

DOI: [10.7242/1999-6691/2013.6.2.16](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2013.6.2.16)

УДК 519.651:539.3

ЧИСЛЕННАЯ ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ, ПОЛУЧЕННЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СОВРЕМЕННЫХ ИСПЫТАТЕЛЬНЫХ МАШИН, ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ РЕОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

А.А. Адамов

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

Рассмотрены процедуры сжатия, сглаживания, фильтрации и корректировки экспериментальных данных, регистрируемых современными испытательными установками и системами сбора данных в виде временных рядов. Для достижения кусочно-непрерывной аппроксимации использованы полиномы Чебышева и сплайны наилучшего приближения, проходящие через первую заданную точку на отрезках между соседними точками разрыва первой производной. Реализованы итерационные процедуры построения полиномов и сплайнов с различными критериями оптимальности и селекцией данных.

Ключевые слова: временные ряды, полиномы Чебышева, сплайны наилучшего приближения, кусочно-непрерывная аппроксимация, учет точек разрыва первой производной, критерии оптимальности сплайна, селекция данных

PRIMARY PROCESSING OF EXPERIMENTAL DATA OF MODERN TESTING MACHINE FOR IDENTIFICATION OF RHEOLOGICAL MODELS

A.A. Adamov

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

The procedures of compression, smoothing, filtration and correction of experimental data in the form of time series recorded by modern test machines are considered. The piecewise-continuous approximations are obtained by using Chebyshev polynomials and best spline approximations going through the first prescribed point on the sections between neighboring points of discontinuity in the first derivative. The iteration procedures for constructing polynomials and splines based on different optimality criteria and data selection have been realized.

Key words: time series, Chebyshev polynomials, best approximation by splines, piecewise-continuous approximation, consideration of points of discontinuity in the first derivative, spline optimality criteria, data selection

1. Введение

Развитие экспериментальной техники сопровождается ростом объемов регистрируемой информации в цифровом представлении. Современные экспериментальные установки имеют программное обеспечение, позволяющее сохранять результаты опытов в собственных форматах и экспортировать первичные текстовые файлы данных (ПТФД). Эти файлы, как правило, содержат текстовые и числовые сведения об установке, исследуемом объекте, заданных условиях воздействия и режимах регистрации, а также таблицы результатов измерения величин в различные дискретные моменты времени. Рассмотрим проблемы эффективного и наиболее полного использования таких табличных данных о результатах испытаний образцов на машине Zwick Z100SN5A в задачах идентификации и аттестации реологических моделей механики деформируемого твердого тела (МДТТ).

Структура типичного ПТФД с результатами испытаний при использовании программной оболочки testXpert v9.0 фирмы Zwick&Roel показана на рисунке 1. В текстовом файле между знаками \$ содержится информация о программе испытаний, операторе, испытываемом образце, режимах нагружения и регистрации данных, параметрах испытательной машины и используемых датчиков. Далее идет таблица результатов измерения по выбранным каналам измерения: продолжительность опыта (по таймеру управляющего компьютера), перемещение подвижной траверсы (согласно датчику перемещения траверсы), номинальное удлинение на базе однородного деформирования образца (сведения с длинноходового датчика Multisens), осевая сила (показания датчика силы). Число строк этой таблицы может достигать сотен тысяч, поскольку зависит от запрограммированной длительности опыта, количества заданных шагов дискретизации по времени и разным каналам измерения.

Программной оболочкой testXpert также создается стандартный протокол испытаний серии однотипных образцов. В рамках используемой программы испытаний по усмотрению оператора он может содержать различную графическую и числовую информацию (диаграммы деформирования, модуль Юнга, предел текучести, предельные нагрузки, предельные деформации и тому подобное), результаты простейшей статистической обработки (усредненную диаграмму деформирования, средние значения, значения

\$
8Ступ_релакс_Рез_НИИШП_до_80мм_+25_№40_.ZPV
Оператор: Адамов А.А.
Дата: 28.03.2006
Время: 16:04:38
Материал: Резина НИИШП без ТО
Номер образца: 40
Ширина b0: 6.22 mm
Толщина a0: 6.18 mm
Сечение: 38.4396 mm ²
Расчётная длина: 30 mm
Параллельная длина: 50 mm
Скорость: 100 mm/min
TRS - интервал времени: 0.1 s
TRS - интервал силы: 0.1 N
Замедление при переключении скорости: 1000
Данные машины: 100N5A WN:155186
Датчик перемещения траверсы WN:155186
Датчик силы ID:1 WN:155188 1000 N
Multisens WN:155189
\$
Время испыт.,с Перемещ.тр.,мм Номин.удл.,% Осевая сила,МПа
2.000092e-002, -1.558844e-004, -3.117688e-004, 2.095797e-003
8.000091e-002, -1.558844e-004, -3.117688e-004, 2.050485e-003
1.000009e-001, -1.558844e-004, -3.117688e-004, 2.095797e-003
1.200009e-001, -1.558844e-004, -3.117688e-004, 2.141109e-003
2.200009e-001, -1.558844e-004, -3.117688e-004, 2.277043e-003
3.400009e-001, -2.958437e-005, -5.916875e-005, 2.050485e-003
.....
1.633654e+004, 6.019156e-004, 1.203831e-003, -6.966521e-003
1.633734e+004, 6.019156e-004, 1.203831e-003, -7.102456e-003
1.633762e+004, 6.019156e-004, 1.203831e-003, -7.057145e-003

Рис. 1. Типичная структура файла данных, полученного на машине Zwick Z100SN5A

среднеквадратичных отклонений и коэффициентов вариации по выбранным числовым характеристикам). При проведении опытов, согласно различным стандартам на механические испытания, обычно потребность в дополнительной обработке полученных экспериментальных данных не возникает. Стандартный протокол о проведенной серии испытаний всегда можно модифицировать на основе сохраненной в собственном формате данных информации (файл с расширением *.ZSE).

В различных реологических моделях МДТТ ситуация усложняется необходимостью учета временных зависимостей регистрируемых переменных. Например, сравнительный анализ методик идентификации и аттестации моделей вязкоупругости, проделанный в [1–3], свидетельствует, что наиболее адекватными являются методики, непосредственно использующие полные измеренные истории деформации $\varepsilon(t)$, напряжения $\sigma(t)$ и/или их скоростей $d\varepsilon(t)/dt$, $d\sigma(t)/dt$. Введение допущений о мгновенном нагружении или постоянстве скоростей деформирования на активных участках нагружения и разгрузки, о постоянстве деформации на участках релаксации приводит к ухудшению адекватности идентифицируемых моделей [3].

Для иллюстрации неидеального поведения регистрируемых величин на рисунке 2 приведены фрагменты историй поведения во времени номинального напряжения $\sigma(t) = P(t)/S_0$ ($P(t)$ — осевая сила, S_0 —

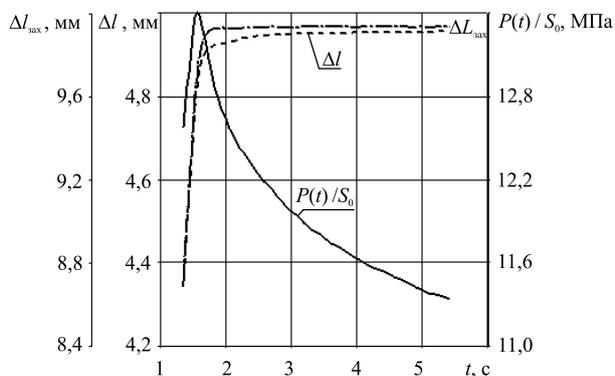


Рис. 2. Начальный участок кривой релаксации с историями перемещения траверсы и удлинения на базе однородного деформирования

площадь поперечного сечения образца в недеформированном состоянии), перемещения подвижного захвата $\Delta L_{\text{зах}}(t)$ и удлинения базы однородного деформирования образца $\Delta l(t)$ в окрестности начала релаксационного периода (в образце из резины). Инерционность подвижной траверсы и измерительных кареток датчика деформации, податливость элементов машины, нелинейное формоизменение образца вне базы однородного деформирования при уменьшающейся осевой силе — основные факторы, обеспечивающие наблюдаемое на рисунке 2 нелинейное поведение величин $\Delta L_{\text{зах}}(t)$ и $\Delta l(t)$ после выключения привода испытательной машины.

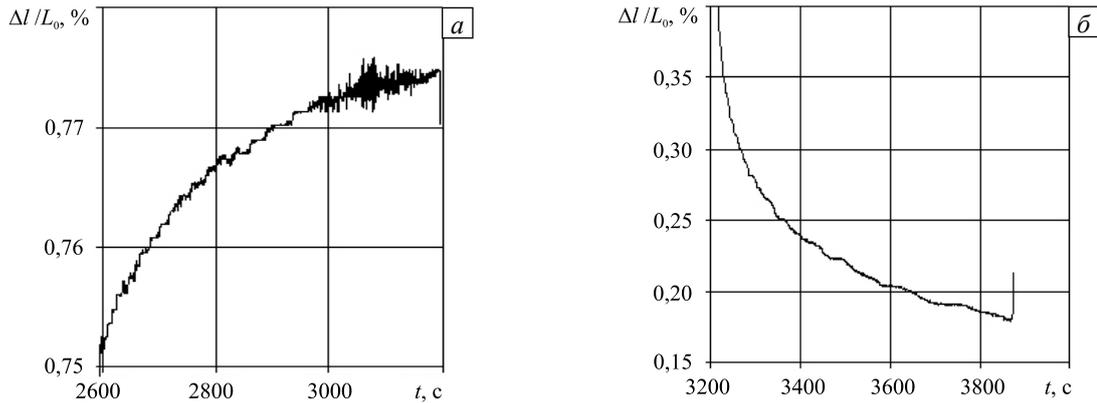


Рис. 3. История относительного удлинения образца полиэтилена на интервале релаксации при неподвижной трассе (а) и на интервале его свободного сокращения после разгрузки (б)

На рисунке 3 также показаны типичные истории деформации $\varepsilon(t) = \Delta l(t)/L_0$ (L_0 — база измерения датчиком деформации Multisens) на интервале релаксации образца полиэтилена (5900 точек регистрации при неподвижной трассе) и на интервале его последующего свободного сокращения после разгрузки (5800 точек регистрации при нулевой осевой нагрузке). Эти данные демонстрируют широкий частотный спектр флуктуаций измеряемой величины и особенности работы датчика Multisens, реагирующего на смещения ножевых опор при деформации образца.

Программы численной идентификации и аттестации моделей МДТТ используют процедуры дифференцирования и интегрирования историй деформирования или нагружения, поэтому прямое использование временных рядов, представленных в таблице ПТФД, неэффективно. Необходима первичная обработка этих данных, включающая в себя их фильтрацию, преобразование, сжатие и корректировку.

Комплексное решение перечисленных задач возможно с помощью кусочно-непрерывной аппроксимации опытных данных полиномами или сплайнами наилучшего приближения с учетом точек разрыва первой производной и наложением условий прохождения кривой через первую заданную точку.

Одним из подходящих для решения поставленной задачи способов является применение Fortran-процедуры SISPRG [4, 5], подбирающей сплайн наилучшего приближения на заданной совокупности точек и осуществляющей селекцию данных. Но обеспечить в процедуре условие прохождения сплайна через первую заданную точку можно лишь приближенно, с помощью весовых коэффициентов.

Аналогичная ситуация существовала при использовании *B*-сплайнов в рамках библиотеки IMSL 77. Тогда на концах отрезка аппроксимации можно было выполнить граничные условия лишь по производным различного порядка. В обновленной библиотеке IMSL 90 функции SPLINE_CONSTRAINTS, SPLINE_FITTING, SPLINE_VALUES устраняют этот недостаток, так как позволяют строить сглаживающий сплайн с заданным числом точек сопряжения при выполнении граничных условий, по значениям аппроксимируемой функции.

Использование полиномов Чебышева также дает возможность решить аналогичную задачу подбора аппроксимирующего полинома заданной или достаточной степени, проходящего через первую выбранную точку. Проблема заключается в определении у полинома наилучшей степени согласно выбранному критерию оптимальности [4–5].

Далее приведены результаты решения поставленной выше задачи с помощью сплайнов наилучшего приближения (СНП) и полиномов наилучшего приближения Чебышева (ПНПЧ).

2. Общее описание процедуры обработки

Для зарегистрированной переменной $y(t)$ имеем дискретный временной ряд с произвольным шагом по времени $[(t_k, y_k), k = \overline{1, N}]$, где N — число точек измерения. Среди этих точек на основе графического анализа данного ряда в порядке возрастания времени устанавливаем точки разрыва первой производной (ТРПП) $(t^{(i)}, i = \overline{0, N_p}, N_p \leq N$, где N_p — число ТРПП). Первая ТРПП должна соответствовать началу опыта $(t^{(0)} \geq t_1)$. Одновременно с определением первого разрыва принимается решение о значении $\tilde{y}_0^{(1)} \equiv \tilde{y}(t^{(0)})$ и преобразовании сдвига для всех y_k ($k = \overline{1, N}$) — сдвиг принимается равным разности измеренного $y(t^{(0)})$ и назначенного $\tilde{y}(t^{(0)})$ значений.

Необходимость проведения сдвига диктуется тем, что в программе испытаний обычно задается малая предварительная нагрузка на образец для компенсации всех зазоров в соединениях испытательной машины и/или выпрямления образца по типу натяжения нити. При обработке данных тензометрии аналогичная проблема обуславливается неточной исходной балансировкой тензомостов. Если $y(t^{(0)})$ и значения $\tilde{y}(t^{(0)})$ не совпадают и принято решение о выполнении преобразования сдвига, то оно выполняется до построения всех аппроксимирующих зависимостей.

Практика использования сдвига по оси ординат для данных тензометрии выявила логическую ошибку в сдвиге по измеренному значению $y(t^{(0)})$ — прежде чем его делать, необходимо предварительно сгладить переменную на первом отрезке между ТРПП для вычисления сглаженного значения $\bar{y}(t^{(0)})$, которое и следует использовать вместо $y(t^{(0)})$.

Пример таких первичных данных тензометрии, зашумленных высокочастотными помехами со значительной амплитудой, показан на рисунке 4, а (частота опроса 1 кГц; приведено одно значение из пятидесяти измеренных при испытании на растяжение образца из углепластика с наклеенными тензорезисторами). Измеренное значение $y(t^{(0)})$ поперечной деформации ε_2 в окрестности начала опыта $t^{(0)} \approx 4,85$ с имеет размах помехи — это приблизительно десятки процентов от диапазона регистрируемой величины.

Предварительная процедура сглаживания для вычисления $\bar{y}(t^{(0)})$ выполняется библиотечной Fortran-подпрограммой DCSSMH [6] с заданием естественных граничных условий. Если существует необходимость преобразования сдвига по оси ординат всех измеренных значений $y(t^{(k)})$, то сдвиг, независимо от уровня помех, выполняется на величину $\tilde{y}(t^{(0)}) - \bar{y}(t^{(0)})$. Назначение $t^{(0)}$ остается в этом случае творческой задачей, решаемой исследователем на основе различных практических обстоятельств.

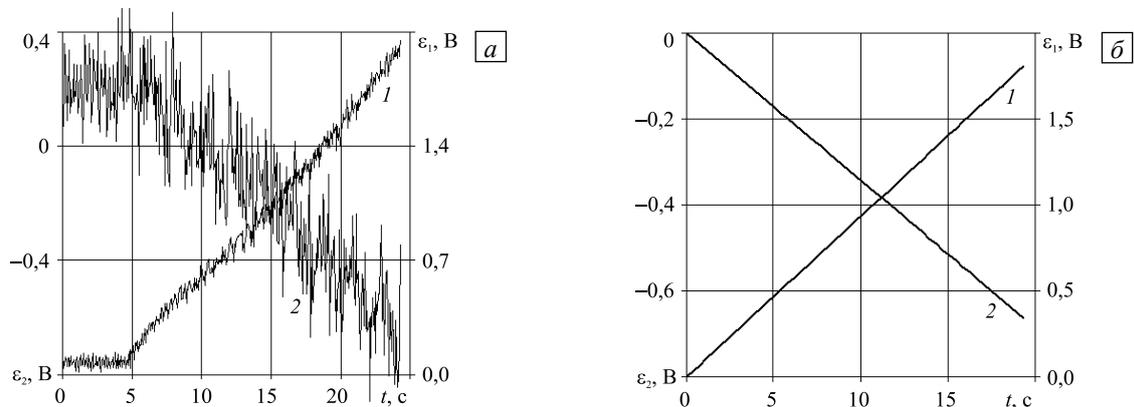


Рис. 4. Исходные (а) и аппроксимированные сплайном наилучшего приближения (б) истории продольной ε_1 (кривая 1, коэффициент усиления $k_{\text{усил}} = 200$) и поперечной ε_2 (кривая 2, $k_{\text{усил}} = 2000$) деформации

Затем при визуальном графическом анализе для каждого j -го интервала времени ($j = \overline{1, N_p}$) при числе точек наблюдения N_j в зависимости от характера поведения $y(t)$ на полуотрезке между соседними ТРПП $[t^{(j-1)}, t^{(j)})$ выбирается обычная или логарифмическая нормированная локальная шкала времени ξ , имеющая значение 0 в левой точке. Значения глобального времени наблюдения t_k преобразуются в локальные значения ξ_i ($i = \overline{1, N_j}$; $\xi_1 = 0$). Использование логарифмической шкалы времени для участков кривых, соответствующих режимам релаксации и ползучести, позволяет существенно уменьшить число точек сопряжения сплайна (или порядок полинома Чебышева) для достижения удовлетворительной точности аппроксимации на этих участках.

Также для каждого временного интервала априори визуально оценивается и задается максимальное число точек сопряжения кубических сплайнов (максимальный порядок ПНПЧ) n_j^{max} (задание максимального числа точек гарантирует прекращение итерационного процесса в тех редких случаях, когда отсутствует минимум величины, выбранной в качестве критерия на j -м отрезке).

Далее на каждом j -м ($j = \overline{1, N_p}$) интервале времени между соседними ТРПП, в зависимости от количества точек измерения N_j , строится аппроксимация при $N_j = 2 \div 4$ в виде обычных интерполяционных полиномов степени от 1 до 3, при $N_j > 4$ — СНП или ПНПЧ, проходящих через первую заданную точку $y(t^{(j-1)}) = y_0^{(j)}$.

При итерационном подборе оптимального числа точек сопряжения сплайна n_j (с равномерным распределением узлов сопряжения на отрезке аппроксимации — «кардинального» сплайна [6]) это число варьируется от -2 (линейная аппроксимация — линейная регрессия) до заданного n_j^{\max} . Для ПНПЧ при подборе оптимального порядка полинома порядок варьируется от 1 до заданного максимального значения n_j^{\max} .

Найденное число точек сопряжения сплайна (или порядок полинома Чебышева) определяется четырьмя последовательно срабатывающими факторами: числом точек измерения, достигнутым уровнем дисперсии остатков, выбранным критерием оптимальности сплайна (полинома Чебышева), заданным максимальным числом n_j^{\max} точек сопряжения (порядком полинома Чебышева). Наилучшее приближение получается при выходе из итерационного процесса подбора только по критерию оптимальности, в остальных случаях строится аппроксимация согласно задаваемым ограничениям.

Для $j > 1$ в качестве первой заданной точки $\tilde{y}_0^{(j)} = \tilde{y}^{(j-1)}(t^{(j-1)})$ принимается значение, вычисленное по аппроксимации предыдущего отрезка. Таким способом достигается непрерывность аппроксимирующей функции в ТРПП. Использование СНП является более приемлемым по сравнению с ПНПЧ по ряду известных обстоятельств, практически важных при первичной обработке экспериментальных данных: полиномы не так универсальны при аппроксимации произвольных функций; с ростом порядка полинома ухудшается обусловленность матрицы системы линейных алгебраических уравнений для нахождения его коэффициентов.

Во внутренних узлах сплайнов (при числе точек сопряжения $n_j \geq 1$) для каждого j -го отрезка аппроксимации выполняются условия непрерывности самой функции и её первой производной. По второй производной для граничных и внутренних узлов сплайнов 3-й степени реализуется выбор из трех комбинаций условий:

1. $y''(t)$ разрывна во внутренних узлах и произвольна в граничных узлах (сплайн с дефектом 2);
2. $y''(t)$ непрерывна во внутренних узлах и произвольна в граничных узлах (сплайн с дефектом 1);
3. $y''(t)$ непрерывна во внутренних узлах и задана в граничных узлах $y''(t^{(j-1)}) = y''(t^{(j)}) = 0$ (естественный сплайн с дефектом 1).

Здесь дефект сплайна — это разность между степенью сплайна и наивысшим порядком непрерывной на отрезке производной. Последний тип граничных условий позволяет получить СНП максимальной гладкости.

3. Построение сплайна наилучшего приближения, проходящего через первую заданную точку

Представленные числовыми рядами $[(t_k, y_k), k = \overline{1, N}]$ данные в значениях зависимой регистрируемой величины y_k содержат, наряду с интересующей нас регулярной (детерминированной) составляющей, случайные компоненты, обусловленные как статистически неоднородным строением исследуемых образцов материалов, так и внешними факторами, связанными с процессами измерений и преобразования данных. Такие случайные составляющие присущи, в меньшей мере, и независимой переменной t_k , но обычно её считают детерминированной величиной, перенося всё случайное в зависимую переменную y_k .

Аппроксимация опытных данных априори предполагает существование детерминированной связи $y(t)$ между регулярными составляющими этих переменных на статистически значимом уровне, достаточном для её восстановления на фоне случайных составляющих. Задача восстановления такой регрессионной зависимости относится к числу неопределенных и неоднозначных; результат её реализации обуславливается многими субъективными факторами. Поэтому оптимальная аппроксимация для предполагаемого множества разнообразных данных при отсутствии знаний о законах распределения случайных составляющих и их частотном спектре осуществима лишь при использовании алгоритмов на основе многоэтапных итерационных процессов с возможностью коррекции принятых допущений на каждом этапе.

Для построения приближения в рассматриваемой проблеме обработки экспериментальных данных с помощью сглаживающих сплайнов известного порядка часто используется минимизация выражения [7]

$$\delta_j^{(1)}(\bar{a}_j, p) = p \sum_{i=1}^{N_j} \frac{[y_i(\xi_i) - S_p(\bar{a}_j; \xi_i)]^2}{w_i^2} + (1-p) \int_{\xi_1}^{\xi_{N_j}} [S_p''(\bar{a}_j; \xi)]^2 d\xi \rightarrow \min,$$

или близкого к нему выражения [11]

$$\delta_j^{(2)}(\bar{a}_j, \alpha) = \sum_{i=1}^{N_j} \frac{[y_i(\xi_i) - S_\alpha(\bar{a}_j; \xi_i)]^2}{w_i^2} + \alpha \int_{\xi_1}^{\xi_{N_j}} [S_p''(\bar{a}_j; \xi)]^2 d\xi \rightarrow \min,$$

где $S(\bar{a}_j; \xi_i)$ — значение аппроксимирующего сплайна в точке ξ_i , определяемого вектором коэффициентов сплайна (полинома) \bar{a}_j ; w_i — весовые коэффициенты («оценки») заданных значений, отражающие в идеальном случае доверительный интервал измеренных данных; $p \in [0,1]$ — выбранный некоторым образом параметр сглаживания, регулирующий степень приближения к заданным значениям и получение гладкой функции; $\alpha \geq 0$ — параметр сглаживания. Параметры сглаживания p и α либо назначаются априори, либо итерационно уточняются каким-то методом, пригодным для построения наилучшего приближения.

Традиционное использование базиса B -сплайнов для построения искомого сплайна нерационально при предполагаемом большом количестве точек, по которым вычисляется аппроксимирующая функция в процедурах идентификации материальных функций. К существенно меньшей трудоемкости вычислений приводит кусочно-многочленная форма представления сплайна $S(\bar{a}_j; \xi) = a_{jl}^{(0)} + a_{jl}^{(1)}(\xi - \xi_j^{(l)}) + a_{jl}^{(2)}(\xi - \xi_j^{(l)})^2 + a_{jl}^{(3)}(\xi - \xi_j^{(l)})^3$, $\forall \xi \in [\xi_j^{(l-1)}, \xi_j^{(l)}]$ ($l = \overline{1, n_j + 1}$), где $\xi_j^{(l)}$ — внешние и внутренние узлы сплайна для j -го отрезка аппроксимации.

В данной работе математическая постановка задачи аппроксимации сплайном на любом j -м отрезке между соседними ТРПП основана на условной минимизации функции Лагранжа

$$L \equiv \delta_j^{(3)}(\bar{a}_j, \bar{\lambda}_j) = \sum_{i=1}^{N_j} \frac{[y_i(\xi_i) - S(\bar{a}_j; \xi_i)]^2}{w_i^2} - \sum_{k=1}^{m_j} \lambda_{jk} c_k(\bar{a}_j) \rightarrow \min,$$

обеспечивающей удовлетворение системы линейных ограничений $c_k(\bar{a}_j) = 0$ ($k = \overline{1, m_j}$), то есть всех граничных условий и условий стыковки во внутренних узлах сопряжения сплайна методом λ -множителей Лагранжа. Например, для естественного сплайна с одной точкой сопряжения ($n_j = 1$) на отрезке с узлами $\xi_j^{(0)} = 0$, $\xi_j^{(1)}$, $\xi_j^{(2)}$ система линейных ограничений включает шесть уравнений ($m_j = 6$), имеющих вид:

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_{j1}^{(0)} - y_1 = 0, & 1 \\ a_{j1}^{(2)} = 0, & 2 \\ a_{j1}^{(0)} + a_{j1}^{(1)}\xi_j^{(1)} + a_{j1}^{(2)}(\xi_j^{(1)})^2 + a_{j1}^{(3)}(\xi_j^{(1)})^3 - a_{j2}^{(0)} = 0, & 3 \\ a_{j1}^{(1)} + 2a_{j1}^{(2)}\xi_j^{(1)} + 3a_{j1}^{(3)}(\xi_j^{(1)})^2 - a_{j2}^{(1)} = 0, & 4 \\ a_{j1}^{(2)} + 3a_{j1}^{(3)}\xi_j^{(1)} - a_{j2}^{(2)} = 0, & 5 \\ a_{j2}^{(2)} + 3a_{j2}^{(3)}(\xi_j^{(2)} - \xi_j^{(1)}) = 0, & 6 \end{array} \right. \quad (1)$$

где (1₁) и (1₂) — граничные условия для функции и её 2-й производной на левой границе отрезка при $\xi_j^{(0)} = 0$; (1₃)–(1₅) задают непрерывность значений функции, её 1-й и 2-й производных в точке сопряжения $\xi_j^{(1)}$; (1₆) — значение 2-й производной на правой границе отрезка при $\xi_j^{(2)}$.

Условие минимума функции Лагранжа дает систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов сплайна $a_{jl}^{(0)}, a_{jl}^{(1)}, a_{jl}^{(2)}, a_{jl}^{(3)}$ ($l = \overline{1, n_j + 1}$) и λ -множителей Лагранжа λ_{jk} ($k = \overline{1, m_j}$):

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial a_{jl}^{(0)}} = 0, & \frac{\partial L}{\partial a_{jl}^{(1)}} = 0, & \frac{\partial L}{\partial a_{jl}^{(2)}} = 0, & \frac{\partial L}{\partial a_{jl}^{(3)}} = 0 & (l = \overline{1, n_j + 1}); \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_{jk}} = 0 & (k = \overline{1, m_j}). \end{cases} \quad (2)$$

Систему (2) можно упростить благодаря возможности непосредственного определения двух коэффициентов сплайна из ограничений (1₁) и (1₂): $a_{jl}^{(0)} = y_1(\xi_1) = \tilde{y}_0^{(j)}$ (для $a_{11}^{(0)} = y_1(\xi_1) = \tilde{y}_0^{(1)}$ и $a_{j1}^{(2)} = 0$). Исключение этих коэффициентов из системы линейных алгебраических уравнений (2) и соответствующих ограничений из (1) позволяет снизить порядок решаемой системы.

Для устранения численных проблем, связанных с кусочно-многочленной формой представления сплайна, в Fortran-программе использована двойная точность при формировании и решении системы линейных алгебраических уравнений, а также решение этой системы методом Гаусса с выбором главного элемента.

В рассматриваемой задаче важен подбор наилучшего приближения, позволяющего представлять в функции аппроксимации наилучшим образом только регулярную составляющую данных. Очевидно, что повышение степени близости к исходным данным при наличии в них случайных составляющих с какого-то определенного порядка модели будет не приближать функцию аппроксимации к регулярным составляющим данных, а наоборот — увеличивать расхождение. Предельным случаем служит вырождение сглаживающего сплайна в интерполяционный, когда обеспечивается прохождение сплайна через все измеренные точки.

Так как информация о дисперсии и спектральном составе случайных составляющих регистрируемой величины остается неизвестной, оптимальный порядок аппроксимации в данной работе определяется методом последовательных приближений с постепенным наращиванием порядка статистической модели и сравнением количественного различия дисперсии остатков (разностей измеренных и аппроксимированных значений) на каждом новом приближении с её значением на предыдущем приближении по одному из трех критериев оптимальности (для удобства сравнения аппроксимаций на разных участках кривой используется дисперсия остатков, приходящаяся на одну аппроксимируемую точку). Используются критерии сравнения:

- относительная дисперсия, приходящаяся на одну аппроксимируемую точку;
- относительная дисперсия остатков, приходящаяся на одну степень свободы аппроксимации ($n_j - m_j + 1$);
- величина функционала эмпирического риска [4, 5] (с принятым априори значением доверительной вероятности 0,99).

При повышении степени приближения (начиная с уравнения линейной регрессии) значимость различия относительных дисперсий сначала довольно высока, затем она постепенно уменьшается, а в области оптимальных порядков становится малозначимой. После прохождения оптимальной зоны значения дисперсий остатков снова начинают расти с увеличением значимости различий.

Обрабатываемые временные ряды могут содержать редкие выбросы и грубые ошибки, которые вызываются разными причинами. Их влияние устраняется итерационной процедурой селекции (цензуры) [4] данных по следующей схеме:

1. При предварительном графическом анализе данных визуально выявляется необходимость такой цензуры и задается максимально допустимое число n_j^{y0} удаляемых точек на j -м отрезке.
2. Выполняется одно из последовательных приближений функции аппроксимации на j -м отрезке.
3. Вычисляется дисперсия остатков и определяется точка с максимальным остатком.
4. Если остаток в этой точке лежит внутри интервала, определяемого с принятой априори доверительной вероятностью 0,9999 по всем остаткам рассматриваемого отрезка с использованием гипотезы о нормальном распределении остатков и/или $n_j^{y0} = 0$, процедура селекции данных для рассматриваемого приближения функции аппроксимации на j -м отрезке заканчивается.
5. Иначе эта точка удаляется из рассмотрения, строится новое приближение с тем же порядком аппроксимации и оценивается эффект исключения точки по выбранному критерию оптимальности аппроксимации.
6. Если критерий оптимальности не улучшается, точка возвращается в рассматриваемую совокупность; в противном случае принимается $n_j^{y0} = n_j^{y0} - 1$ и совершается возврат в пункт 3.

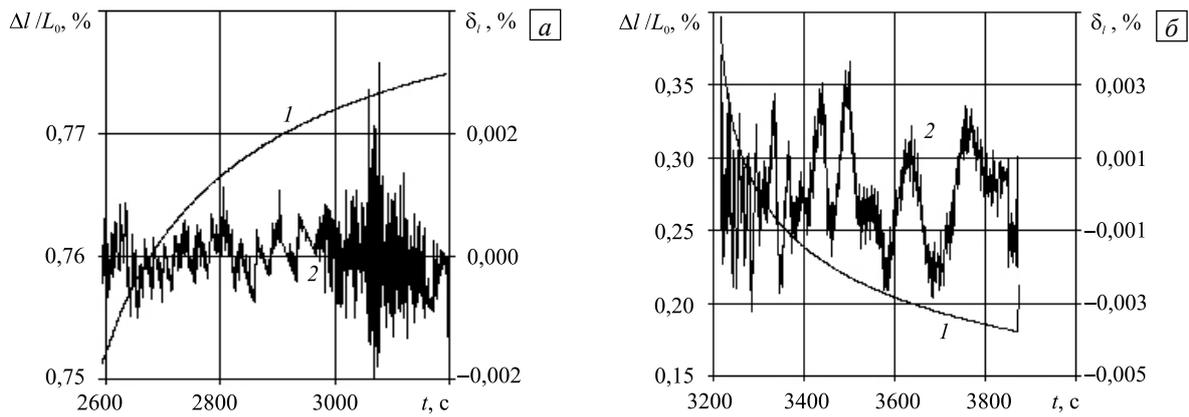


Рис. 5. Аппроксимации историй относительного удлинения (линии 1) и соответствующие остатки (линии 2) на интервале релаксации образца полиэтилена при неподвижной трассировке (а) и на интервале его свободного сокращения после разгрузки (б)

На рисунке 5 приведены результаты аппроксимации СНП для двух отрезков историй относительного удлинения $y_i(\xi_i) = \Delta l(\xi_i)/L_0$ и остатки (невязки) $\delta_i(\xi_i) \equiv y_i(\xi_i) - S_\alpha(\bar{a}_j; \xi_i)$, соответствующие экспериментальным данным с рисунка 3.

Для контроля в процессе подбора аппроксимации в N_j точках измерения фиксируется информация о достигнутом оптимальном числе точек сопряжения сплайна n_j при заданном n_j^{\max} , максимальном отклонении по модулю $|\delta_i|$ в точке i и номере этой точки. Также регистрируется дисперсия D_{j1} , приходящаяся на одну точку. В таблице приведены эти данные для двух отрезков историй удлинения, показанных на рисунках 3 и 5. Они свидетельствуют о существенном повышении точности аппроксимации при увеличении числа сопряжений сплайна при сравнительно малом их числе.

Таблица. Информация о поиске оптимального числа сопряжений на j -м отрезке

Число точек измерения N_j	n_j^{\max}	n_j	$ \delta_i $	i	D_{j1}
5898	0	0	0,068	1	$0,14_{10^{-07}}$
	2	2	0,0062	60	$0,38_{10^{-09}}$
	5	4	0,0032	4822	$0,42_{10^{-10}}$
5764	0	0	0,096	45	$0,15_{10^{-06}}$
	2	2	0,020	14	$0,12_{10^{-08}}$
	5	4	0,0037	2518	$0,28_{10^{-09}}$

Примером эффективности описанной процедуры первичной обработки экспериментальных данных могут служить истории осевой деформации и нагрузки при испытании образца силвинита в условиях объёмного напряженного состояния с участками релаксации, разгрузки и отдыха, измеренные в 87531 точке по времени. Для этих историй определены, соответственно, 16 и 19 точек разрыва 1-й производной; в результате аппроксимации эти истории заданы сплайнами с 34 и 54 узлами соответственно. Сжатая таким образом экспериментальная информация по историям обработанных переменных каждого опыта хранится в двух одномерных целочисленных файлах-указателях и реальном одномерном массиве коэффициентов.

Для вычисления значения нужной переменной и/или её 1-й производной достаточно в соответствующей вычислительной процедуре задать номер переменной и значение аргумента. При использовании совокупности опытов для идентификации какой-либо материальной функции [2, 3] одномерные массивы с хранимой экспериментальной информацией без труда объединяются в двумерные массивы.

4. Заключение

Представленная методика сглаживания, сжатия и преобразования экспериментальных данных в виде историй измеряемых параметров сплайнами наилучшего приближения с учетом точек разрыва первой производной прошла вместе с автором длительный эволюционный путь от кусочно-непрерывной аппроксимации экспериментальных графиков с бумажных диаграмм полиномами 2-го порядка до описанного здесь состояния. На её основе легко реализуются численные методики идентификации

и верификации реологических моделей МДТТ, содержащих истории измеряемых параметров и/или их скоростей.

Методика оказалась эффективной и для обработки данных, получаемых с использованием современных цифровых систем сбора данных различной природы.

Автор благодарен С.С. Двойникову за выполнение аналогичной реализации с использованием полиномов Чебышева и сравнительный анализ полученных аппроксимаций.

Литература

1. *Слонимский Г.Л.* Релаксационные процессы в полимерах и пути их описания // *Высокомолек. соединения. Серия А.* – 1971. – Т. 13, № 2. – С. 450-460.
2. *Адамов А.А., Кузнецов Г.Б.* К методике описания реологических процессов при конечных деформациях теорией наследственности // *Прикладные задачи механики полимеров и систем.* – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1977. – С. 11-20.
3. *Адамов А.А., Матвеев В.П., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н.* Методы прикладной вязкоупругости. – Екатеринбург: УрО РАН, 2003. – 411 с.
4. *Вапник В.Н.* Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. – М.: Наука, 1979. – 448 с.
5. *Алгоритмы и программы восстановления зависимостей.* / Под ред. В.Н. Вапника. – М.: Наука, 1984. – 816 с.
6. *Бартенев О.В.* Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL. Часть 3. – М.: Диалог-МИФИ, 2001. – 368 с.
7. *Де Бор К.* Практическое руководство по сплайнам. – М.: Радио и связь, 1985. – 304 с.
8. *Попов Б.А.* Равномерное приближение сплайнами. – Киев: Наукова думка, 1989. – 272 с.
9. *Василенко В.А., Зюзин М.В., Ковалков А.В.* Сплайн-функции и цифровые фильтры. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1984. – 156 с.
10. *Носач В.В.* Решение задач аппроксимации с помощью персональных компьютеров. – М.: МИКАП, 1994. – 382 с.
11. *Воскобойников Ю.Е., Преображенский Н.Г., Седельников А.И.* Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике. – Новосибирск: Наука, 1984. – 238 с.

Поступила в редакцию 29.12.12; опубликована в электронном виде 15.07.13