

DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.1.5  
УДК 539.3

## ВЕРИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНО-ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОГО ПОВЕДЕНИЯ РЕБРИСТО-АРМИРОВАННЫХ ПЕНОПЛАСТМАСС

А.П. Янковский

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия*

Проведен сравнительный анализ расчетных упругих характеристик сотовой конструкции с экспериментальными данными и с результатами расчетов по другим методикам. Показано, что предложенная автором модель вполне может быть использована в практических расчетах и к ней можно относиться доверительно. Рассчитаны кривые ползучести пространственно-армированного в виде сот пенопласта.

*Ключевые слова:* пенопласты, армирование, определяющие соотношения, структурная теория, легкий наполнитель, ребристые конструкции, линейная вязкоупругость, численное моделирование

## VERIFICATION OF THE MODEL OF THE LINEAR-THERMOVISCOLASTIC BEHAVIOR OF RIB-REINFORCED POLYFOAMS

A.P. Yankovskii

*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russia*

The calculated elastic characteristics of honeycomb structures have been analyzed and compared with the experimental data and the results of calculations obtained by other techniques. It is shown that the proposed model is attractive for practical estimations and can provide valid predictions of the linear – thermoviscoelastic behavior of rib-reinforced polyfoams. Creep curves for spatially reinforced honeycomb polyfoams are presented.

*Key words:* polyfoam, reinforcement, constitutive relations, structural theory, lightweight filler, ribbed designs, linear viscoelasticity, numerical modeling

В работе [1] предложена и описана численно-аналитическая методика моделирования линейно-термовязкоупругого поведения ребристо-армированных пенопластмасс. Настоящее исследование посвящено верификации этой структурной модели и анализу проведенных на ее основе расчетов ползучести пенопластической среды, армированной ребристыми элементами в виде сотовых ячеек.

### 1. Верификация структурной модели

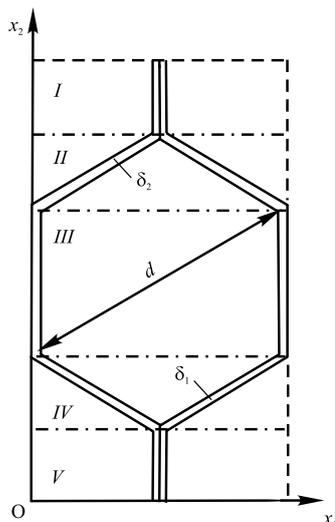
Автору не известны эксперименты по вязкоупругому и термовязкоупругому деформированию армированных пенопластмасс или ребристых конструкций (типа сотовых, складчатых, гофра и других), поэтому сравнение с экспериментом может быть проведено лишь косвенно, то есть для предельного случая, соответствующего чисто упругому поведению фазовых материалов, когда в соотношениях (1) модели [1] равняются нулю следующие материальные константы:

$$B_{ij,m}^{(k)} = 0, \beta_{i,s}^{(k)} = 0, c_{ij}^{(k)} = 0, d_i^{(k)} = 0 \quad (0 \leq k \leq K). \quad (1)$$

При этом эффективные термоупругие характеристики для ребристо-армированной пенопластмассы вычисляются по формулам (49)–(52) из [1].

Так как экспериментальные данные упругого деформирования сложно-армированных пенопластмасс в открытой печати также не найдены, представляется целесообразным сравнить расчетные значения эффективных упругих констант для пенопластмассы, армированной ребристыми элементами, например, в виде сот, с аналогичными характеристиками, установленными на базе других структурных моделей и на основе конечно-элементного моделирования (КЭМ).

Рассмотрим представительную ячейку сотовой ребристой конструкции (Рис. 1), характеризующуюся наличием лишь двух



**Рис. 1.** Сотовая ячейка – вид сверху представительного элемента композита, армированного пространственной ребристой конструкцией

( $K = 2$ ) криволинейных армирующих элементов постоянной толщины  $\delta_1 = \delta_2 = 0,05$  мм; диаметр соты составляет  $d = 8$  мм [2]. Армирующие элементы изготовлены из дуралюмина Д16АТВ, модуль упругости и коэффициент Пуассона которого составляют [2]:  $E^{(k)} = 67,7$  ГПа,  $\nu^{(k)} = 0,41$  ( $k = 1, 2$ ). Пустоты в сотах предполагаются заполненными пенопластической массой ПЭ-1 с упругими константами [3]:  $E^{(0)} = 40$  МПа,  $\nu^{(0)} = 0,25$ . При этом в (1) из [1] ненулевые компоненты  $a_{ij}^{(k)}$  матрицы жесткости  $k$ -го изотропного фазового материала определяются по формулам [4]:

$$a_{ii}^{(k)} = 2G^{(k)}(1-\nu^{(k)})/(1-2\nu^{(k)}), \quad a_{ij}^{(k)} = 2G^{(k)}\nu^{(k)}/(1-2\nu^{(k)}), \quad a_{ll}^{(k)} = 2G^{(k)} = E^{(k)}/(1+\nu^{(k)}) \quad (2)$$

$$(j \neq i; \quad i, j = 1, 2, 3; \quad l = 4, 5, 6; \quad k = 0, 1, 2),$$

где  $E^{(k)}$ ,  $G^{(k)}$ ,  $\nu^{(k)}$  — модули упругости первого, второго рода и коэффициент Пуассона  $k$ -го фазового материала.

В таблице 1 приведены расчетные ненулевые значения эффективных жесткостей  $A_{ij}$  (компонент матрицы  $\langle A \rangle$ , см. (48) в [1]) рассматриваемой композитной среды, определенных по модели [1] и структурным моделям, предложенным ранее [5, 6], а также на основе КЭМ.

Таблица 1. Расчетные значения эффективных жесткостей пенопластмассы ПЭ-1, армированной в виде сот ребристыми элементами из сплава Д16АТВ

Эффективные жесткости	Значения эффективных жесткостей, МПа			
	Модель из [5]	Модель из [6]	Модель из [1]	КЭМ
1	2	3	4	5
$A_{11}$	3000,3	495,3	409,5	405,2
$A_{12} = A_{21}$	2218,4	167,0	349,9	364,7
$A_{13} = A_{31}$	2131,8	261,8	301,4	306,7
$A_{22}$	3000,3	889,1	445,3	405,2
$A_{23} = A_{32}$	2131,8	423,4	316,1	307,1
$A_{33}$	3086,9	1617,5	1572,0	1568,6
$A_{44}$	1301,6	329,3	47,8	48,2
$A_{55}$	955,1	612,8	553,4	549,1
$A_{66}$	955,1	383,2	376,1	380,4

В монографии [5] рассматривалось моделирование упругого поведения грунтов, армированных пространственными георешетками. Формально эта проблема ставится математически аналогично задаче упругого поведения пространственно-армированных пенопластмасс. В рамках структурной модели, предложенной в [5], не учитывались условия сопряжения полей напряжений и деформаций, аналогичные (23), (24) или (34), (35) в [1]; деформации во всех компонентах композиции предполагались равными средней деформации ячейки. По существу в [5] предложена модель, дающая верхние оценки (причем достаточно грубо) эффективных жесткостей ребристо-армированной композиции, что и нашло свое отражение в таблице 1.

В работе [6] автор использовал гипотезы, аналогичные допущениям 1, 3–5, 7' из [1], но, в отличие от этой модели, в [6] представительная ячейка не разбивалась на субэлементы (см. Рис. 1, где ячейка включает пять субэлементов I–V, в пределах каждого из которых армирующие элементы приближенно считаются плоскими).

В рамках КЭМ для определения значений эффективных жесткостей  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{21}$ ,  $A_{22}$ ,  $A_{44}$  применялись плоские конечные элементы (при задании условий плоского деформирования), причем сотовая ячейка (Рис. 1) разбивалась на 47558 элементов с 24100 узлами. Остальные эффективные постоянные находились на основе пространственных элементов, причем в силу условий симметрии оказалось достаточным рассмотрение четверти сотовой ячейки. По направлению  $x_3$  (Рис. 1) задавался размер ячейки  $h = 4$  мм; количество пространственных конечных элементов равнялось 56498 с 29523 узлами. Методика вычисления эффективных характеристик 3D-периодических сред на основе КЭМ достаточно подробно изложена во многих публикациях (см. [7–9] и другие), поэтому здесь на детальном обсуждении этого вопроса останавливаться не будем.

Проанализируем содержимое таблицы 1. Поскольку конечно-элементное решение строится без учета упрощающих гипотез 4–6 из [1], то расчет на основе такой модели целесообразно рассматривать как эталонный. Согласно этому структурная модель, предложенная в [5], является очень грубой (см. 2-й

и 5-й столбцы); модель [6] для некоторых характеристик (например,  $A_{12}$ ,  $A_{22}$ ) дает занижение или завышение значений в 2 раза, а для сдвиговой жесткости  $A_{44}$  в плоскости  $x_1x_2$  — почти в 7 раз (ср. 3-й и 5-й столбцы). Значения  $A_{ij}$ , приведенные в 4-м и 5-м столбцах, показывают, что структурная модель, предложенная в [1], хорошо согласуется с КЭМ. При этом наибольшее отклонение от эталонного расчета наблюдается для эффективной жесткости  $A_{22}$  и составляет 9,9% (для остальных характеристик различие не превышает 5%). Так как 10%-ная точность определения характеристик фазовых материалов при ползучести считается хорошей, то структурную теорию, предложенную в [1] для моделирования явления ползучести в ребристо-армированных пенопластмассах, можно считать вполне приемлемой для проведения практических расчетов.

Следует отметить, что реально для выполнения расчетов, результаты которых представлены в 4-м столбце таблицы 1, использовалось разбиение представительной ячейки всего на два субэлемента (например, II и III, Рис. 1). Это допустимо в силу того, что слоистый материал, эквивалентный рассматриваемой композитной среде, состоит из регулярно чередующихся слоев двух типов: первый тип слоев армирован в направлении  $x_2$  (как субэлемент III), а второй тип слоев армирован перекрестно под углами  $\varphi_k = \pm\pi/6$  (как субэлемент II). Разбиение ячейки на пять субэлементов, как показано на рисунке, в силу допущений, используемых в [1], приводит к тем же значениям эффективных жесткостей  $A_{ij}$ , что и указанные в 4-м столбце таблицы 1. При КЭМ, как уже отмечалось, ячейка делилась на несколько десятков тысяч конечных элементов. При более грубом разбиении ячейки результаты эталонного расчета и по модели [1] сближаются. Известно, что для заполнителей трехслойных панелей, используемых на практике, наиболее важными являются эффективные жесткости  $A_{33}$ ,  $A_{55}$ ,  $A_{66}$  [10]. Их величины (см. 4-й столбец таблицы 1) хорошо согласуются с эталонным расчетом (см. 5-й столбец), отклонение составляет порядка 1%.

Согласно замечанию 1 в [1] при условиях (1) по формулам (49)–(52) из [1] можно вычислить эффективные термоупругие характеристики для ребристой конструкции, в которой полости не заполнены пенопластмассой. Ранее, на основе принципиально другого подхода (методами строительной механики [11, 12]), эффективные упругие характеристики таких конструкций были получены, например, в [10, 11 и других]. Поэтому представляется целесообразным сравнить эффективные характеристики, например, сотового заполнителя, рассчитанные по методикам, предложенным в [1, 6, 10, 11], с известными экспериментальными данными [2].

Рассмотрим сотовый заполнитель с той же самой ячейкой, свойства которой, взятые из работы [2], описываются выше. Ненулевые компоненты матрицы жесткости  $k$ -го фазового материала по-прежнему определяются по формулам (2).

В таблице 2 приведены вычисленные значения эффективных упругих технических констант сотовой конструкции (в расчетах по моделям из [1, 6] принималось (см. (2)), что при  $k = 0$   $v^{(0)} = 0$ ,  $E^{(0)} = 10^{-11} E^{(1)}$ ) и их экспериментальные значения из [2] (в таблице  $E_i$ ,  $G_{ij}$  — это модули упругости первого и второго рода ортотропного эквивалентного рассматриваемому композиту материала [4]). Из сравнения данных таблицы 2 следует хорошее совпадение значений  $G_{23}$ ,  $G_{31}$ , найденных по всем обсуждаемым методикам, и их удовлетворительное согласование с экспериментом; причем наиболее близки к эксперименту значения, отвечающие структурной теории [1]. Из таблицы видно: экспериментальные значения меньше расчетных.

Таблица 2. Эффективные упругие технические константы сотового заполнителя

Технические константы, МПа	Метод расчета (структурная модель)				Экспериментальные данные [2]
	Модель [11, стр. 109]	Модель [10]	Модель [6]	Модель [1]	
1	2	3	4	5	6
$E_1$	410,56 / 407,99*	–	398,99	0,041	–
$E_2$	768,61 / 759,64	–	717,62	0,041	–
$E_3$	1278,20	1566,80	1302,89	1284,35	–
$G_{12}$	–	–	148,84	0,0076	–
$G_{23}$	263,55	288,68	290,77	258,87	216–246
$G_{31}$	173,21	173,21	175,31	171,96	83,5–131,0

\*) Числитель содержит вычисленные значения при толщине заполнителя  $h = 8$  мм, знаменатель – при толщине  $h = 13$  мм; значения  $E_1$ ,  $E_2$ , определяемые по методике [11], зависят от  $h$ ; при этом взятые в расчетах значения толщины заполнителя  $h$  и использованные при проведении экспериментов в [2] одинаковы

**З а м е ч а н и е .** В [10] теоретически показано, что после потери устойчивости армирующих элементов при их сжатии или сдвиге (а значит, и соты в целом) значения модулей упругости  $E_3, G_{23}, G_{31}$  становятся меньше значений из 3-го столбца таблицы 2. Изучение этих вопросов выходит за рамки настоящего исследования.

Общеизвестен следующий экспериментальный факт: для сотового заполнителя значения модулей упругости  $E_1, E_2, G_{12}$  пренебрежимо малы по сравнению с  $E_3, G_{23}, G_{31}$ . Поэтому в [10]  $E_1, E_2, G_{12}$  вообще не определены, а в [11] не вычислена величина  $G_{12}$ , что нашло отражение во 2-м и 3-м столбцах таблицы 2. Согласно же структурной модели из [6] (см. 4-й столбец), вычисленные модули  $E_1, E_2, G_{12}$  имеют тот же порядок, что и  $G_{23}, G_{31}$ ; аналогично, значения модулей  $E_1, E_2$ , найденных по модели из [11] (см. 2-й столбец), имеют порядок, равный порядку  $G_{23}, G_{31}$ , что противоречит экспериментальным фактам. Напротив, согласно модели, предложенной в [1], значения  $E_1, E_2, G_{12}$  на 4–5 порядков меньше значений  $E_3, G_{23}, G_{31}$  (см. 5-й столбец таблицы 2), то есть пренебрежимо малы по сравнению с последними, что согласуется с известными экспериментальными данными.

## 2. Обсуждение результатов расчетов

В качестве модельной задачи рассмотрим ползучесть пенопластической массы, армированной в виде сот (Рис. 1). Предположим, что соты имеют прежние размеры и изготовлены из сплава Д16АТВ. Известно, что при температуре естественного состояния ( $T = 0$ ) ползучестью этого сплава можно пренебречь [13], то есть армирующий материал ведет себя линейно-упругим образом, и для него справедливы соотношения (2). Пенопластмасса изотропна, причем средние нормальные напряжения  $\sigma_0^{(0)}$  и средние линейные деформации  $\varepsilon_0^{(0)}$  в ней связаны также линейно-упруго [14]:

$$\sigma_0^{(0)} = 3K^{(0)}\varepsilon_0^{(0)}, \quad (3)$$

где

$$3K^{(0)} \equiv \frac{E^{(0)}}{1-2\nu^{(0)}} = \text{const}, \quad \sigma_0^{(0)} \equiv \frac{\sigma_1^{(0)} + \sigma_2^{(0)} + \sigma_3^{(0)}}{3}, \quad \varepsilon_0^{(0)} \equiv \frac{\varepsilon_1^{(0)} + \varepsilon_2^{(0)} + \varepsilon_3^{(0)}}{3}, \quad (4)$$

а компоненты девиаторов тензоров напряжений  $s_i^{(0)}$  и деформаций  $e_i^{(0)}$  связаны соотношениями (вязкое течение не учитывается,  $T = 0$ ):

$$s_i^{(0)}(t) = \left( 2G^{(0)} + \sum_{m=1}^M B_m \right) e_i^{(0)}(t) - \int_0^t \sum_{m=1}^M \frac{B_m}{n_m} \exp\left(-\frac{t-\tau}{n_m}\right) e_i^{(0)}(\tau) d\tau \quad (i = \overline{1, 6}), \quad (5)$$

где

$$2G^{(0)} \equiv \frac{E^{(0)}}{1+\nu^{(0)}} = \text{const}, \quad s_l^{(0)} = \sigma_l^{(0)}, \quad e_l^{(0)} = \varepsilon_l^{(0)} \quad (l = 4, 5, 6), \quad (6)$$

$$s_j^{(0)} = \sigma_j^{(0)} - \sigma_0^{(0)}, \quad e_j^{(0)} = \varepsilon_j^{(0)} - \varepsilon_0^{(0)} \quad (j = 1, 2, 3).$$

На основании равенств (3)–(6) можно получить соотношения, подобные (6) [1], связывающие между собой напряжения  $\sigma_i^{(0)}$  и деформации  $\varepsilon_i^{(0)}$  в пенопластмассе.

При проведении конкретных расчетов на ползучесть в качестве связующего используем условный материал со следующими упругими характеристиками в (4), (6):  $E^{(0)} = 2,18$  ГПа,  $\nu^{(0)} = 0,25$  (эти значения попадают в диапазон свойств реальных пенопластов [3]), а в качестве наследственных характеристик возьмем значения констант  $B_m, n_m$  из таблицы в работе [1]. Задавая  $\sigma_i$ , приложенные к композитной среде, в виде функций класса Хевисайда, получим

$$\sigma_i(t) = \hat{\sigma}_i \times \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1, & t > 0, \end{cases} \quad \hat{\sigma}_i = \text{const} > 0 \quad (i = \overline{1, 6}). \quad (7)$$

Далее, посредством вычислений определим зависимости от времени  $t$  средних деформаций в композиции  $\varepsilon_j$  ( $j = \overline{1, 6}$ ) при задании разных компонент напряжений  $\sigma_i$  (7), то есть установим кривые ползучести эквивалентного ортотропного материала.

Так как компоненты матриц  $A_k^n$  и векторов  $B_k^n, p_k^n$  в равенствах (17) из [1] зависят от шага по времени  $\tau_n$ , то прежде всего требовалось выяснить, при каком максимальном значении  $\tau_{max} > 0$  становится несущественной зависимость решения от выбора шага  $\tau_n \leq \tau_{max}$  (в расчетах предполагалось  $\tau_n = \tau = const, n = 0, 1, 2, \dots$ ).

На рисунке 2 изображены кривые  $\varepsilon_4(t) \equiv \varepsilon_{12}(t)$ , рассчитанные при разных  $\tau_n$  и задании ненулевого касательного напряжения  $\sigma_4(t) \equiv \sigma_{12}(t)$  (см. (2) в [1]) со значением  $\hat{\sigma}_4 = 0,1$  МПа. Кривая 1 определена при  $\tau_n = 10^{-7}$  с; кривая 2 — при  $\tau_n = 10^{-8}$  с; кривые 3, 4 (которые визуально неразличимы) — при  $\tau_n = 10^{-9}$  с и  $\tau_n = 10^{-10}$  с соответственно.

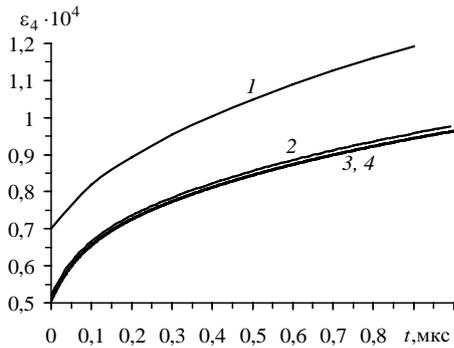


Рис. 2. Кривые ползучести армированного пенопласта при сдвиге в плоскости  $x_1x_2$ , рассчитанные при разных значениях шага по времени  $\tau_n$

Так как экспериментальные данные ползучести, как правило, имеют 10 ÷ 20% -ную точность [14 и другие], то в качестве  $\tau_{max}$  согласно рисунку 1 можно выбрать значение  $10^{-8}$  с (кривая 2), поэтому в дальнейших расчетах использован шаг по времени  $\tau_n = 10^{-8}$  с.

На рисунке 3, а приведены расчетные кривые ползучести  $\varepsilon_i(t)$  при ненулевых касательных напряжениях:  $\hat{\sigma}_i = 0,1$  МПа ( $i = 4, 5, 6$ ). Кривая 1 отвечает неармированному пенопласту, линии 2–4 — армированному: кривая 2 характеризует зависимость  $\varepsilon_4(t) \equiv \varepsilon_{12}(t)$  (сдвиг в плоскости  $x_1x_2$  от действия напряжения  $\hat{\sigma}_4 \equiv \hat{\sigma}_{12} \neq 0$ ); 3 — зависимость  $\varepsilon_6(t) \equiv \varepsilon_{13}(t)$ , а 4 —  $\varepsilon_5(t) \equiv \varepsilon_{23}(t)$  (см. (2) в [1]). Линии 2–4 лежат ниже кривой 1, что объясняется наличием арматуры, причем наименьшая податливость на сдвиг наблюдается в плоскости  $x_2x_3$  (кривая 4).

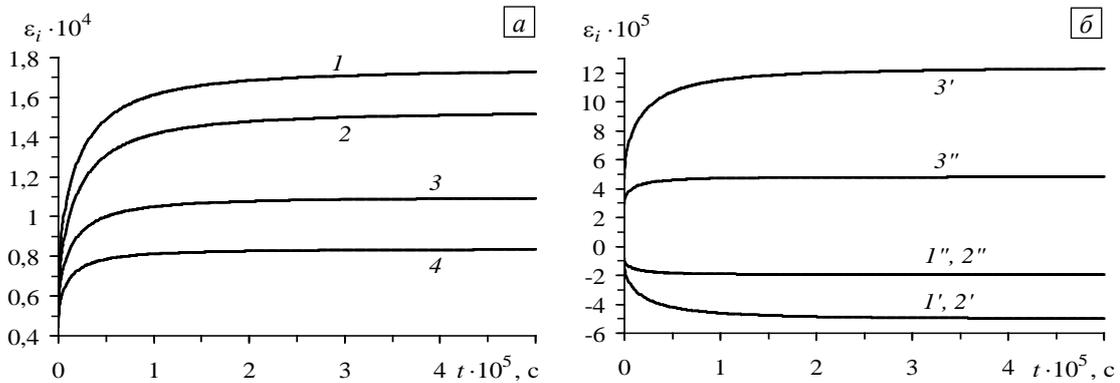


Рис. 3. Кривые ползучести неармированного и армированного пенопластов: при сдвиге в трех плоскостях (а); при растяжении в направлении  $x_3$  (б)

На рисунке 3, б изображены кривые ползучести  $\varepsilon_i(t)$  при ненулевом нормальном напряжении  $\hat{\sigma}_3 \equiv \hat{\sigma}_{33} = 0,1$  МПа. Номер  $i$ -й кривой соответствует номеру  $i$ -й линейной деформации  $\varepsilon_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Кривые, номера которых помечены штрихом, рассчитаны для неармированного пенопласта, а линии, номера которых помечены двумя штрихами, определены для армированной пенопластмассы. При этом кривые  $1', 2'$  в силу изотропности пенопласта полностью совпадают, а линии  $1'', 2''$  неразличимы лишь при выбранном по оси ординат масштабе. Значения ординат точек на кривых  $1''-3''$  по модулю существенно меньше значений ординат точек на линиях  $1'-3'$  соответственно, что также объясняется эффектом армирования.

Кривые ползучести  $\varepsilon_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) при ненулевых нормальных напряжениях  $\hat{\sigma}_j \equiv \hat{\sigma}_{jj} = 0,1 \text{ МПа}$  ( $j = 1, 2$ ) качественно подобны зависимостям, изображенным на рисунке 3, б, и поэтому здесь не приводятся.

### 3. Заключение

Сравнительный анализ содержимого таблиц 1, 2 позволяет заключить, что предложенная в [1] методика определения эффективных характеристик ребристой конструкции вполне может быть использована при практических расчетах. Достоинство этой методики заключается в том, что она, в отличие от методик, изложенных в [10, 11], позволяет вычислять не только упругие, но и термоупругие эффективные характеристики рассматриваемой конструкции (в общем случае, композиции), а также делает возможным расчет термовязкоупругого поведения композиций типа армированных пенопластмасс. Кроме того, она требует разбиения представительной ячейки на число субэлементов на несколько порядков меньшее, чем это необходимо, например, при КЭМ, что существенно сказывается на сокращении времени счета и резервируемой памяти ЭВМ.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-90405-Укр\_а).

### Литература

1. Янковский А.П. Моделирование линейно-термовязкоупругого поведения ребристо-армированных пенопластмасс. Структурная модель // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2012. – Т. 5, № 4. – С. 377-391. DOI
2. Брюккер Л.Э., Ракин А.С. Испытания трехслойных стержней при нормальных и повышенных температурах // Динамика и прочность авиационных конструкций: Межвуз. сб. научн. трудов. – Новосибирск: Изд-во НГУ, НЭТИ, 1978. – Вып. 4. – С. 73-79.
3. Александров А.Я., Бородин М.Я., Павлов В.В. Конструкции с заполнителями из пенопластов. – М.: Машиностроение, 1972. – 212 с.
4. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. – Рига: Зинатне, 1980. – 572 с.
5. Матвеев С.А., Немировский Ю.В. Армированные дорожные конструкции: моделирование и расчет. – Новосибирск: Наука, 2006. – 348 с.
6. Янковский А.П. Построение определяющих уравнений термоупругого поведения сложно армированных пенопластмасс // Техническая механика. – 2010. – № 1. – С. 71-82.
7. Голотина Л.А., Кожевникова Л.Л., Кошкина Т.Б. Численное моделирование реологических свойств зернистого композита с использованием структурного подхода // Механика композитных материалов. – 2008. – Т. 44, № 6. – С. 895-906.
8. Куликов Р.Г., Труфанов Н.А. Применение итерационного метода к решению задачи деформирования однонаправленного композиционного материала с нелинейно-вязкоупругим связующим // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2011. – Т. 4, № 2. – С. 61-71. DOI
9. Олегин И.П., Нигирич Ю.Б., Расторгуев С.Г. Определение эффективных характеристик композиционных материалов методом конечно-элементного моделирования // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Тр. XXI Всерос. конф., Кемерово, 30 июня – 2 июля 2009 г. / Под ред. В.М. Фомина. – Новосибирск: «Параллель», 2009. – С. 183-189.
10. Акишев Н.И., Закиров И.И., Паймушин В.Н., Шишов М.А. Теоретико-экспериментальный метод определения усредненных упругих и пространственных характеристик сотового заполнителя трехслойных конструкций // Механика композитных материалов. – 2011. – Т. 47, № 4. – С. 543-556.
11. Александров А.Я., Брюккер Л.Э., Куришин Л.М., Прусаков А.П. Расчет трехслойных панелей. – М.: Оборонгиз, 1960. – 271 с.
12. Александров А.В., Лацеников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы. – М.: Стройиздат, 1983. – 488 с.
13. Локощенко А.М. Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов. – М.: МГИУ, 2007. – 264 с.
14. Ильюшин А.А. Труды. Т. 3. Теория термовязкоупругости. – М.: Физматлит, 2007. – 288 с.

Поступила в редакцию 25.07.12; опубликована в электронном виде 25.04.13