

DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.1.9

УДК 539.3

ОЦЕНКА ЛОКАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ СЕТКИ В КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ ЗАДАЧАХ

В.Н. Бакулин, В.В. Инфлянскас

Институт прикладной механики РАН, Москва, Россия

Рассмотрены два основных случая сходимости конечно-элементного решения в статических задачах теории упругости. На основании принципа Сен-Венана определена достаточность уплотнения конечно-элементной сетки для подобластей с концентрацией напряжений. Приведен алгоритм оценки поточечной сходимости решения при локальном уплотнении сетки. Для иллюстрации метода представлены результаты расчета цилиндрической трехслойной композитной оболочки, находящейся под действием локальной нагрузки. Для напряжений, достигающих максимальных значений в нагруженной области, определены параметры плотности сетки, дающие начальное приближение.

Ключевые слова: метод конечных элементов, численные решения, оценка сходимости, задачи механики слоистых оболочек, концентрация напряжений, конечно-элементная сетка, переменная плотность сетки

DETERMINATION OF LOCAL MESH PARAMETERS IN FINITE ELEMENT PROBLEMS

V.N. Bakulin and V.V. Inflianskas

Institute of Applied Mechanics RAS, Moscow, Russia

Two basic cases of convergence of finite element solution in the static problems of the theory of elasticity are considered. Based on Saint-Venant's principle, the sufficiency of finite element mesh refinement for local regions with stress concentration is determined. An algorithm is presented for evaluation of point-by-point convergence of solution for local mesh refinement. To illustrate the method, the results of computation of a cylindrical three-layered composite shell under local loads are given. For stresses reaching the maximum value in the loaded area, the mesh density parameters yielding an initial approximation are found.

Key words: finite element method, numerical solutions, convergence evaluation, problems of mechanics of laminated shells, stress concentration, finite element mesh, variable mesh density

1. Введение

В настоящее время для решения прикладных задач механики сплошной среды ввиду их сложности используются почти исключительно численные методы, основанные на дискретизации расчетной области. Обзор современной тематики по этим вопросам дан в [1]. Наиболее распространенным на сегодняшний день является метод конечных элементов, имеющий различные трактовки [2–5] и позволяющий реализовать разные модели, в частности, в механике деформируемого твердого тела [6–8], механике многослойных пластин и оболочек [6, 9–16]. Метод конечных элементов основывается на формулировке задачи механики твердого тела для совокупности областей с простым напряженным состоянием, полученных предварительным разбиением исходной области с помощью конечно-элементной сетки. В результате решается система линейных алгебраических уравнений высокого порядка. Порядок системы определяется, с одной стороны, требуемой точностью решения, с другой стороны, ограничивается математическими и техническими возможностями удержания в заданных пределах накапливающихся погрешностей.

В реальных конструкциях интегральная оценка точности решения по всей области может не дать желаемого результата, поскольку пики напряжений могут быть локальными, а их вклад в общую энергию деформации — незначительным, но зачастую именно пики представляют основной интерес для расчетчика.

2. Постановка задачи

Ограничиваясь статическими задачами теории упругости, обсудим алгоритм анализа поточечной сходимости решения для выбранной функции (напряжения, перемещения и так далее) в рассматриваемой точке конструкции.

Если определить плотность сетки как количество конечных элементов в геометрической единице (единице длины, площади или объема для каждого вида элемента), то можно поставить вопрос о распределении плотности сетки в области, занимаемой телом. Опыт показывает, что для реальных конструкций требуемая плотность конечно-элементной сетки оказывается неравномерной ввиду концентрации напряжений, вызванных как геометрическими факторами (например, малыми отверстиями),

так и статическими (например, сосредоточенными силами). Учет ограничения на порядок системы уравнений делает естественным вопрос о локальной плотности сетки, достаточной для решения исходной задачи с необходимой точностью.

В методе конечных разностей общепринятым является построение прямоугольной регулярной сетки. Решение задач с изменением шага сетки и произвольной границей встречает уже значительные трудности. К тому же возникает необходимость в оценке устойчивости выбранной разностной схемы [17]. Одним из упрощающих ситуацию вариантов служит использование многосеточного подхода, предложенного Федоренко [18], [19]. Однако этот подход требует либо основательной подготовки расчетчика и высокого уровня владения программой, либо существенно усложняет программную реализацию для пользователя более низкой квалификации. Современная же тенденция — это применение мощной и доступной вычислительной техники массовым пользователем средней квалификации. Существуют и другие варианты использования сеток переменной плотности, адаптированных к решению задачи [20]. Геометрические и топологические аспекты построения сеток в многосвязных областях рассмотрены в [21]. Хорошо приспособлен к требованиям времени метод конечных элементов, в котором оперирование нерегулярной сеткой не встречает трудностей. Математические аспекты метода подробно рассмотрены в [3], где доказана его сходимости в среднем квадратичном. Далее в качественном виде обоснуем проведение местного уплотнения сетки.

Важным моментом в дальнейших рассуждениях является локальность краевой задачи, выражающаяся в теории упругости принципом Сен-Венана. Практически это означает возможность изолировать друг от друга зоны концентрации напряжений и полагать, что в произвольной подобласти общее решение задачи определения напряженного состояния Y можно представить в виде суммы главного медленно меняющегося (Y_m) и локального самоуравновешенного (Y_l) решений: $Y = Y_m + Y_l$.

Полагаем, что главное решение можно получить на достаточно грубой сетке плотностью t_m , а для нахождения локального решения разбиваем тело по границам некоторых элементов грубой сетки на M неперекрывающихся подобластей Ω_j ($j = 1, 2, \dots, M$) таким образом, что каждой подобласти Ω_j соответствует свое локальное решение Y_{lj} . При этом, вследствие принципа Сен-Венана, в подобластях Ω_k выполняются условия затухания локальных решений для смежных подобластей: $Y_{lj} \approx 0$ при $j \neq k$. Такое построение позволяет использовать независимое локальное уплотнение сетки.

Сказанное иллюстрируется рисунком 1 для случая нагружения одиночной нагрузкой P_j . Кроме того, на область Ω воздействуют распределенные поверхностные силы p_1, p_2, \dots, p_i . В некоторой окрестности сосредоточенной нагрузки Ω_j приложим распределенную нагрузку p_{dj} , имеющую главный вектор по величине и направлению равный P_j , и обратную ей ($-p_{dj}$). Далее, разделим общую задачу (назовем ее задачей P) на две части: задачу P_m , описывающую главное медленно меняющееся напряженное состояние (сетка может быть грубой), и задачу P_l , изображающую локально самоуравновешенное в подобласти Ω_j напряженное состояние, которое в соответствии с принципом Сен-Венана затухает вне ее (требуется дробление сетки, см. Рис. 1).

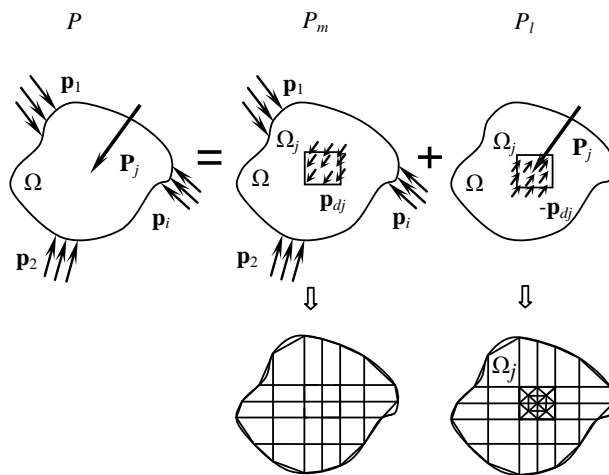


Рис. 1. Схема решения задачи при многосеточном подходе и пример локального уплотнения сетки

Поскольку задача P линейна, и оба решения — P_m и P_l , в сумме дают искомое, то и задачу можно решить в один прием на сетке, построенной для локального решения. Если же локальных нагрузок P_j несколько, то суммируются главное и все локальные решения. Таким образом, конечно-элементная сетка для всей области Ω представляет собой сочетание грубых ячеек с локальными вкраплениями мелких ячеек в подобластях с концентрацией напряжений.

Рассмотрим некоторую выбранную функцию Y (перемещение, напряжение или другое), и пусть на основе грубой сетки с некоторой малой плотностью t_m построено главное решение Y_m , которое примем за начальное приближение.

Далее будем изменять плотность t_j мелкой сетки в каждой из подобластей Ω_j . Теперь в подобласти Ω_j функция Y_j приобретает вид:

$$Y_j = Y_{mj}(t_m) + Y_{lj}(t_j) \quad (j = 1, 2, \dots, M). \quad (1)$$

Так как главное решение Y_{mj} в подобласти Ω_j строится на сетке с фиксированной плотностью t_m , то

$$\frac{\partial Y_{mj}}{\partial t_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, M). \quad (2)$$

Необходимым условием сходимости в подобласти Ω_j решения при неограниченном уплотнении сетки к локальному решению является выполнение условия

$$\lim_{t_j \rightarrow \infty} \frac{\partial Y_{lj}}{\partial t_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, M). \quad (3)$$

Суммируя (2), (3), имеем

$$\lim_{t_j \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial Y_{mj}}{\partial t_j} + \frac{\partial Y_{lj}}{\partial t_j} \right) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, M). \quad (4)$$

Пользуясь тем, что $t_m = \text{const}$, в дальнейшем под t_j будем подразумевать плотность, отнесенную к t_m . Принимая $t_m^* = 1$, вводим таким образом начало отсчета, имеющее физический смысл. При этом все предельные переходы сохраняют силу. Следовательно, используется масштабирование, под которым здесь и далее понимаем умножение переменной на некоторую выбранную постоянную (в данном случае $1/t_m$), принятую в качестве масштаба. Стремясь свести число независимых переменных к минимуму при увеличении плотности t_j мелкой сетки, выдвигаем требование сохранения формы и подобия элементов, выражаемое равенством коэффициентов сжатия по трем направлениям для объемных элементов, и по двум направлениям — для двумерных, если задача однородна по размерности элементов. Смешанные случаи подлежат отдельному рассмотрению. Выстраиваемая для размножения узлов переходная область между грубой и мелкой сетками может состоять из элементов разной формы.

С целью контроля сходимости к пределу заданной в виде (1) функции Y_j выберем для каждого масштабного параметра t_j калибровочную функцию, удовлетворяющую предельному условию (4). Ввиду линейности задачи теории упругости дальнейший анализ будем проводить не для всех значений функции, а только для ее модуля.

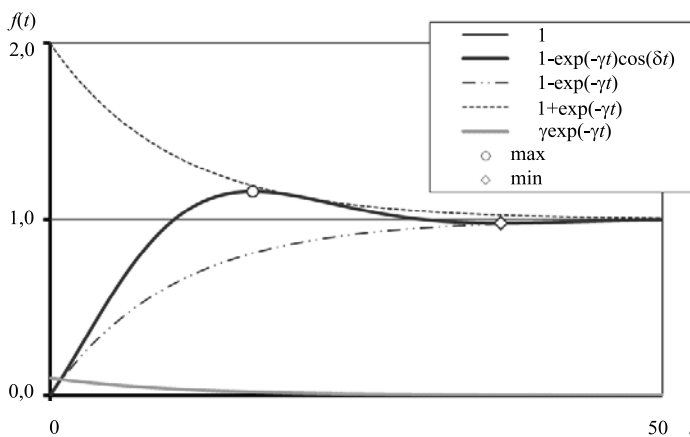


Рис. 2. Зависимости от плотности сетки нормированных калибровочных функций, описывающих сходимость конечно-элементного решения

Сходимость конечно-элементного решения может быть монотонной и немонотонной [4]. Дадим описания той и другой:

– монотонная

$$f_1(t) = f_1(\infty)(1 - e^{-\gamma t}); \quad (5)$$

– колебательная

$$f_2(t) = f_2(\infty)(1 - e^{-\gamma t} \cos \delta t), \quad (6)$$

где $f_1(\infty)$, $f_2(\infty)$ — соответствующие предельные значения функций сходимости; $\delta, \gamma > 0$ — некоторые параметры сходимости.

Заметим, что первый максимум функции вида (6) является глобальным, а при дальнейшем увеличении плотности конечно-элементной сетки функция убывает, то есть первый максимум модуля выбранной функции указывает на ее максимальный уровень во всем диапазоне плотности.

Рисунок 2 содержит пример масштабированных числами функций (5), (6), а также зависимостей производной функции (5) и функции, симметричной (5) относительно 1. Значения плотности соответствуют неограниченному уплотнению сетки: $t \rightarrow \infty$.

3. Порядок оценки сходимости конечно-элементного решения

Перейдем к непосредственной оценке сходимости конечно-элементного решения. Положим, что при последовательном и непрерывном уплотнении сетки соответствующие расчетные функции $Y_j(t_j)$ (в дальнейшем для упрощения вида записи индекс j иногда опускаем) имеют вид (5) или (6) с некоторыми неизвестными параметрами δ, γ . Основываясь на свойствах описаний (5), (6), локализуем полученные значения функции $Y(t)$ в области значений калибровочной функции для вынесения заключения о достаточности проведенного расчета.

Дадим дополнительное определение: назовем областью насыщения функции $Y(t)$ некоторую достаточно малую окрестность точки $Y(\infty)$, имея в виду, что в эту окрестность попадают все значения функции $Y(t)$ для $t \geq t_0$, начиная с некоторого t_0 .

Для колебательной функции типа $f_2(t)$ в качестве значений аргумента, соответствующих области насыщения, удобно взять область правее первого максимума t_{mm1} ее модуля. Если оказывается, что для текущего значения локальной плотности t выполняется условие

$$t > t_{mm1}, \quad (7)$$

то, значит, пройден первый и глобальный максимум функции колебательной сходимости, и в первом приближении результат расчета достигнут. Для более полной информации можно найти следующий минимум t_{mm2} , лежащий по другую сторону от предельного значения $Y(\infty)$. Величина $|Y(t_{mm1}) - Y(t_{mm2})|$ характеризует пределы дальнейшего изменения функции $Y(t)$.

Если же при достаточно большой плотности t функция $Y(t)$ продолжает монотонно расти, то возможен монотонный характер калибровочной функции. В этом случае о степени близости функции $Y(t)$ к своему предельному значению $Y(\infty)$ можно судить по степени близости к нулю ее производной $|Y'(t)|$. Среди калибровочных функций этому соответствует функция (см. также Рис. 2) $f_1'(t) = f_1(\infty)\gamma e^{-\gamma t}$.

Рассмотрим теперь порядок действий при практическом решении конечно-элементной задачи. Обычно, ввиду трудоемкости построения, плотность сетки в подобласти Ω_j принимает только ряд определенных дискретных значений. Для того чтобы не попасть на ложные узкие экстремумы функции, вызванные случайными факторами (например, смещением границ элементов при уплотнении сетки и так далее), смежные дискретные значения аргумента должны различаться существенно (например, кратно). Для дальнейшего суждения о близости к экспоненте функций (5) или (6) полученную последовательность дискретных решений следует аппроксимировать непрерывной функцией. Будем рассматривать начальный возрастающий участок, который в колебательном случае включает в себя окрестность первого глобального максимума.

Поскольку следующим этапом работы является описание локальных свойств экспоненты, а при сохранении формы и подобия элементов функция $Y(t)$ должна быть достаточно гладкой, применим квадратичную интерполяцию, позволяющую в локальной области просто и эффективно аппроксимировать функции. При этом используем результаты расчета, по крайней мере, по трем различным сеткам подобласти Ω_j с условием, что $t_{j1} < t_{j2} < t_{j3}$.

Учитывая условие (2) и полагая по-прежнему, что функции Y_{ij}, Y_{ik} независимы, то есть $\partial Y_{ij} / \partial t_k = 0$ при $j \neq k$, ($j, k = 1, 2, \dots, M$), запишем соотношение интерполяции для подобласти Ω_j . Соблюдая требование подобия в задаче с однородной размерностью элементов, имеем единственный локальный параметр плотности сетки. Это условие выполняется также и в случае со смешанной размерностью, когда другие параметры плотности достаточны, чтобы их функции находились в зоне насыщения.

Ввиду единственности задачи интерполяции для большей прозрачности получаемых результатов выберем представление в виде квадратичного отрезка ряда Тейлора без остаточного члена в окрестности точки t_{j1} :

$$Y(t_j) \approx Y(t_{j1}) + \frac{Y'(t_{j1})}{1!}(t_j - t_{j1}) + \frac{Y''(t_{j1})}{2!}(t_j - t_{j1})^2. \quad (8)$$

После подстановки в разложение (8) значений $t_j = t_{j1}$, $t_j = t_{j2}$ и проведения выкладок определим величины

$$\begin{aligned} \frac{Y'(t_{j1})}{1!} &= \frac{(Y(t_{j2}) - Y(t_{j1}))(t_{j3} - t_{j1})}{(t_{j2} - t_{j1})(t_{j3} - t_{j2})} - \frac{(Y(t_{j3}) - Y(t_{j1}))(t_{j2} - t_{j1})}{(t_{j3} - t_{j1})(t_{j3} - t_{j2})}, \\ \frac{Y''(t_{j1})}{2!} &= \frac{(Y(t_{j2}) - Y(t_{j1}))(t_{j3} - t_{j1}) - (Y(t_{j3}) - Y(t_{j1}))(t_{j2} - t_{j1})}{(t_{j3} - t_{j1})(t_{j2} - t_{j1})(t_{j2} - t_{j3})}, \\ Y'(t_{j2}) &= -Y'(t_{j1}) + 2 \frac{Y(t_{j2}) - Y(t_{j1})}{t_{j2} - t_{j1}}, \\ Y'(t_{j3}) &= -Y'(t_{j1}) + 2 \frac{Y(t_{j3}) - Y(t_{j1})}{t_{j3} - t_{j1}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Возвращаясь теперь к локальным свойствам экспонент, можно для колебательного случая проверить выполнение условия (7) при $t = t_{j2}$ для точки экстремума параболы $t_{jmm} = t_{j1} - Y'(t_{j1})/Y''(t_{j1})$.

При длительном монотонном изменении функции $Y(t_j)$ можно воспользоваться производной функции в последней точке (см. $Y'(t_{j3})$ в (9)), а затем оценить степень близости к нулю значения самой функции:

$$\Delta Y_{j3} = \frac{|Y'(t_{j3})|(t_{j3} - t_{j2})}{\max(|Y(t_{j1})|, |Y(t_{j2})|, |Y(t_{j3})|)}.$$

Достаточно малая величина ΔY_{j3} означает близость Y_j к своему пределу $Y_j(\infty)$. Заранее заданное на основании практики в качестве критерия малое значение ΔY_{j3} назовем пороговым.

Независимо от типа сходимости конечным результатом является значение функции, полученное в конечно-элементном расчете при наибольшем значении плотности. Получение насыщенного решения проиллюстрируем на примере наибольших напряжений, возникающих в слоистой цилиндрической оболочке от действия локальной нагрузки. Метод конечных элементов применительно к исследованию напряженно-деформированного состояния трехслойных и многослойных оболочек рассматривался в работах [9–16] и других.

4. Вычислительный эксперимент и анализ результатов

Рассмотрим трехслойную цилиндрическую оболочку, имеющую внутренний радиус R_1 и длину l (Рис. 3). Толщины слоёв: внутреннего h_1 , наружного h_2 ; толщина трехслойного пакета H . Внешний и внутренний слои являются несущими. На внутренний слой оболочки действует нагрузка p , равномерно распределенная по двум прямоугольным площадкам. Расчет проведен для случая, когда площадки, на которые передается нагрузка на оболочку, находятся на одинаковом расстоянии от опорных шпангоутов. Несущие слои трехслойной цилиндрической оболочки имеют на торцах шарнирное закрепление.

Задача решена при следующих характеристиках [16]: $l/R_1 = 2,8$; $H/R_1 = 0,07$; $h_1/H = 0,1$; $h_1/h_2 = 2$; $E_1 = 21$ ГПа; $E_2 = 25$ ГПа; $G_{12} = 3,5$ ГПа; $\mu_{12} = 0,1$; $\mu_{21} = 0,084$ (E_1 , E_2 , G_{12} — модули упругости и модуль сдвига в срединной плоскости несущих слоев, μ_{12} и μ_{21} — коэффициенты Пуассона); размеры области нагрузки $2\alpha_0 = 0,28$, $2\beta_1 = 0,14$, $\alpha_0 = a/R_1$ ($2a$ — длина площадки нагрузки, $2\beta_1$ — угловой размер грузовой площадки; индекс 1 соответствует осевому направлению, 2 — окружному). Заполнитель считается изотропным с коэффициентом Пуассона $\mu = 0,2$ и модулем сдвига $G_3 = 10$ МПа.

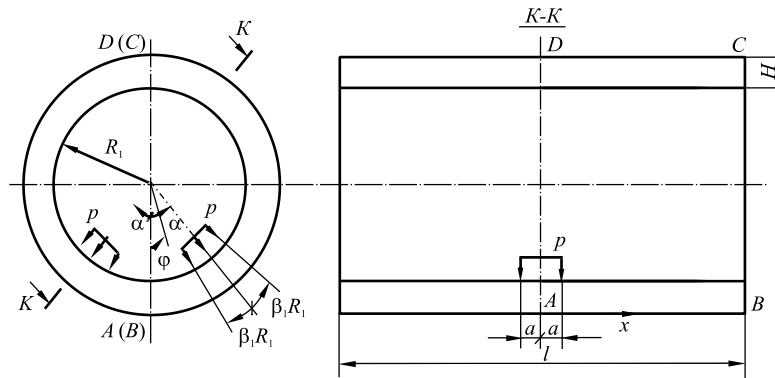


Рис. 3. Расчетная схема задачи

Ввиду наличия двух плоскостей симметрии решение строилось для четверти конструкции, представляющей собой полуцилиндр длиной $l/2 = 1,4$ м и углом $\varphi = 180^\circ$. Реализация осуществлялась с помощью пакета прикладных программ «Композит» [6], предназначенного для проведения конечно-элементных расчетов в механике деформируемого твердого тела и механике композиционных материалов и конструкций. Конечно-элементная сетка строилась из элементов прямоугольной формы. Несущие слои моделировались конечными элементами пластинчатого типа из ортотропного материала, а наполнитель (при варианте грубой сетки) — двумя слоями объемных элементов — прямоугольных параллелепипедов из изотропного материала.

Так как напряженное состояние вблизи локальной нагрузки имеет большую неравномерность, то и шаг поверхностной сетки был неравномерным — меньшим вблизи прямоугольной области приложения нагрузки в виде распределенного единичного давления. Помимо области нагрузки малоразмерные элементы использованы и для окаймляющего ее слоя, имеющего ширину, примерно равную размеру нагруженного прямоугольника.

В исходной грубой сетке нагруженная область разбивалась на $2 \times 4 = 8$ прямоугольников, а окаймляющая — на $4 \times 8 = 32$ прямоугольника. Окружная плотность разбиения для мелкой сетки в зоне локальной нагрузки составляла 1 элемент / 0,5 градуса. Отношение сторон элементов в окрестности с удвоенными размерами площадки нагружения фиксировалось. Таким образом сохранялось подобие элементов при увеличении плотности сетки.

После нахождения поверхностной плотности сетки, настолько высокой, что вычисленные напряжения входят в зону насыщения при этой плотности, рассмотрена зависимость от радиальной плотности радиальных напряжений, возникающих в наполнителе. При этом наполнитель разбивается по толщине на 2, 4 и 8 слоев. На рисунке 4 представлены интерполяционные графики для нормальных напряжений σ_{33} в наполнителе на границе раздела с внутренним несущим слоем и локально максимальных касательных напряжений τ_{23} . При этом минимальная масштабированная плотность имела значение: $t_1 = 1$. Заметим, что максимальные нормальные напряжения обжатия σ_{33} получаются по центру нагруженной площадки, а касательные напряжения τ_{23} — по ее краям. Здесь t — масштабированная радиальная плотность разбиения слоя наполнителя. Из рисунка также видно, что при $t = 4$ напряжения τ_{23} прошли точку насыщения, а σ_{33} продолжают монотонно расти.

Можно рассуждать двояко. С одной стороны, считать, что при использованных значениях плотности сетки имеем монотонный случай. Если принять в качестве порогового уровня $[1/(p\sigma_{\max}) \times \partial\sigma/\partial t]_n = 0,005$, что составляет 8,7% от начального $[1/(p\sigma_{\max}) \times \partial\sigma/\partial t](t_1)$, то при $t = 4$ величина $[1/(p\sigma_{\max}) \times \partial\sigma/\partial t](t_3) = 0,00272$ мала (меньше порогового 0,005). С другой стороны, найти положение предполагаемого максимума параболы. Его абсцисса оказывается равной $t = 4,149$, что близко к использованному в расчете значению $t = 4$. Так как минимальная плотность масштабирована ($t_1 = 1$), то плотность $t = 4$ соответствует 8-слойному разбиению по толщине. Учитывая приближенность проведенных оценок, из обоих рассуждений можно заключить: в данной задаче для расчета напряжений в наполнителе достаточно разбить его на 8 слоев элементов по толщине.

При наполнителе с другим модулем сдвига интерполяционный результат может измениться. Для сравнения на рисунке 5 представлены зависимости радиальных нормальных напряжений σ_{33} в наполнителе с модулем сдвига G_3 .

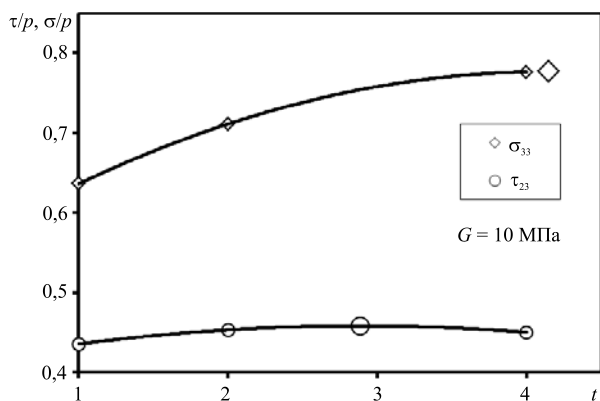


Рис. 4. Интерполяционные графики для нормальных и касательных напряжений в заполнителе на границе раздела с внутренним несущим слоем; маркерами большего размера показано положение максимумов

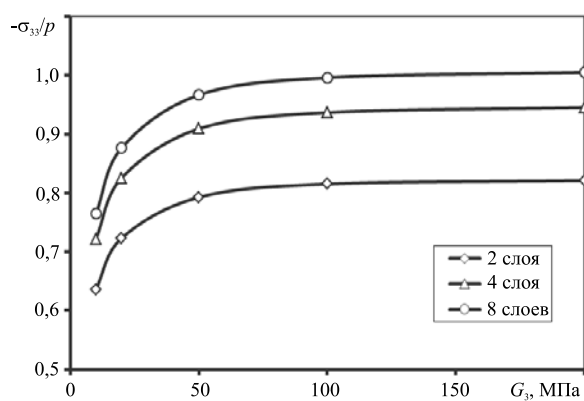


Рис. 5. Интерполяционные графики для радиальных нормальных напряжений в заполнителе в зависимости от величины его модуля сдвига при различном разбиении по толщине

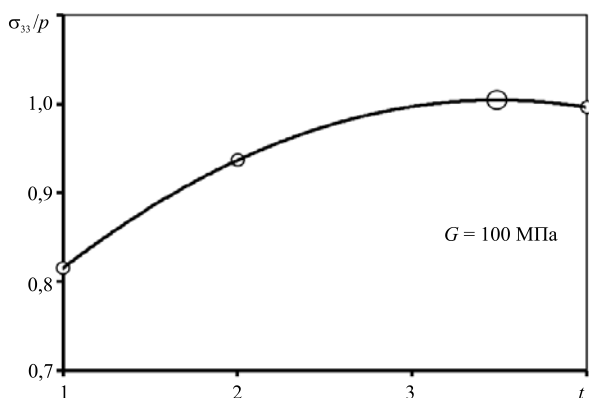


Рис. 6. Интерполяционный график для радиальных нормальных напряжений в заполнителе по радиальной плотности сетки

На рисунке 6 представлен интерполяционный график радиальных нормальных напряжений в заполнителе в зависимости от радиальной плотности сетки при модуле сдвига $G = 100$ МПа. Из рисунка видно, что теперь при масштабированной плотности $t(r) = 4$ напряжения σ_{33} проходят точку интерполяционного максимума, войдя в режим насыщения. Таким образом, и в этом примере достаточно разбиения заполнителя на 8 слоев элементов по толщине.

5. Заключение

Для описания взаимосвязи результатов расчета при различных разбиениях подобласти с концентрацией напряжений предложены калибровочные экспоненциальные функции

плотности сетки. Локальный анализ функций осуществляется при помощи аппарата параболической интерполяции по расчетным точкам, полученным при не менее чем трех различных сетках. Заключение о достаточности уплотнения конечно-элементной сетки в пиковой зоне дается в зависимости от характера сходимости: в немонотонном случае — по моменту достижения первого максимума модуля исследуемой функции, а в монотонном случае — по моменту достижения ее порогового приращения.

Литература

1. Труфанов Н.А. О направлениях развития вычислительной механики сплошных сред на примере анализа публикаций одного журнала // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2011. – Т. 4, № 4. – С. 114-124. DOI
2. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 464 с.
3. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 351 с.
4. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.
5. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
6. Бакулин В.Н., Рассоха А.А. Метод конечных элементов и голографическая интерферометрия в механике композитов. – М.: Машиностроение, 1987. – 312 с.
7. Шардаков И.Н., Труфанов Н.А., Матвеев В.П. Метод геометрического погружения в теории упругости. – Екатеринбург: УрО РАН, 1999. – 298 с.
8. Клигман Е.П., Матвеев В.П., Севодина Н.В. Определение собственных колебаний кусочно-однородных вязкоупругих тел с использованием пакета ANSYS // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2010. – Т. 3, № 2. – С. 46-54. DOI
9. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1984. – 264 с.
10. Бакулин В.Н. Метод конечных элементов для исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных цилиндрических оболочек. – М.: ЦНИИ Информации, 1985. – 140 с.

11. Расчет неоднородных пологих оболочек и пластин методом конечных элементов: Монография / Авт. коллектив: В.Г. Пискунов и др. – Киев: Вища школа, 1987. – 200 с.
12. *Рикардс Р.Б.* Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. – Рига: Зинатне, 1988. – 284 с.
13. *Бакулин В.Н.* Эффективные модели для уточненного анализа деформированного состояния трехслойных неосесимметричных цилиндрических оболочек // ДАН. – 2007. – Т. 414, № 5. – С. 613-617. DOI
14. *Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф.* Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. – М.: Физматлит, 2006. – 392 с.
15. *Попов Б.Г.* Расчет многослойных конструкций вариационно-матричными методами. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993. – 294 с.
16. *Бакулин В.Н., Инфлянскас В.В.* Конечно-элементное моделирование напряженно-деформированного состояния трехслойных оболочек вращения / Матер. XVI Межд. конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2009). – М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2009. – С. 103-106.
17. *Годунов С.К., Рябенский В.С.* Разностные схемы. Введение в теорию. – М.: Наука, 1977. – 440 с.
18. *Федоренко Р.П.* Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений // ЖВММФ. – 1961. – Т. 1, № 5. – С. 922-927.
19. *Федоренко Р.П.* Введение в вычислительную физику. – М.: Изд-во МФТИ, 1994. – 528 с.
20. *Любимов Д.В., Любимова Т.П., Иванцов А.О., Черепанова А.А.* Использование метода сквозного счета для моделирования динамики систем с поверхностями раздела // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2008. – Т. 1, № 2. – С. 53-62. DOI
21. *Караваев А.С., Копысов С.П., Пономарёв А.Б.* Алгоритмы построения и перестроения неструктурированных четырехугольных сеток в многосвязных областях // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2012. – Т. 5, № 2. – С. 144-150. DOI

Поступила в редакцию 15.11.12; опубликована в электронном виде 25.04.13