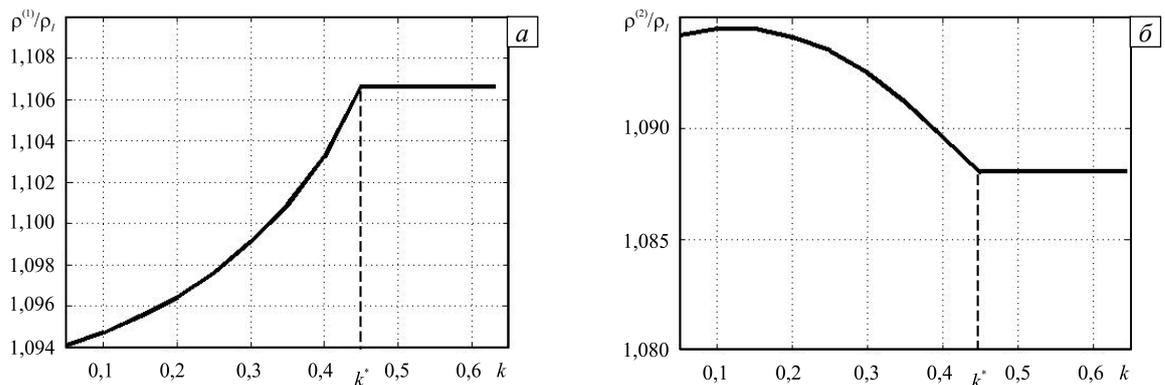


Рис. 4. Зависимость относительного изменения плотности в областях: 1 (а), 2 (б), 3 (в), 4 (г) от коэффициента трения k

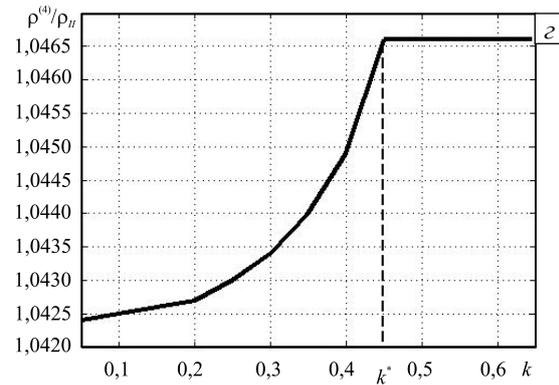
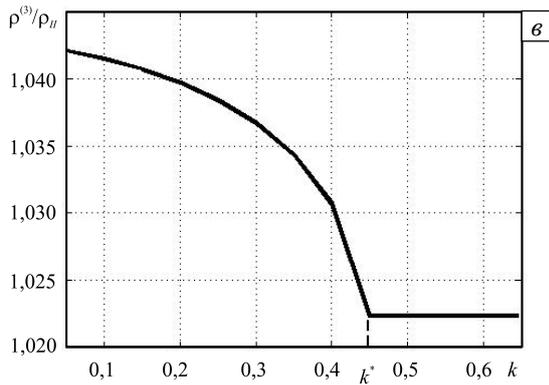


Рис. 4. Продолжение

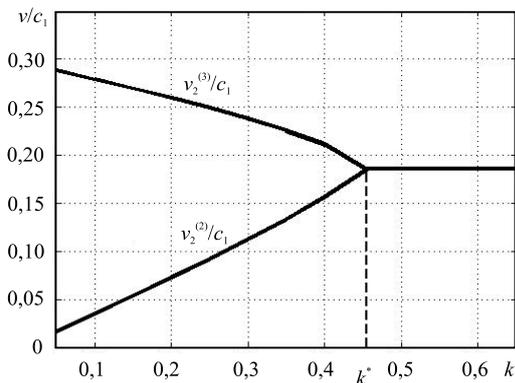


Рис. 5. Зависимость компонент вектора скорости в контактных областях от коэффициента трения k

Рисунок 6 содержит зависимости положения ударных фронтов Σ_1 , Σ_4 и контактной границы OL от угла φ . В данных экспериментах использованы параметры $\varphi = 1^\circ$, $v_{10} = 0,2c_1$, $v_{20} = 0,3c_1$; коэффициент трения соответствует условию сцепления соударяющихся тел. Из рисунка 6, б видно, что неподвижное тело деформируется больше, чем движущееся ($\varphi/2 < \beta_L < \varphi$). Это связано с тем, что упругие модули для тела II выбраны на порядок больше, чем для тела I.

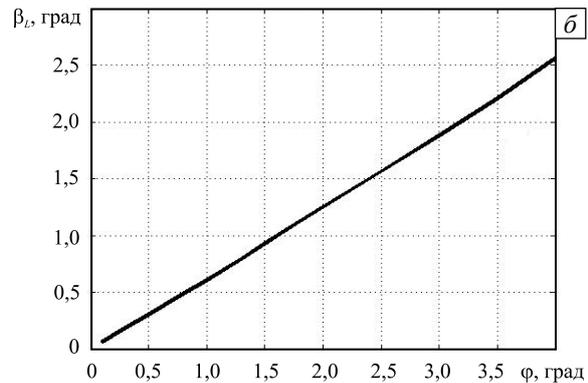
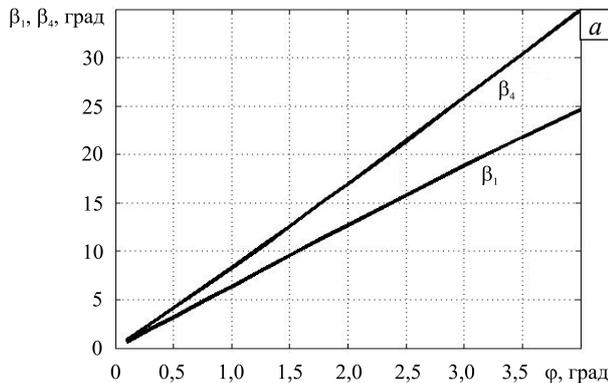


Рис. 6. Зависимости положения продольных ударных волновых фронтов Σ_1 и Σ_4 (а) и контактной границы OL (б) от угла соударения φ

6. Заключение

На основе метода конечных разностей построен алгоритм решения плоской автомодельной задачи исследования соударения двух упругих тел с плоскими непараллельными границами, позволяющий выбрать единственное решение из числа математически допустимых. В качестве критериев выбора единственного решения использованы условие эволюционности ударных волн и термодинамическое условие совместности разрывов, следующее из второго закона термодинамики.

Численно исследовано напряженное состояние, соответствующее возможному волновым картинам, сопровождающим процесс динамического деформирования. Описываемый алгоритм предполагает одновременное решение краевой задачи при всех возможных комбинациях ударных и простых

волн и последующий выбор единственного решения, физически обоснованного в результате сопоставления найденных.

Установлено существование пороговых значений для параметров, характеризующих процесс соударения (для угла между контактирующими плоскостями, скорости соударения, коэффициента трения), при которых происходит изменение волновой картины. Также отмечено существование пороговых значений параметров задачи, при которых меняется характер взаимодействия тел: проскальзывание или сцепление. Несмотря на то, что условие эволюционности считается более строгим, чем условие неубывания энтропии на ударной волне [7], в рассмотренной задаче так же, как в работах [5, 9], оба критерия оказались равноправными при выбранных диапазонах параметров. Не претендуя на общность, можем сделать вывод об эквивалентности использованных критериев для автомодельных краевых задач в рамках математической модели с принятым в работе упругим потенциалом. Однако на основании проведенных вычислительных экспериментов нельзя утверждать, что этот вывод справедлив для нестационарных задач.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект №11-01-98514-р_восток_a).

Литература

1. Перссон К.О. Давление в ударной волне при косом соударении. Теоретическое исследование // Нестационарные процессы в деформируемых телах / Под ред. А.С. Вольмира. – М.: Мир, 1976. – С. 132-149.
2. Агапов И.Е., Буренин А.А., Резунов А.В. О соударении двух нелинейно-упругих тел с плоскими границами // Прикладные задачи механики деформируемых сред / Под ред. В.П. Мясникова и В.В. Пикуля.– Владивосток: ДВО АН СССР, 1991. – С. 206-215.
3. Дудко О.В., Манцыбора А.А. О соударении упругих тел, имеющих плоские границы и по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию // Проблемы механики сплошных сред и элементов конструкций / Под ред. А.А. Буренина и В.П. Мясникова. – Владивосток: Дальнаука, 1998. – С. 166-178.
4. Мясников В.П., Олейников А.И. Основные общие соотношения модели изотропно-упругой разнсопротивляющейся среды // ДАН. – 1992. – Т. 322, № 1. – С. 57-60.
5. Дудко О.В., Потянихин Д.А. О косом ударе жестким телом, имеющим плоскую границу, по нелинейному упругому полупространству // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2009. – Т. 9, № 4(2). – С. 32-40.
6. Буренин А.А., Лапыгин В.В. Об отражении плоской продольной ударной волны постоянной интенсивности от плоской жесткой границы нелинейной упругой среды // ПМТФ. – 1985. – № 5. – С. 125-129.
7. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Нелинейные волны в упругих средах. – М.: Московский лицей, 1998. – 412 с.
8. Kulikovskii A.G., Chugainova A.P., Sveshnikova E.I. On the nonuniqueness of solutions to the nonlinear equations of elasticity theory // J. Eng. Math. – 2006. – V. 55, N. 1-4. – P. 97-110. [DOI](#)
9. Дудко О.В., Потянихин Д.А. Автомодельная задача нелинейной динамической теории упругости о взаимодействии продольной ударной волны с жесткой преградой // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2008. – Т. 1, № 2. – С. 27-37. [DOI](#)
10. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. – Владивосток: Дальнаука, 1998. – 528 с.
11. Буренин А.А., Чернышов А.Д. Ударные волны в изотропном упругом пространстве // ПММ. – 1978. –Т. 42, № 4. – С. 711-717.
12. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
13. Потянихин Д.А. Алгоритм решения автомодельных задач динамики ударного деформирования твердого тела // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 8. – С. 413-423.

Поступила в редакцию 06.11.12; опубликована в электронном виде 15.07.13

Сведения об авторах:

Буренин Анатолий Александрович, дфмн, проф., чл.-корр. РАН, дир., Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН (ИМИМ ДВО РАН), 681005, Комсомольск-на-Амуре, ул. Металлургов, д. 1; E-mail: byrenin@dvo.ru

Дудко Ольга Владимировна, кфмн, снс, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН (ИАПУ ДВО РАН), 690041, Владивосток, ул. Радио, д. 5; E-mail: dudko@iacp.dvo.ru

Потянихин Дмитрий Андреевич, кфмн, нс, ИАПУ ДВО РАН; E-mail: potyanikhin@iacp.dvo.ru