DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.1.8
УДК 534.1

ОБ ОДНОЗНАЧНОСТИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ УПРУГОГО ЗАКРЕПЛЕНИЯ И СОСРЕДОТОЧЕННОГО ИНЕРЦИОННОГО ЭЛЕМЕНТА

А.А. Ахтямова[1,2], А.М. Ахтямов[1,2]

[1]*Башкирский государственный университет, Уфа, Россия*
[2]*Институт механики Уфимского центра РАН, Уфа, Россия*

Рассматривается задача идентификации двух относительных коэффициентов жесткостей пружинок упругого закрепления одного из концов балки Эйлера–Бернулли, а также массы и момента инерции груза, сосредоточенного на этом конце. Показано, что для однозначной идентификации параметров упругого закрепления и концевого груза достаточно использования семи собственных частот. Для решения задачи предложен метод дополнительных неизвестных величин. С помощью этого метода построено множество корректности задачи и доказана ее корректность по А.Н. Тихонову. Приведены формулы идентификации и соответствующие примеры.

Ключевые слова: собственные значения, обратная задача, собственные частоты, балка, сосредоточенный инерционный элемент

ON THE UNIQUENESS OF PARAMETER IDENTIFICATION FOR ELASTIC FIXATION AND A POINT INERTIA ELEMENT

A.A. Ahtyamova[1,2] and A.M. Ahtyamov[1,2]

[1]*Bashkir State University, Ufa, Russia*
[2]*Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa, Russia*

The problem of identification of two relative stiffness coefficients of springs attached to one of the ends of the Euler-Bernoulli beam and the mass and moment of inertia of load concentrated at this end is studied. It is shown that seven natural frequencies suffice for unique identification of parameters of elastic fixing and weight at the beam end. The problem is solved using the method of additional unknowns. This allows us to determine a correctness set of the problem and to prove that the problem is well-posed in the Tikhonov sense. Formulas of identification and corresponding examples are given.

Key words: eigenvalues, inverse problem, natural frequencies, beam, point inertia element

1. Введение

Вопросы вычисления собственных частот распределеных механических систем (в частности, упруго закрепленных стержней и пластин) достаточно хорошо изучены [1–5]. Обратные задачи для таких систем стали решаться сравнительно недавно [6–20]. Так, в работах [6–8] обсуждались задачи идентификации пружинно-массовых систем с конечным числом степеней свободы по собственным частотам их колебаний. В обратных спектральных задачах [6, 9, 10] требуется восстановить коэффициенты дифференциального уравнения и краевых условий. В качестве данных для восстановления краевых условий используется не один спектр или его часть (как в предлагаемой вниманию статье), а несколько спектров или же другие дополнительные спектральные данные (например, спектральная функция, функция Вейля или так называемые весовые числа). К тому же основной целью этих работ является восстановление коэффициентов в уравнении, а не в краевых условиях.

В настоящей статье расматриваются изгибные колебания распределенной механической системы. Цель работы состоит в восстановлении краевых условий спектральной задачи с известными по части спектра коэффициентами в уравнении.

Распределенные механические системы (стержни и балки) служат объектами исследования в [16–20], где диагностируются трещины и полости в них по собственным частотам продольных и изгибных колебаний. Но в этих работах определяются не краевые условия, а условия сопряжения.

В [11, 15] и других публикациях (см. [6] и библиографию к ней) решаются задачи идентификации сосредоточенных масс на стержне и балке по собственным частотам продольных и изгибных колебаний. В [12–14] приводятся задачи идентификации видов и параметров закреплений стержней балок. В монографии [12] обобщаются результаты идентификации краевых условий в случае, когда отыскиваются все их коэффиценты. Подобные задачи впервые начали изучаться одним из авторов данной статьи и сводятся к идентификации (с точностью до линейных преобразованиий строк) матрицы из коэффициентов краевых условий по ее минорам. Из упомянутых выше публикаций работы [13–15] наиболее близки к обсуждаемой статье, так как в ней также полагается, что коэффициенты при старших производных $y'''(1)$, $y''(1)$ уже известны. В работах [13, 14] по собственным частотам восстанавливаются вид и параметры закрепления концов стержня и трубопровода. В [15] по собственным частотам идентифицируются параметры твердого тела (масса, момент инерции, статический момент инерции), прикрепленного к одному из концов балки Тимошенко. Но, в отличие от этих работ, в данной статье идентифицируются как параметры упругого закрепления конца стержня (два относительных коэффициента жесткости пружинок), так и параметры сосредоточенного инерционного элемента (масса и момент инерции), прикрепленного к концу стержня. Ранее подобная задача не рассматривалась. Предложен метод введения дополнительных неизвестных величин, на основе которого доказывается теорема об однозначности восстановления параметров закрепления конца стержня и сосредоточенного инерционного элемента. При доказательстве используется теория некорректных задач [21–27].

Исследуемая проблема часто возникает в технических устройствах, поскольку деталями многих механизмов являются упруго закрепленные стержни с сосредоточенной массой на конце. Такими системами можно считать, в частности, краны и автомобили [8], автоматические записывающие устройства с трубками, из которых вытекает краска, детали некоторых механизмов виброзащиты [14]. Как правило, пружинки (рессоры), служащие составной частью систем, имеют определенную жесткость, влияющую на нагруженность конца. Со временем системы теряют свои массу и жесткость ввиду износа или, наоборот, наращивают их в результате захватывания инородных предметов. Если конец стержня недоступен для визуального осмотра, а разборка механизма представляет собой дорогостоящую процедуру, то для сохранения надежной работы механизма возникает потребность в его ранней и неразрушающей диагностике (например, акустической), то есть возникает задача определения параметров упругого закрепления и нагруженности конца стержня по характеристикам звуковых колебаний, вызванных ударом по стержню. Поэтому становится важной проблема идентификации параметров упругого закрепления и нагруженности конца однородного стержня по собственным частотам его колебаний.

2. Постановка обратной задачи

Рассмотрим однородную балку Эйлера–Бернулли длиной L, плотностью ρ и площадью поперечного сечения F, левый конец которой заделан; на правом конце сосредоточен груз, обладающий массой m и моментом инерции I. Груз упруго закреплен на пружинках с жесткостями c_1 и c_2, препятствующими вертикальному смещению балки (c_1) и повороту (c_2). Требуется найти массу m, момент инерции I, коэффициенты жесткостей пружинок c_1 и c_2 по собственным частотам колебаний балки. Отклонения точек оси балки от начального состояния (при $t = 0$) при поперечных колебаниях однозначно определяются одной функцией двух переменных — осевой координаты X и времени t: $U = U(X,t)$.

Как известно [3], уравнение свободных изгибных колебаний однородного стержня с постоянной жесткостью на изгиб имеет вид

$$EI\frac{\partial^4 U(X,t)}{\partial x^4} + \rho F\frac{\partial^2 U(X,t)}{\partial t^2} = 0,$$

где $U = U(X,t)$ — прогиб оси стержня, EI — изгибная жесткость, ρ — плотность материала, F — площадь поперечного сечения стержня.

При $t = 0$ должны выполняться начальные условия

$$U(X,0) = f(X), \qquad \frac{\partial U}{\partial t}(X,0) = g(X),$$

где $f(X)$, $g(X)$ — функции, определяющие начальное положение оси стержня.

Если левый конец заделан, а на правом конце имеется упруго закрепленный сосредоточенный инерционный элемент, то краевые условия записываются в следующем виде:

$$U = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial X} = 0 \quad (\text{при } X = 0),$$

$$EI\frac{\partial^3 U}{\partial X^3} + c_1 U = -m\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad EI\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + c_2\frac{\partial U}{\partial X} = -I\frac{\partial^3 U}{\partial X\,\partial t^2} \quad (\text{при } X = L),$$

Вводя обозначения $x = X/L$, $u = U/L$, запишем уравнение свободных изгибных колебаний однородного стержня и краевые условия следующим образом:

$$\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\rho F L^4}{EI}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{при } x = 0),$$

$$EI\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + c_1 L^3 u = -mL^3\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad EI\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_2 L\frac{\partial u}{\partial x}U = -I_1 L\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \quad (\text{при } x = 1).$$

Тогда, при замене $u(x,t) = y(x)\cos(\omega t)$, поставленная выше задача сводится (см., например, [2]) к следующей спектральной задаче [3]:

$$y^{(4)} = \lambda^4 y, \qquad U_1 = y(0) = 0, \qquad U_2 = y'(0) = 0; \tag{1}$$

$$U_3(y) = y'''(1) + (a_1 - a_2\lambda^4)y(1) = 0, \qquad U_4(y) = y''(1) + (a_3 - a_4\lambda^4)y'(1) = 0. \tag{2}$$

Здесь $a_1 = (c_1 L^3)/(EI)$, $a_2 = (mL^3)/(EI)$, $a_3 = (c_2 L)/(EI)$, $a_4 = (I_1 L)/(EI)$, $\lambda^4 = \rho F L^4 \omega^2/(EI)$.

Таким образом, имеем краевую задачу (1), (2) со спектральным параметром λ и неизвестными коэффициентами a_i $(i = 1,2,3,4)$. Требуется по ее собственным значениям λ_k найти неизвестные коэффициенты a_i $(i = 1,2,3,4)$, то есть поставленную задачу определения массы, момента инерции груза, сосредоточенного на одном из концов стержня, и коэффициентов жесткости удерживающей его связи, свели к обратной. Покажем, что эту обратную задачу можно переформулировать в терминах характеристического определителя.

Функции $y_1(x,\lambda) = (\cos\lambda x + \operatorname{ch}\lambda x)/2$, $y_2(x,\lambda) = (\sin\lambda x + \operatorname{sh}\lambda x)/(2\lambda)$, $y_3(x,\lambda) = (-\cos\lambda x + \operatorname{ch}\lambda x)/(2\lambda^2)$, $y_4(x,\lambda) = (-\sin\lambda x + \operatorname{sh}\lambda x)/(2\lambda^3)$ являются линейно независимыми решениями уравнения

$$y^{(4)}(x,\lambda) = \lambda^4 y(x,\lambda), \tag{3}$$

удовлетворяющими условиям

$$y_j^{(r-1)}(0,\lambda) = \begin{cases} 0, \text{при } j \neq r; \\ 1, \text{при } j = r \end{cases} \quad (j, r = 1,2,3,4) \tag{4}$$

(другими словами, решения $y_j(x,\lambda)$ $(j = 1,2,3,4)$ образуют фундаментальную систему Коши и выражаются через функции Крылова [3]).

Общее решение уравнения (3) представляется в следующем виде:

$$y(x) = y(x,\lambda) = C_1 y_1(x,\lambda) + C_2 y_2(x,\lambda) + C_3 y_3(x,\lambda) + C_4 y_4(x,\lambda).$$

Для нахождения констант C_1, C_2, C_3, C_4 используем краевые условия (1), (2):

$$U_i(y) = U_i(C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4) = C_1 U_i(y_1) + C_2 U_i(y_2) + C_3 U_i(y_3) + C_4 U_i(y_4) = 0 \ (i = \overline{1,4}). \tag{5}$$

Уравнение для определения собственных значений задачи (1), (2) следует из условия существования ненулевого решения системы (5). Ненулевое решение для C_i существует тогда и только тогда, когда равняется нулю определитель системы:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & U_1(y_4) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) & U_2(y_4) \\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(y_4) \\ U_4(y_1) & U_4(y_2) & U_4(y_3) & U_4(y_4) \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Выражение (6) называется характеристическим определителем спектральной задачи (1), (2). Его нули совпадают с собственными значениями этой задачи [28]. Учитывая условия (4), из (6) получаем

$$\Delta(\lambda)\equiv\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\U_3(y_1)&U_3(y_2)&U_3(y_3)&U_3(y_4)\\U_4(y_1)&U_4(y_2)&U_4(y_3)&U_4(y_4)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}U_3(y_3)&U_3(y_4)\\U_4(y_3)&U_4(y_4)\end{vmatrix}.$$

Отсюда, с учетом (1), (2), имеем

$$\Delta(\lambda)\equiv\begin{vmatrix}y_3'''(1)+a_1y_3(1)-a_2\lambda^4y_3(1) & y_4'''(1)+a_1y_4(1)-a_2\lambda^4y_4(1)\\ y_3''(1)+a_3y_3'(1)-a_4\lambda^4y_3'(1) & y_4''(1)+a_3y_4'(1)-a_4\lambda^4y_4'(1)\end{vmatrix}.$$

Следовательно,

$$\Delta(\lambda)\equiv -f_0(\lambda)+a_1f_1(\lambda)+a_2f_2(\lambda)+a_3f_3(\lambda)+a_4f_4(\lambda)+(a_1a_4+a_2a_3)f_5(\lambda)+a_1a_3f_6(\lambda)+a_2a_4f_7(\lambda),\qquad(7)$$

где $f_0(\lambda)=(1+\cos\lambda\,\mathrm{ch}\lambda)/2$; $f_1(\lambda)=(-\cos\lambda\,\mathrm{sh}\,\lambda+\sin\lambda\,\mathrm{ch}\lambda)/(2\lambda^3)$; $f_2(\lambda)=-\lambda^4f_1(\lambda)$; $f_3(\lambda)=-(\sin\lambda\,\mathrm{ch}\lambda+\cos\lambda\,\mathrm{sh}\lambda)/(2\lambda)$; $f_4(\lambda)=-\lambda^4f_3(\lambda)$; $f_5(\lambda)=(\cos\lambda\,\mathrm{ch}\lambda-1)/2$; $f_6(\lambda)=-f_5(\lambda)/\lambda^4$; $f_7(\lambda)=-\lambda^4f_5(\lambda)$.

Таким образом, задачу идентификации краевых условий по собственным частотам в терминах функции (7) можно сформулировать следующим образом: требуется найти неизвестные коэффициенты a_i $(i=1,2,3,4)$ по известным корням λ_k характеристического определителя (7). Решение можно получить следующим способом.

Пусть λ_k являются собственными значениями краевой задачи (1), (2). Тогда λ_k — корни уравнения характеристического определителя (7) [28]. Подставляя значения λ_k в (7), получаем систему уравнений для отыскания неизвестных a_i $(i=1,2,3,4)$:

$$a_1f_1(\lambda_k)+a_2f_2(\lambda_k)+a_3f_3(\lambda_k)+a_4f_4(\lambda_k)+(a_1a_4+a_2a_3)f_5(\lambda_k)+a_1a_3f_6(\lambda_k)+a_2a_4f_7(\lambda_k)=f_0(\lambda_k).\qquad(8)$$

Поскольку число собственных значений λ_k бесконечно, то (8) можно решать с любыми из них, а значит, система (8) может содержать любое число уравнений. Заметим, что функция (7) является четной целой функцией первого порядка. Отсюда следует, что по всему бесконечному набору корней λ_k характеристического определителя (7) неизвестные коэффициенты a_i $(i=1,2,3,4)$ восстанавливаются однозначно (см. [15]).

Заметим, что для однозначного восстановления неизвестных a_i $(i=1,2,3,4)$ нет необходимости использовать весь бесконечный набор корней λ_k. Для ответа на вопрос, сколько же нелинейных уравнений следует взять, воспользуемся опытом авторов работы [15]. Ими установлено, что требуется решить несколько систем нелинейных уравнений с числом уравнений, совпадающим с числом неизвестных, а затем найти пересечение этих решений.

3. Метод нескольких систем нелинейных уравнений и его недостатки

Подставляя значения λ_k $(k=1,2,3,4)$ в (8), решаем систему четырех уравнений. Получается шесть решений. Добавляем к этой системе еще одно уравнение, используя в (8) еще и λ_5. Заменяем в предыдущей системе уравнений четвертое уравнение на пятое. Решаем вторую систему четырех нелинейных уравнений с четырьмя значениями λ_k $(k=1,2,3,5)$. Опять получаем шесть решений. Не все решения второй системы совпадают с решениями первой. Значит, они не являются решениями всех пяти уравнений (8) со значениями λ_k $(k=1,2,3,4,5)$. Их можно не рассматривать в качестве решений. Допустим, осталось два общих решения. Можно ли удалить еще одно? Для ответа на этот вопрос добавляем еще одно уравнение: подставляем в (8) λ_6. Заменяем в предыдущей системе уравнений пятое уравнение на шестое. Решаем вторую систему четырех нелинейных уравнений с четырьмя значениями λ_k $(k=1,2,3,6)$. Снова имеем шесть решений. Если среди этих шести решений нет одного из двух общих решений системы пяти уравнений (8) со значениями λ_k $(k=1,2,3,4,5)$, то тем единственным решением, которое мы ищем, будет решение, пересекающее все шесть уравнений (8) со значениями λ_k $(k=1,2,3,4,5,6)$.

Однако этот метод имеет явные недостатки. Так, он не дает ответа на вопросы: сколько собственных значений λ_k требуется для однозначной идентификации четырех неизвестных a_i $(i = 1, 2, 3, 4)$; достаточно ли шести собственных значений; если этого количества уравнений недостаточно, то сколько собственных значений следует взять для однозначной идентификации; если приближенные решения имеют близкие значения, то можно ли считать их общими (пересекающимися), или это различные решения.

Продемонстрируем эти недостатки на примере.

Пример 1. Пусть $\lambda_1 = 3{,}861483$, $\lambda_2 = 7{,}031643$, $\lambda_3 = 10{,}18502$, $\lambda_4 = 13{,}33266$, $\lambda_5 = 16{,}47796$, $\lambda_6 = 19{,}62205$, $\lambda_7 = 22{,}76544$ — первые семь собственных значений задачи (1), (2). Подставляя первые четыре из них в уравнение (8), получаем систему четырех нелинейных уравнений с четырьмя неизвестными, имеющую шесть наборов решений (эти решения найдены с помощью пакета аналитических вычислений Maple), среди которых два решения представляются следующим образом:

$$\{a_1 = 0{,}00000,\ a_2 = 2{,}00000,\ a_3 = 0{,}00000,\ a_4 = 0{,}00000\},$$
$$\{a_1 = 13653,\ a_2 = 36{,}044,\ a_3 = -0{,}47369,\ a_4 = 0{,}00000\}.$$

Решение системы четырех нелинейных уравнений (8) с $\lambda_1 = 3{,}861483$, $\lambda_2 = 7{,}031643$, $\lambda_3 = 10{,}18502$ и $\lambda_5 = 16{,}47796$, снова дает шесть наборов, среди которых два таковы:

$$\{a_1 = 0{,}00000,\ a_2 = 2{,}00000,\ a_3 = 0{,}00000,\ a_4 = 0{,}00000\},$$
$$\{a_1 = 13656,\ a_2 = 36{,}362,\ a_3 = -0{,}47400,\ a_4 = 0{,}00000\}.$$

Другие наборы решений второй системы уравнений существенно отличаются от наборов решений первой системы.

Разрешая (8) с $\lambda_1 = 3{,}861483$, $\lambda_2 = 7{,}031643$, $\lambda_3 = 10{,}18502$ и $\lambda_6 = 19{,}62205$, получаем шесть наборов, среди которых два имеют вид:

$$\{a_1 = 0{,}00000,\ a_2 = 2{,}00000,\ a_3 = 0{,}00000,\ a_4 = 0{,}00000\},$$
$$\{a_1 = 13657,\ a_2 = 36{,}395,\ a_3 = -0{,}47403,\ a_4 = 0{,}00000\}.$$

При $\lambda_1 = 3{,}861483$, $\lambda_2 = 7{,}031643$, $\lambda_3 = 10{,}18502$ и $\lambda_7 = 22{,}76544$ из решения (8) следуют шесть наборов, и среди них два следующие:

$$\{a_1 = 0{,}00000,\ a_2 = 2{,}00000,\ a_3 = 0{,}00000,\ a_4 = 0{,}00000\},$$
$$\{a_1 = 13656,\ a_2 = 36{,}383,\ a_3 = -0{,}47403,\ a_4 = 0{,}00000\}.$$

Видно, что решение $\{a_1 = 0{,}00000, a_2 = 2{,}00000, a_3 = 0{,}00000, a_4 = 0{,}00000\}$ является общим для всех систем уравнений, а вторые решения выделенной пары совпадают с точностью до двух-четырех значащих цифр. Можно ли считать вторые решения общими? На этот вопрос трудно ответить без общих теорем. Поэтому ниже предлагается метод решения системы (8), из которого следует общая теорема, утверждающая, что для выделения единственного решения достаточно семи собственных значений. Эта теорема также дает ответ на вопрос об общности вторых решений. И ответ этот — отрицательный.

4. Метод дополнительных неизвестных

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_7$ — собственные значения задачи (1), (2). Вводим дополнительные неизвестные

$$a_5 = a_1 a_4 + a_2 a_3, \quad a_6 = a_1 a_3, \quad a_7 = a_2 a_4 \tag{9}$$

и подставляем их вместе с собственными значениями λ_k $(k = 1, 2, \ldots, 7)$. в уравнение (8). В результате получаем систему семи линейных уравнений с семью неизвестными a_i $(i = 1, 2, \ldots, 7)$:

$$a_1 f_1(\lambda_k) + a_2 f_2(\lambda_k) + a_3 f_3(\lambda_k) + a_4 f_4(\lambda_k) + a_5 f_5(\lambda_k) + a_6 f_6(\lambda_k) + a_7 f_7(\lambda_k) = f_0(\lambda_k) \ \ (k = 1, 2, \ldots, 7). \tag{10}$$

Из правила Крамера следует, что если определитель системы уравнений (10)

$$D = \begin{vmatrix} f_1(\lambda_1) & f_2(\lambda_1) & \dots & f_7(\lambda_1) \\ f_1(\lambda_2) & f_2(\lambda_2) & \dots & f_7(\lambda_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(\lambda_7) & f_2(\lambda_7) & \dots & f_7(\lambda_7) \end{vmatrix} \qquad (11)$$

отличен от нуля, то коэффициенты $a_i \ \ (i = 1, 2, ..., 7)$ однозначно вычисляются по формулам

$$a_1 = D_1/D, \quad a_2 = D_2/D, \quad a_3 = D_3/D, \quad a_4 = D_4/D, \qquad (12)$$

$$a_5 = D_5/D, \quad a_6 = D_6/D, \quad a_7 = D_7/D, \qquad (13)$$

где D_i — определитель, получающийся из D при замене элементов $f_i(\lambda_1)$, $f_i(\lambda_2)$, …, $f_i(\lambda_7)$ i -го столбца соответствующими свободными членами $f_0(\lambda_1)$, $f_0(\lambda_2)$, … , $f_0(\lambda_7)$.

В случае, если собственные значения $\lambda_k \ \ (k = 1, 2, ..., 7)$ найдены с погрешностью, то может оказаться, что

$$\begin{gathered} D_5/D \neq (D_1/D)\cdot(D_4/D) + (D_2/D)\cdot(D_3/D), \\ (D_6/D) \neq (D_1/D)\cdot(D_3/D), \\ (D_7/D) \neq (D_2/D)\cdot(D_4/D), \end{gathered} \qquad (14)$$

и тогда система уравнений для определения четырех неизвестных $a_i \ \ (i = 1, 2, 3, 4)$ становится переопределенной. То есть задача отыскания неизвестных $a_i \ \ (i = 1, 2, 3, 4)$ по семи значениям $\lambda_k \ \ (k = 1, 2, ..., 7)$ может не иметь решения, а поэтому является некорректной по Адамару. Однако она корректна по А.Н. Тихонову.

Действительно, для подхода А.Н. Тихонова к вопросу корректности характерно, что рассматривается некоторое множество $M \subset V$, существенно более узкое, чем все пространство V. Пусть образ множества M в пространстве Z при отображении с помощью оператора R есть множество Λ, то есть $\Lambda = RM$.

Задача $Rv = z$, где v из пространства V, а z из пространства Z, называется корректной по А.Н. Тихонову (условно корректной), если [22, 23, 24]:

1) априори известно, что решение задачи существует и принадлежит некоторому множеству M пространства V;

2) решение единственно на множестве M;

3) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых z, $\tilde{z} \in \Lambda = RM$, и таких, что $\|z - \tilde{z}\|_Z < \delta$, выполняется неравенство $\|v - \tilde{v}\|_V < \varepsilon$.

В обсуждаемом случае под оператором R можно понимать отображение, задаваемое системой уравнений (10), преобразующее семерку чисел $a_i \ \ (i = 1, 2, ..., 7)$ в семерку значений $\lambda_k \ \ (k = 1, 2, ..., 7)$, при которых матрица системы имеет определитель $D \neq 0$. Множеством корректности M будем называть такое множество семичисельных наборов $v = (a_1, a_2, \dots, a_7)$, для каждого из которых выполняются условия (9). С помощью введенного множества корректности нетрудно показать корректность по А.Н. Тихонову задачи отыскания $a_i \ \ (i = 1, 2, 3, 4)$ по значениям $\lambda_k \ \ (k = 1, 2, ..., 7)$, при которых система уравнений (10) имеет определитель, отличный от нуля.

Пусть V — это пространство $\mathbb{R}^7$ элементов $v = (v_1, v_2, \dots, v_7)$ с нормой $\| v \| = \max(| v_1 |, | v_2 |, \dots, | v_7 |)$; Z — это пространство $\mathbb{R}^7$ элементов $z = (z_1, z_2, \dots, z_7)$ с нормой $\| z \| = \max(| z_1 |, | z_2 |, \dots, | z_7 |)$; образ множества M в пространстве Z при отображении с помощью оператора R есть множество Λ, то есть $\Lambda = RM$. Тогда задача $Rv = z$ будет корректной по А.Н. Тихонову, так как все перечисленные выше условия выполнены (третье условие вытекает из аналитичности $f_i(\lambda) \ \ (i = 0, 1, ..., 7)$ по λ).

Наиболее известны два метода решения корректных по А.Н. Тихонову задач — метод квазирешения и метод подбора. В настоящей статье предлагается метод решения задачи идентификации краевых условий, который по сути представляет собой метод подбора.

Априори известно, что искомые числа $a_i \ \ (i = 1, 2, 3, 4)$ существуют, так как идентифицируется реально существующая механическая система. Если действительные собственные значения λ_1, λ_2, …, λ_7 и определители $D \neq 0, D_i \ \ (i = 1, ..., 7)$ найдены точно, то условия (9) выполнены, причем числа $a_i \ \ (i = 1, 2, 3, 4)$ однозначно вычисляются по формулам (12). Все условия корректности по А.Н. Тихонову реализованы, в том числе и третье. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $z = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_7)$, $\tilde{z} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \ldots, \tilde{\lambda}_7) \in \Lambda = RM$, и таких, что $\| z - \tilde{z} \|_{\mathbb{R}^7} < \delta$, соблюдается неравенство $\left\| \left(D_1/D, D_2/D, \ldots, D_7/D \right) - \left(\tilde{D}_1/D, \tilde{D}_2/D, \ldots, \tilde{D}_7/D \right) \right\|_{\mathbb{R}^7} < \varepsilon$. Последнее вытекает из аналитичности функций $f_i(\lambda)$ $(i = 1, \ldots, 7)$ по параметру λ.

Если числа λ_k $(k = 1, 2, \ldots, 7)$, а значит, и $D \neq 0,\ D_1, D_2, \ldots, D_7$ установлены приближенно, то равенство (14) может не существовать, и поэтому формально по определителям $D \neq 0,\ D_1, D_2, \ldots, D_7$ (формулам Крамера) неизвестные a_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ вычислить невозможно. Однако для предъявления приближенного решения (14) это и не нужно. Приближенным решением будем считать значения a_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, найденные по формулам (12), где определители $D \neq 0,\ D_1, D_2, D_3, D_4$ рассчитываются по приближенным λ_k $(k = 1, 2, \ldots, 7)$. Приближенные решения a_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ вместе с числами a_i $(i = 5, 6, 7)$, определяемыми по формулам (9), а не по (13), лежат во множестве корректности, так как для них справедливы условия (9). Эти приближенные решения для a_i $(i = 1, 2, \ldots, 7)$ тем ближе к точным, чем ближе к точным собственным значениям числа λ_k $(k = 1, 2, \ldots, 7)$, а значит, чем ближе к точным значениям определители $D \neq 0,\ D_1, D_2, \ldots, D_7$. Таким образом, верна теорема:

Теорема. Если λ_k $(k = 1, 2, \ldots, 7)$ являются действительными собственными значениями краевой задачи (1), (2), причем определитель (11) системы уравнений (10) отличен от нуля, то задача отыскания коэффициентов a_i $(i = 1, 2, \ldots, 7)$ по собственным значениям λ_k $(k = 1, 2, \ldots, 7)$ является корректной по А.Н. Тихонову, и ее единственное решение описывается формулами (12, 13).

Пример 2. Пусть собственные значения задачи такие же, как в первом примере, а именно $\lambda_1 = 3{,}861483$, $\lambda_2 = 7{,}031643$, $\lambda_3 = 10{,}18502$, $\lambda_4 = 13{,}33266$, $\lambda_5 = 16{,}47796$, $\lambda_6 = 19{,}62205$, $\lambda_7 = 22{,}76544$. Подставляя эти значения в (11), (12) и находя $D = -0{,}3680993 \cdot 10^{31}$, $D_1 = -0{,}1608490 \cdot 10^{22}$, $D_2 = -0{,}7361985 \cdot 10^{31}$, $D_3 = 0{,}1224316 \cdot 10^{18}$, $D_4 = -0{,}1467282 \cdot 10^{13}$, получаем единственное решение: $a_1 = D_1/D = 0{,}000$, $a_2 = D_2/D = 2{,}000$, $a_3 = D_3/D = 0{,}000$, $a_4 = D_4/D = 0{,}000$.

Пример 3. Пусть $\lambda_1 = 1{,}016782$, $\lambda_2 = 4{,}696921$, $\lambda_3 = 7{,}831946$, $\lambda_4 = 10{,}98039$, $\lambda_5 = 14{,}12531$, $\lambda_6 = 17{,}26906$, $\lambda_7 = 20{,}41215$ — первые семь собственных значений задачи (1), (2). Используя их, из (11) и (12) имеем $D = 0{,}4241723 \cdot 10^{19}$, $D_1 = 0{,}2120861 \cdot 10^{20}$, $D_2 = 0{,}2545034 \cdot 10^{20}$, $D_3 = 0{,}1272516 \cdot 10^{20}$, $D_4 = 0{,}1696689 \cdot 10^{20}$, а также единственное решение $a_1 = D_1/D = 5{,}000$, $a_2 = D_2/D = 6{,}000$, $a_3 = D_3/D = 3{,}000$, $a_4 = D_4/D = 4{,}000$.

Доказанная теорема и примеры показывают, что для выделения единственного решения достаточно семи собственных значений, а второе решение из *Примера 1* следует исключить.

5. Заключение

Предложенный метод дополнительных неизвестных величин позволил построить множество корректности задачи и доказать ее корректность по А.Н. Тихонову. Проделанные выкладки, сформулированная теорема и примеры свидетельствуют, что для однозначной идентификации двух параметров упругого закрепления и двух параметров концевого груза достаточно использовать семь собственных частот. И хотя теорема содержит лишь достаточные условия, которые могут быть далеки от необходимых, она подтверждает достоверность формул для точной и приближенной идентификации параметров закрепления и концевого груза.

Литература

1. *Стрэтт Дж.В. (лорд Рэлей)* Теория звука. Т. 1. – М.: Гостехиздат, 1955. – 504 с.
2. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). – М.: Наука, 1968. – 504 с.
3. Вибрации в технике: справочник в 6 томах. Т. 1. Колебания нелинейных систем / Под ред. В.В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – 352 с.
4. *Гонткевич В.С.* Собственные колебания пластинок и оболочек. – Киев: Наукова думка, 1964. – 288 с.
5. *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* Частотно-параметрический анализ собственных колебаний неоднородных стержней // ПММ. – 2003. – Т. 67, № 4. – С. 588-602.
6. *Гладвелл Г.М.Л.* Обратные задачи теории колебаний. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2008. – 608 с.
7. *Movahhedy M., Ismail F. and Gladwell G.M.L.* Reconstruction of mass-spring system from spectral data. II: Experiment // Inverse Probl. Eng. – 1995. – V. 1, N. 4. – P. 315-327. DOI

8. *Иванов В.Н., Домбровский И.В., Шевелев Н.А.* Численная идентификация параметров динамического поведения элементов машиностроительных конструкций // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2011. – Т. 4, № 3. – С. 58-67. DOI
9. *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. – М: Физматлит, 2007. – 384 с.
10. *Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Ахтямов А.М.* Обратная задача Штурма-Луивилля с нераспадающимися краевыми условиями. – М.: Изд-во МГУ, 2009. – 184 с.
11. *Morassi A., Dilena M.* On point mass identification in rods and beams from minimal frequency measurements // Inverse Probl. Eng. – 2002. – V. 10, N. 3. – P. 183-201. DOI
12. *Ахтямов А.М.* Теория идентификации краевых условий и ее приложения. – М.: Физматлит, 2009. – 272 с.
13. *Ахтямов А.М., Муфтахов А.В., Ямилова Л.С.* Идентификация вида и параметров закрепления стержня по собственным частотам его колебаний // Акустический журнал. – 2008. – Т. 54, № 2. – С. 181-188. DOI
14. *Ахтямов А.М., Сафина Г.Ф.* Определение виброзащитного закрепления трубопровода // ПМТФ. – 2008. – Т. 49, № 1. – С. 139-147. DOI
15. *Ахтямов А.М., Урманчеев С.Ф.* Определение параметров твердого тела, прикрепленного к одному из концов балки, по собственным частотам колебаний // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2008. – Т. XI, № 4. – С. 19-24. DOI
16. *Ватульян А.О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. – М.: Физматлит, 2007. – 224 с.
17. *Ермолов И.Н., Алешин Н.П., Потапов А.И.* Неразрушающий контроль: В 5 книгах. Кн. 2. Акустические методы контроля: Практ. пособие / Под ред. В.В. Сухорукова. – М.: Высшая школа, 1991. – 283 с.
18. Вибродиагностика качества механизмов приборов: Сб. статей / Под ред. К.Н. Явленского. – Л.: ЛИАП, 1987. – 144 с.
19. *Ильгамов М.А., Хакимов А.Г.* Диагностика закрепления и повреждений балки на упругих опорах // Контроль. Диагностика. – 2010. – № 9. – С. 57-63.
20. *Ильгамов М.А.* Диагностика повреждений вертикальной штанги // Тр. ин-та механики УНЦ РАН. – Уфа: Гилем, 2007. – Вып. 5. – С. 201-211.
21. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 284 с.
22. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. – М.: Наука, 1978. – 206 с.
23. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. – М.: Наука, 1980. – 288 с.
24. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1990. – 232 с.
25. *Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Нелинейные некорректные задачи. – М.: Наука, 1995. – 312 с.
26. *Лаврентьев М.М., Резницкая К.Х., Яхно В.Г.* Одномерные обратные задачи математической физики. – Новосибирск: Наука, 1982. – 88 с.
27. *Лаврентьев М.М.* Теория операторов и некорректные задачи. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999. – 702 с.
28. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 526 с.

Поступила в редакцию 15.10.12; опубликована в электронном виде 25.04.13

Сведения об авторах

Ахтямова Айгуль Азаматовна, мнс, Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН (ИМех УНЦ РАН), 450054, Уфа, проспект Октября, д. 71; E-mail: phunakoshi@mail.ru

Ахтямов Азамат Мухтарович, дфмн, проф., зав.каф., Башкирский государственный университет (БашГУ), 450076, Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32; E-mail: akhtyamovam@mail.ru