

DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.1.3
УДК 532.5

УСТОЙЧИВОСТЬ СТРУКТУР В НЕРАВНОВЕСНЫХ СИСТЕМАХ

Н.Н. Веричев

Нижегородский филиал Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Нижний Новгород, Россия

Рассматриваются вопросы применения решеток сосредоточенных динамических систем (осцилляторов) в качестве альтернативных моделей динамики структур конвективных течений. В контексте динамики решеток исследуется устойчивость одномерных и двумерных структур основного течения, а также устойчивость структур вторичных течений. Дается анализ условий устойчивости в зависимости от интенсивности структурной турбулентности, а также геометрических размеров структурированного слоя жидкости.

Ключевые слова: конвекция, структура, устойчивость, осциллятор, решетка

STABILITY OF STRUCTURES IN NON-EQUILIBRIUM SYSTEMS

N.N. Verichev

A.A. Blagonravov Mechanical Engineering Institute RAS, Nizhny Novgorod, Russia

The application of lattices of lumped dynamical systems (oscillators) as alternative models for the dynamics of convective flows is considered. The stability of one- and two-dimensional main-flow structures and the stability of secondary-flow structures are studied in the context of the dynamics of lattices. Stability conditions are analyzed depending on the intensity of structural turbulence and the geometry of the structured liquid layer.

Key words: convection, structure, stability, oscillator, lattice

1. Введение

Исследования динамических структур в неравновесных системах (в сплошных и дискретных средах) имеют давнюю историю [1–3] и с непрекращающимся интересом ведутся до настоящего времени, включая несколько направлений. В частности, в теоретическом плане они связаны с проблемой турбулентности: взаимодействующие структуры предшествуют турбулентности как состоянию пространственно-временного динамического хаоса среды, а последовательность бифуркаций системы определяет механизмы (сценарии) перехода к этому состоянию [2]. В прикладном отношении, с позиции создания устройств обработки информации нового поколения [4, 5], исследование закономерностей структурообразования в природных системах подразумевает перспективу применения искусственных объектов с контролируемой самоорганизацией.

Проблема построения математических моделей, адекватно описывающих динамику структур в сплошных средах, является ключевой и наиболее сложной. Одна из причин — большое разнообразие экспериментально наблюдаемых типов стационарных структур, а также бифуркационных сценариев перехода от одного динамического режима к другому, которые имеют место и в относительно простых гидродинамических течениях, каковыми являются, например, термоконвекции Рэлея–Бенара [3, 6, 7] или течение Тейлора–Куэтта между вращающимися цилиндрами [8]. Эксперимент показывает, что возможны как мягкий, так и жесткий сценарий рождения структур. В последнем случае вариацией начальных условий система может переключаться с одного режима на другой. В частности, возможны переходы от ламинарного течения к турбулентному и наоборот. Как правило, переключения сопровождаются гистерезисными явлениями. Подобное поведение систем хорошо известно из динамики осцилляторов как «явление затягивания». Вопрос о том, может ли быть описано всё многообразие данных динамических процессов исключительно в рамках классических уравнений гидродинамики, остается открытым.

Построение дискретных альтернативных моделей для исследования структурной динамики сплошной среды исходит из факта локализации элементов структур в физическом пространстве. В частности, в термоконвекции такими элементами являются конвективные валы и ячейки Бенара. Это обстоятельство позволяет интерпретировать элементы структур как сосредоточенные объекты — «частицы», и динамику структуры рассматривать как динамику ансамбля частиц. При этом если дискретная модель парциального элемента структуры определена, а также известны связи элементов, то общая модель имеет вид решетки динамических систем (осцилляторов). Многие вопросы динамики таких систем хорошо изучены (см. [9–11] и другие). Разумеется, подобные модели не годятся для конкретных расчетов параметров течений, но они вполне эффективны для качественного рассмотрения общих закономерностей динамики структур и их свойств.

В настоящей работе в рамках решеточных моделей проводится исследование устойчивости конвективных структур, имеющих различные геометрические размерности. Главное внимание уделяется структурам с хаотической динамикой элементов, то есть структурной турбулентности.

2. Устойчивость 1D пространственно-однородных структур

Приведем аргументы в обоснование использования решеточных моделей при исследовании структурированных конвективных течений. Для этого рассмотрим конвекцию в подогреваемом слое жидкости.

Известно, что после того как число Рэлея достигает критического значения, течение жидкости структурируется, принимая вид вращающихся валов (роликов). При этом визуализированное установившееся течение представляет собой систему конвективных ячеек с идентичным, взаимосинхронизированным движением жидкости в каждой из них [8]. Ситуация такова, что фактически слой жидкости можно разделить идеальными стенками на отдельные ячейки, не нарушая при этом его структуры (Рис. 1, а). Кроме того, будучи возмущенной, структура восстанавливается, приходя в исходное состояние с тем же самым набором элементов, и воспроизводятся термодинамические параметры отдельного конвективного вала, а также его геометрические размеры и форма. Число конвективных ячеек в кювете является постоянным при фиксированных параметрах эксперимента, и это означает, что об отдельной ячейке можно говорить как о базовом элементе структуры.

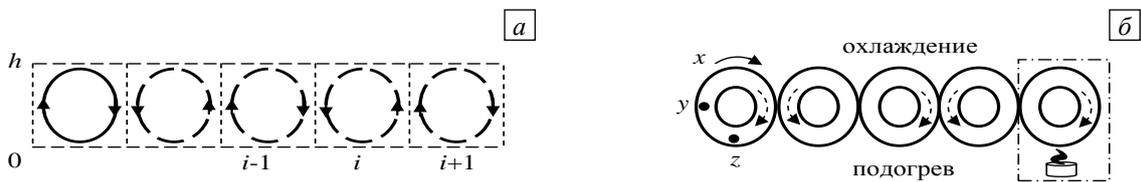


Рис. 1. Схема конвективных валов (а); система конвективных трубок (б)

Допустим, что динамика парциальной ячейки описывается некоторой системой (осциллятором) вида

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{F}(\mathbf{X}), \\ \mathbf{X} &= (x_1, x_2, \dots, x_m)^T, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad \mathbf{F}(\mathbf{X}): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m. \end{aligned} \quad (1)$$

В частности, система (1) может быть получена из уравнений гидродинамики методом Бубнова–Галеркина. В этом случае трехмодовая аппроксимация уравнений Навье–Стокса (в приближении Буссинеска) дает известную систему Лоренца [12–15], где: $\mathbf{X} = (x, y, z)^T$, $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = (-\sigma(x - y), -y + rx - xz, -bz + xy)^T$, x, y, z — безразмерные амплитуды мод, σ — число Прандтля, r — нормированное число Рэлея, b — коэффициент, связанный с геометрией конвективной ячейки.

Для определения связи осцилляторов исходим из данных эксперимента и естественных предположений: а) в установившемся режиме все соответственные динамические параметры осцилляторов одинаковы, $\mathbf{X}_i = \mathbf{X}_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$); б) в установившемся режиме связи обращаются в нуль; в) характер взаимодействия любого осциллятора с соседями (слева, справа) физически одинаков. В рамках этих предположений искомую связь осцилляторов можно записать как $-(\mathbf{f}(-\mathbf{X}_{i-1} + \mathbf{X}_i) + \mathbf{f}(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{i+1}))$, причем $\mathbf{f}(0) = 0$. Если связь линейна или возмущения стационарной структуры малы, то в этом случае она принимает вид: $-\varepsilon \mathbf{C}(-\mathbf{X}_{i-1} + 2\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{i+1})$, где \mathbf{C} — постоянная матрица, а ε — скалярный параметр. Для определения матрицы и параметра должны быть сделаны дополнительные предположения или использованы экспериментальные данные.

Таким образом, динамика пространственно-однородной 1D структуры описывается уравнениями вида

$$\dot{\mathbf{X}}_i = \mathbf{F}(\mathbf{X}_i) - \varepsilon \mathbf{C}(-\mathbf{X}_{i-1} + 2\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{i+1}) \quad (i = \overline{1, N}) \quad (2)$$

с граничными условиями: $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_N = \mathbf{X}_{N+1}$.

Заметим, что поскольку горизонтальный размер конвективной ячейки связан с заданной толщиной слоя жидкости, то число осцилляторов в системе (2) неявно зависит от одного из размеров кюветы с жидкостью. Для рассмотрения одномерных структур второй размер несущественен (далее это обстоятельство больше оговаривать не будем).

Как показывает эксперимент, структурированное движение жидкости демонстрирует явно автоколебательный характер, а это значит, что структуру можно трактовать как взаимную изохронную синхронизацию осцилляторов и, соответственно, ее устойчивость — как устойчивость этого динамического режима. Обратим внимание на свойства (2): в случае устойчивой синхронизации осцилляторов все их динамические параметры, будучи возмущенными, с течением времени уравниваются ($\mathbf{X}_i \rightarrow \mathbf{X}_{i+1}$); диффузионная связь в уравнениях (2) неограниченно убывает, а сама система в финале распадается на N одинаковых уравнений (синхронизированных осцилляторов). При этом если отдельный осциллятор адекватно описывает динамику жидкости в ячейке (предполагаем, что это так), то динамика синхронизированных осцилляторов будет соответствовать динамике структурированного слоя жидкости, схематически изображенного на рисунке 1, а, включая ориентацию движения жидкости в соседних ячейках (имеющую противоположные направления).

Известно, что уравнения Лоренца моделируют динамику целого ряда физических систем, в том числе так называемой «конвективной петли», представляющей собой тороидальную трубку с жидкостью [14, 15]. Трубка имеет круговую или эллипсоидальную форму, расположена в вертикальной плоскости и подогревается в нижней точке (Рис. 1, б). Коэффициент, связанный с геометрией конвективной ячейки, для круговой трубки составляет: $b=1$. В этом случае смысл переменных системы Лоренца следующий [15]: x — скорость течения, y и z — температура жидкости в средней и нижней точках трубки. Совпадение моделей носит неформальный характер, конвективную петлю можно рассматривать в качестве простейшей модели конвективного вала. На рисунке 1, б изображена цепочка контактирующих конвективных трубок, динамика которой описывается системой (2). В этом случае матрица $\mathbf{C} = \text{diag}(0, 1, 0)$, а ε является коэффициентом теплопроводности.

Далее предполагаем, что динамические свойства осциллятора (1) нам известны. Будем считать, что в фазовом пространстве системы существует аттрактор $A(1)$ с максимальным ляпуновским показателем $\lambda(1)$, знак которого и величину выберем в качестве критерия хаотичности этого аттрактора: если $\lambda(1) < 0$, то $A(1)$ регулярный (например, устойчивый предельный цикл или тор); если $\lambda(1) > 0$, то аттрактор хаотический.

Рассмотрим локальную устойчивость взаимной синхронизации осцилляторов в системе (2) — устойчивость решения $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2 = \dots = \mathbf{X}_{N-1} = \mathbf{X}_N$. Нетрудно установить, что уравнение для вектора $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_{N-1})^T$, где $\mathbf{U}_i = \mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{i+1}$, линеаризованное относительно решения $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2 = \dots = \mathbf{X}_{N-1} = \mathbf{X}_N = \boldsymbol{\xi}(t) \in A(1)$, имеет вид:

$$\dot{\mathbf{U}} = (\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{J}_m(\boldsymbol{\xi}) - \varepsilon \mathbf{D}_p \otimes \mathbf{C}) \mathbf{U}. \quad (3)$$

Здесь $p = N - 1$, $\mathbf{J}_m(\boldsymbol{\xi})$ — матрица Якоби парциального осциллятора; \otimes — знак прямого произведения матриц; \mathbf{D}_p — следующая матрица:

$$\mathbf{D}_p = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Устойчивая синхронизация осцилляторов в системе (2) соответствует устойчивому решению $\mathbf{U} = 0$ уравнения (3).

Сформулируем главную для дальнейшего изложения лемму и теорему.

Лемма. Пусть λ_j ($j = \overline{1, p}$) — спектр собственных значений постоянной матрицы \mathbf{D}_p . Уравнение (3) в результате невырожденного преобразования $\mathbf{U} = \mathbf{S}\mathbf{V}$ приводится к виду $\dot{\mathbf{V}}_j = (\mathbf{J}_m(t) - \varepsilon \lambda_j \mathbf{C}) \mathbf{V}_j$ ($j = \overline{1, p}$).

Теорема. Пусть $\lambda(1)$ — максимальный показатель аттрактора $A(1)$ парциального осциллятора, а λ_{\min} — минимальное собственное значение матрицы \mathbf{D}_p . Если матрица $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ (единичная матрица), то при выполнении неравенства $\varepsilon > \lambda(1)/\lambda_{\min}$ нулевое решение ($\mathbf{U} = 0$) уравнения (3) асимптотически

устойчиво и неустойчиво при обратном знаке неравенства. Для другой из числа допустимых матриц имеет место то же неравенство, с заменой $\lambda(1) \rightarrow \varepsilon^*(\lambda(1))$, где величина ε^* зависит от этой матрицы.

Доказательства леммы и теоремы даются в [16]. Функция $\varepsilon^*(\lambda(1))$ обладает следующим свойством: равняется нулю при $\lambda(1) \leq 0$ и возрастает при $\lambda(1) > 0$. Кроме того, она зависит от структуры связей осцилляторов — элементов c_i матрицы C . В частности, если $C = I$, то $\varepsilon^*(\lambda(1)) = \lambda(1)$ [16]. Вычисление собственных значений матрицы D_p [17] для минимального корня дает результат: $\lambda_{\min} = 4 \sin^2(\pi/(2N))$.

Таким образом, синхронизация осцилляторов в системе (2) — пространственно-однородной структуре конвективных валов в слое жидкости, обладает устойчивостью при выполнении неравенства: $\varepsilon > \varepsilon^*(\lambda(1))/(4 \sin^2(\pi/(2N)))$. Разрешая неравенство относительно N , получаем выражение для числа синхронизированных осцилляторов — числа конвективных ячеек в устойчивой структуре: $N \leq N_0 = \pi/\arccos v$, где $v = 1 - \varepsilon^*(\lambda(1))/(2\varepsilon)$. Если число осцилляторов в цепочке $N \gg 1$, то справедливы асимптотические формулы: $\varepsilon > \pi^{-2} N^2 \varepsilon^*(\lambda(1))$, $N \leq N_0 = (\pi\sqrt{\varepsilon/\varepsilon^*})$.

Анализ и физическое содержание полученных условий даются в разделе 7.

3. Устойчивость 2D пространственно-однородных структур

Рассмотрим устойчивость 2D структуры, моделируя ее двумерной прямоугольной решеткой осцилляторов

$$\dot{\mathbf{X}}_{ij} = \mathbf{F}(\mathbf{X}_{ij}) - \varepsilon \mathbf{C}(4\mathbf{X}_{ij} - \mathbf{X}_{i-1j} - \mathbf{X}_{i+1j} - \mathbf{X}_{ij-1} - \mathbf{X}_{ij+1}) \quad (i=1,2,\dots,N_1, j=1,2,\dots,N_2) \quad (4)$$

с граничными условиями: $\mathbf{X}_{0j} = \mathbf{X}_{1j}$, $\mathbf{X}_{N_1+1j} = \mathbf{X}_{N_1j}$, $\mathbf{X}_{i0} = \mathbf{X}_{i1}$, $\mathbf{X}_{iN_2+1} = \mathbf{X}_{iN_2}$, где N_1, N_2 — числа конвективных ячеек в направлениях сторон кюветы. Исходя из смысла уравнений (4), исследуемая на устойчивость структура представляет собой систему конвективных ячеек с квадратной в плане формой [3] и высотой, равной толщине слоя.

Одной из технических трудностей исследования устойчивости является свертывание линеаризованных систем в одно уравнение. Поясним применяемую технику.

Представим прямоугольную решетку как «параллельное» соединение цепочек. Для этого снабдим векторы элементарного осциллятора цепочки вторым индексом, введем векторы $\mathbf{Y}_j = (\mathbf{X}_{1j}, \mathbf{X}_{2j}, \dots, \mathbf{X}_{N_1j})^T$, $\Phi(\mathbf{Y}_j) = (\mathbf{F}(\mathbf{X}_{1j}), \mathbf{F}(\mathbf{X}_{2j}), \dots, \mathbf{F}(\mathbf{X}_{N_1j}))^T$ и представим произвольную цепочку (систему (2)) одним уравнением:

$$\dot{\mathbf{Y}}_j = \Phi(\mathbf{Y}_j) - \varepsilon (\mathbf{B}_{N_1} \otimes \mathbf{C}) \mathbf{Y}_j, \quad (5)$$

где \mathbf{B}_{N_1} — диффузионная матрица вида

$$\mathbf{B}_{N_1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

При параллельном соединении цепочек все элементы вектора \mathbf{Y}_j сопрягаются с соответственными элементами соседних векторов \mathbf{Y}_{j-1} и \mathbf{Y}_{j+1} , и поэтому матрица синтеза есть единичная матрица \mathbf{I}_{N_1} . С учетом сказанного уравнения (5) принимают вид

$$\dot{\mathbf{Y}}_j = \Phi(\mathbf{Y}_j) - \varepsilon (\mathbf{B}_{N_1} \otimes \mathbf{C}) \mathbf{Y}_j - \varepsilon (\mathbf{I}_{N_1} \otimes \mathbf{C}) (-\mathbf{Y}_{j-1} + 2\mathbf{Y}_j - \mathbf{Y}_{j+1}) \quad (j=1,2,\dots,N_2) \quad (6)$$

с граничными условиями: $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}_1$, $\mathbf{Y}_{N_2} = \mathbf{Y}_{N_2+1}$. Произведя матричные операции и записав эту систему относительно элементарных осцилляторов, можно убедиться в эквивалентности систем (6) и (4). Обратим внимание на сходство уравнений (6) и (2).

В отличие от предыдущего раздела, где линейаризация велась по переменным $\mathbf{U}_i = \mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{i+1}$, здесь линейаризацию уравнений (6) проведем стандартно — по переменным $\mathbf{U}_{ij} = \mathbf{X}_{ij} - \xi(t)$ в окрестности решения $\mathbf{X}_{ij} = \xi(t) \in A(1)$. После свертывания линейаризованной системы в одно уравнение получаем следующий результат:

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{I}_{N_1 N_2} \otimes \mathbf{J}_m(\xi) \mathbf{U} - \varepsilon (\mathbf{I}_{N_2} \otimes \mathbf{B}_{N_1} + \mathbf{B}_{N_2} \otimes \mathbf{I}_{N_1}) \otimes \mathbf{C} \mathbf{U}. \quad (7)$$

Способ линейаризации принципиально не меняет сути дела. Формальная разница состоит в том, что в данном случае размерность матрицы $\mathbf{D}_p = \mathbf{I}_{N_2} \otimes \mathbf{B}_{N_1} + \mathbf{B}_{N_2} \otimes \mathbf{I}_{N_1}$ на единицу больше той, которая получилась бы по первому образцу, и в ее спектре имеется один нулевой корень. Все другие собственные значения положительны и совпадают с собственными значениями матрицы, получающейся в первом случае. Не вдаваясь более в подробности, нулевой корень далее во внимание не принимаем.

Как видим, уравнение (7) подпадает под сформулированную выше лемму. Следовательно, устойчивость синхронизации полностью определяется положительными корнями матрицы $\mathbf{D}_p = \mathbf{I}_{N_2} \otimes \mathbf{B}_{N_1} + \mathbf{B}_{N_2} \otimes \mathbf{I}_{N_1}$. Исследование этой матрицы показывает, что ее минимальное собственное значение вычисляется уже по знакомой из предыдущего раздела формуле: $\lambda_{\min} = 4 \sin^2(\pi/(2N))$, где $N = \max\{N_1, N_2\}$. Получаем интересный и неожиданный результат: условие устойчивости 2D структуры выражается неравенством $\varepsilon > \varepsilon^*(\lambda(1))/(4 \sin^2(\pi/(2N)))$, совпадающим с условием устойчивости структуры в цепочке, «длина» которой равняется наибольшей «стороне» прямоугольной решетки осцилляторов (наибольшей стороне прямоугольной кюветы, в которой рассматривается конвекция).

Физическое содержание этого результата обсудим в разделе 7.

4. Устойчивость 3D пространственно-однородных структур

Рассмотрим устойчивость пространственно-однородной структуры в трехмерной решетке осцилляторов:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}_{ijk} = \mathbf{F}(\mathbf{X}_{ijk}) - \varepsilon \mathbf{C} (6\mathbf{X}_{ijk} - \mathbf{X}_{i-1jk} - \mathbf{X}_{i+1jk} - \mathbf{X}_{ij-1k} - \mathbf{X}_{ij+1k} - \mathbf{X}_{ijk-1} - \mathbf{X}_{ijk+1}) \\ (i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2, \quad k = 1, 2, \dots, N_3). \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнения (8) представляют модель объемной конвективной структуры с кубической формой конвективных ячеек, число которых по толщине слоя жидкости равняется N_3 . Подобные конвективные структуры могут возникать, например, в биологических системах [22].

Для свертывания системы (8) снабдим каждый элементарный осциллятор третьим индексом и запишем уравнение произвольного слоя (систему (6)) в виде одного уравнения:

$$\dot{\mathbf{Z}}_k = \mathbf{H}(\mathbf{Z}_k) - \varepsilon (\mathbf{I}_{N_2} \otimes \mathbf{B}_{N_1} + \mathbf{B}_{N_2} \otimes \mathbf{I}_{N_1}) \otimes \mathbf{C} \mathbf{Z}_k. \quad (9)$$

Теперь, полагая трехмерную решетку как «параллельное соединение слоев» (9), запишем ее уравнение аналогично уравнению (6)

$$\dot{\mathbf{Z}}_k = \mathbf{H}(\mathbf{Z}_k) - \varepsilon (\mathbf{I}_{N_2} \otimes \mathbf{B}_{N_1} + \mathbf{B}_{N_2} \otimes \mathbf{I}_{N_1}) \otimes \mathbf{C} \mathbf{Z}_k - \varepsilon (\mathbf{I}_{N_1 N_2} \otimes \mathbf{C}) (-\mathbf{Z}_{k-1} + 2\mathbf{Z}_k - \mathbf{Z}_{k+1}) \quad (k = 1, 2, \dots, N_3). \quad (10)$$

Системе (10) соответствуют граничные условия: $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_{N_3} = \mathbf{Z}_{N_3+1}$.

Линейаризация (10) в окрестности решения $\mathbf{X}_{ijk} = \xi(t) \in A(1)$ и последующее свертывание системы к одному уравнению дает следующий результат:

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{I}_{N_1 N_2 N_3} \otimes \mathbf{J}_m(\xi) \mathbf{U} - \varepsilon (\mathbf{I}_{N_3} \otimes \mathbf{I}_{N_2} \otimes \mathbf{B}_{N_1} + \mathbf{I}_{N_3} \otimes \mathbf{B}_{N_2} \otimes \mathbf{I}_{N_1} + \mathbf{B}_{N_3} \otimes \mathbf{I}_{N_1 N_2}) \otimes \mathbf{C} \mathbf{U}. \quad (11)$$

Как видим, уравнение (11) опять-таки подпадает под лемму, и, следовательно, устойчивость синхронизации сводится к определению собственных значений матрицы $\mathbf{D}_p = \mathbf{I}_{N_3} \otimes \mathbf{I}_{N_2} \otimes \mathbf{B}_{N_1} + \mathbf{I}_{N_3} \otimes \mathbf{B}_{N_2} \otimes \mathbf{I}_{N_1} + \mathbf{B}_{N_3} \otimes \mathbf{I}_{N_1 N_2}$. При исследовании данной матрицы также обнаруживается отмеченный выше факт: минимальный корень матрицы \mathbf{D}_p равняется $4 \sin^2(\pi/(2N))$, где $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$. Отсюда получаем условие устойчивости 3D структуры, которое имеет уже известный по предыдущему материалу вид: $\varepsilon > \varepsilon^*(\lambda(1))/(4 \sin^2(\pi/(2N)))$, где $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$.

5. Вторичные течения и их устойчивость

Одним из признаков зарождающейся гидродинамической турбулентности служит появление и последующие бифуркации вторичных течений, возникающих на фоне основного. О перестройках структуры фазового пространства гидродинамических уравнений существует гипотеза А.Н. Колмогорова, которая гласит, что при росте числа Рейнольдса происходит следующее: 1) появляются аттракторы всё больших размерностей; 2) полностью исчезают маломерные аттракторы. Заметим, что сценарий развития турбулентности Ландау как рождения торов возрастающей по мере роста числа Рейнольдса размерности находится в рамках этой же гипотезы. Гипотеза не доказана [18] и, вероятно, потому, что описывает только один из возможных сценариев, а не является правилом.

Как показывает эксперимент [19], в гидродинамических течениях вполне типичны случаи, когда при вариации начальных условий в одной и той же системе могут осуществляться различные динамические режимы, включая ламинарные и турбулентные. Как уже говорилось, подобное поведение нелинейных систем хорошо известно из динамики радиотехнических генераторов как явление «затягивания». То есть для описания подобных ситуаций соответствующая динамическая модель должна допускать сосуществование в своем фазовом пространстве аттракторов различных типов. Решетки осцилляторов обладают этим свойством.

Поясним на «языке» квазичастиц природу вторичных течений, реализующихся в моделях решеток осцилляторов. Условно назовем «частицей» конвективную ячейку и отождествляемый с ней «элементарный» осциллятор (1). Каждая решетка (2), (4), (8) при фиксированных размерах: (N) , (N_1, N_2) , (N_1, N_2, N_3) , обладает некоторым дискретным набором энергетических уровней, математически соответствующих интегральным многообразиям системы. Число этих уровней определяется делителями данных чисел, и каждому из них соответствует интегральное многообразие в фазовом пространстве соответствующей решетки. Подробнее о связи делителей и интегральных многообразий см. [10, 20, 21]. При сообщении решетке порции энергии, соответствующей определенному энергетическому уровню, происходит взаимодействие частиц, приводящее к образованию объектов нового типа — квазичастиц. Квазичастицы характеризуются как количеством компонент — частиц, так и их пространственной конфигурацией. Квазичастицы могут быть одномерными, двумерными и трехмерными. Их типы подобны бозонам и фермионам в том смысле, что одни из них рождаются и исчезают поодиночке, а другие продельывают это в паре и других сочетаниях. Внутренняя динамика квазичастицы описывается отвечающим ей обобщенным осциллятором (системой связанных элементарных осцилляторов) с характерным аттрактором в фазовом пространстве.

Таким образом, структура вторичного течения представляют собой самоорганизацию квазичастиц — синхронизацию обобщенных осцилляторов, и, соответственно, ее устойчивость и есть устойчивость этой синхронизации.

6. Устойчивость структур вторичных течений как синхронизации обобщенных осцилляторов

Из большого разнообразия вторичных структур в решетках осцилляторов здесь рассмотрим только те, которые возникают на базе синхронизации геометрически одномерных квазичастиц — обобщенных осцилляторов, названных в [16] кластерообразующими (К-осцилляторами, КО). Приведем их определение.

О п р е д е л е н и е. Симметричным (асимметричным) К-осциллятором $O_s(n)$ ($O_a(n)$) будем называть систему n связанных элементарных осцилляторов

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{G}(\mathbf{Y}),$$

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n)^T, \quad \mathbf{G}(\mathbf{Y}) = (\mathbf{F}(\mathbf{X}_1), \mathbf{F}(\mathbf{X}_2), \dots, \mathbf{F}(\mathbf{X}_n))^T - \varepsilon \mathbf{B}_\chi \otimes \mathbf{C}\mathbf{Y},$$

$$\mathbf{B}_\chi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -b_\chi & b_\chi \end{pmatrix}, \quad \chi = s (\chi = a), \quad b_s = 1, \quad b_a = 2$$

при условии существования в фазовом пространстве системы \mathbb{R}^m аттрактора $A_s(n)$ (аттрактора $A_a(n)$), такого, что для $\forall(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n) \in A_s(n)$ ($\in A_a(n)$), $\mathbf{X}_i \neq \mathbf{X}_j$ ($i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$). Название КО связано с симметричностью (асимметричностью) матрицы \mathbf{B}_χ .

Фазовое пространство КО устроено сложно: наряду с собственным аттрактором $A_s(n)$ ($A_a(n)$) в нем существует аттрактор $A(1)$, соответствующий основному течению, и, в общем случае, также присутствуют аттракторы вторичных течений, имеющих более мелкие пространственные масштабы. Далее предполагаем, что свойства кластерных аттракторов $A_s(n)$ и $A_a(n)$ нам известны, в частности, их максимальные ляпуновские показатели $\lambda_s(n)$ и $\lambda_a(n)$.

6.1. Структуры на базе обобщенных осцилляторов $O_s(n)$ при параллельном синтезе

На рисунке 2, а приведено символическое изображение обобщенного К-осциллятора $O_s(n)$; здесь каждый квадрат — элементарный осциллятор. Разный окрас квадратов символизирует различную динамику элементов обобщенного осциллятора, находящегося в «рабочем» режиме — в режиме аттрактора $A_s(n)$. На рисунке 2, б изображена структура на базе $O_s(n)$ при параллельном синтезе. Как видно, структура имеет вид совокупности горизонтальных «лент» синхронизированных элементарных осцилляторов.

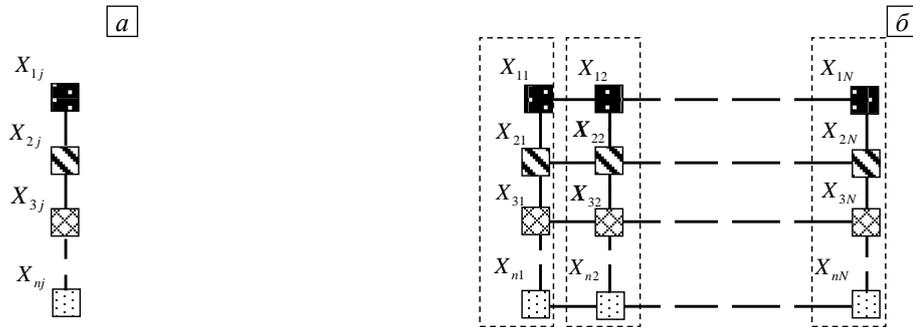


Рис. 2. Символическое изображение КО $O_s(n)$ (а) и ленточная структура на его базе (б)

Уравнения решетки составляем, используя опыт предыдущих разделов. Для векторов динамического состояния КО $\mathbf{Y}_j = (\mathbf{X}_{1j}, \mathbf{X}_{2j}, \dots, \mathbf{X}_{nj})^T$ ($j = \overline{1, N_s}$) эти уравнения следующие:

$$\dot{\mathbf{Y}}_j = \mathbf{G}(\mathbf{Y}_j) - \varepsilon(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{C})(-\mathbf{Y}_{j-1} + 2\mathbf{Y}_j - \mathbf{Y}_{j+1}) \quad (j = 1, 2, \dots, N). \quad (12)$$

Граничные условия в (12): $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_{N_s} = \mathbf{Y}_{N_s+1}$.

Из системы (12) устанавливаем, что для вектора $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_{N_s-1})^T$, где $\mathbf{U}_i = \mathbf{Y}_i - \mathbf{Y}_{i+1}$, линеаризованное относительно решения $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_2 = \dots = \mathbf{Y}_{N_s} = \boldsymbol{\xi}(t) \in A_s(n)$ уравнение имеет вид

$$\dot{\mathbf{U}} = (\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{J}_n(\boldsymbol{\xi}) - \varepsilon \mathbf{D}_p \otimes \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{C}) \mathbf{U}, \quad (13)$$

где $p = N_s - 1$, $\mathbf{J}_n(\xi)$ — матрица Якоби КО $O_s(n)$. Используя лемму и теорему, из уравнения (13) получаем условие устойчивости структуры, изображенной на рисунке 2, б: $\varepsilon > \lambda_s(n)/4 \sin^2(\pi/(2N_s))$, если $\mathbf{C} = \mathbf{I}_m$, и $\varepsilon > \varepsilon^*(\lambda_s(n))/4 \sin^2(\pi/(2N_s))$ в общем случае.

Как видим, условия устойчивости данной структуры и 1D структуры основного течения одинаковы по форме. Однако содержание их разное. Так, если общее число элементарных осцилляторов N , то $N = nN_s$. В асимптотике больших значений N_s при равных показателях основного и вторичного течений (условно) правые части этих неравенств отличаются в n^2 раз.

6.2. Устойчивость структур на базе обобщенных осцилляторов $O_s(n)$ при последовательном синтезе

Названная структура при последовательном синтезе изображена на рисунке 3. Исследуем ее устойчивость при минимальном числе (при двух) КО. Относительно векторов $\mathbf{Y}_j = (\mathbf{X}_{1j}, \mathbf{X}_{2j}, \dots, \mathbf{X}_{nj})^T$ ($j = 1, 2$) связанная система уравнений записывается в следующем виде:

$$\dot{\mathbf{Y}}_1 = \mathbf{G}(\mathbf{Y}_1) - \varepsilon(\mathbf{C}_* \otimes \mathbf{C})(\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2), \quad \dot{\mathbf{Y}}_2 = \mathbf{G}(\mathbf{Y}_2) + \varepsilon(\mathbf{C}_* \otimes \mathbf{C})(\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2), \quad (14)$$

где $\mathbf{C}_* = \text{diag}(0, 0, \dots, 0, 1)$ — матрица последовательного синтеза.

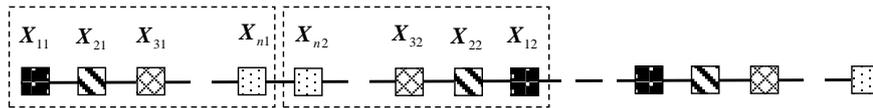


Рис. 3. Структура на базе $O_s(n)$ при последовательном синтезе

Из (16) получаем линеаризованное по переменной $\mathbf{U} = \mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2$ уравнение вида

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{G}'(\xi)\mathbf{U} - \varepsilon(2\mathbf{C}_* \otimes \mathbf{C})\mathbf{U}. \quad (15)$$

Здесь один корень матрицы $2\mathbf{C}_*$ равняется $\lambda = 2$, а все остальные $(n-1)$ корней нулевые. Отсюда получаем следующий вывод: если аттрактор $A_s(n)$ регулярен (представляет собой устойчивый предельный цикл или тор), то тривиальное решение уравнения (15), а значит, и соответствующая структура устойчивы. Однако, как только аттрактор становится хаотическим (в процессе изменения какого-либо параметра), синхронизация и, соответственно, структура (Рис. 3), теряют устойчивость. Точнее, их неустойчивость приобретает седловой тип: по одному из направлений фазовая точка приближается к $A_s(n)$, а по всем другим направлениям удаляется от него. В таком случае существуют начальные условия, при которых приближение к $A_s(n)$ может быть настолько близким, что структура будет наблюдаться длительное время, прежде чем фазовая точка покинет окрестность аттрактора. Можно считать, что в хаотическом режиме данная структура обладает свойством мультистабильности. Очевидно, что свойством мультистабильности будет обладать и структура с произвольным числом КО, а также структуры с произвольным числом КО, полученные при параллельно-последовательном синтезе.

6.3. Устойчивость структур на базе обобщенных осцилляторов $O_a(n)$

Обобщенные осцилляторы типа $O_a(n)$ сосуществуют парами, образуя в рабочем режиме (режиме аттрактора $A_a(n)$) неделимый блок, названный в работе [16] простой клеткой (Рис. 4, а).

Как видим, простая клетка представляет собой отрезок цепочки с нечетным числом элементарных осцилляторов. Каждая пара элементарных осцилляторов, симметричных относительно центра, является синхронизированной, а срединный осциллятор служит «общим» для пары КО [16]. То есть простая клетка сама по себе есть структурированный объект, подобный квазичастице — фермиону.

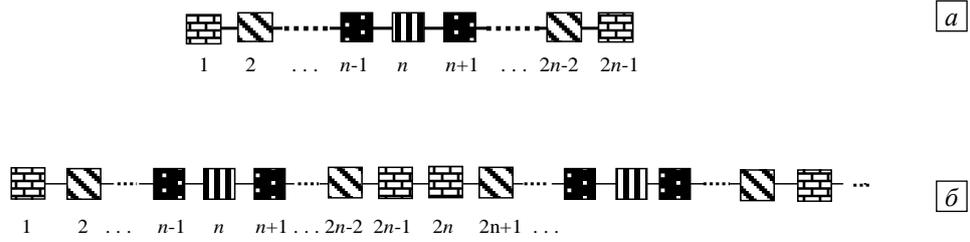


Рис. 4. Простая клетка (а); структура на базе простых клеток (б)

Исследуем устойчивость структуры простой клетки (Рис. 4, а), используя уравнения (2) при $N = 2n - 1$. Относительно переменных $U_i = X_i - X_{N-i+1}$, $i = \overline{1, n-1}$ линеаризованная система имеет вид:

$$\dot{U}_i = F'(\xi_i)U_i - \varepsilon C(-U_{i-1} + 2U_i - U_{i+1}) \quad (i = \overline{1, n-1}) \quad (16)$$

с граничными условиями: $U_0 = U_1, U_n = 0$.

Наряду с (16) рассмотрим другую систему, образованную по следующей схеме. Положим в (16) $\varepsilon = 0$. В полученной «укороченной» системе все уравнения независимы и, в общем случае, решения каждого из них имеют свой максимальный ляпуновский показатель. Выберем из всех уравнений то, решения которого обладают наибольшим из этих показателей, а далее все матрицы $F'(\xi_i)$ в (16) заменим матрицей $F'(\xi)$ данного уравнения. Полученная в результате такой процедуры система сворачивается к одному уравнению вида (3), в котором: $J_m(\xi) = F'(\xi)$, $\xi \in A_a(n)$, $p = n - 1$, а матрица D_p следующая:

$$D_p = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Собственные значения этой матрицы выражаются формулой $\lambda_j = 4 \sin^2(\pi + 2\pi j) / (2(2p + 1))$ ($j = \overline{0, p-1}$). Соответственно теореме получаем условие устойчивости структуры простой клетки в виде следующего неравенства: $\varepsilon > \varepsilon^* (\lambda_{\max}^* / (4 \sin^2(\pi / (2(2n-1))))$.

В полученном неравенстве величина λ_{\max}^* является показателем решений упомянутого выше вспомогательного уравнения, а не показателем кластерного аттрактора, хотя они и связаны между собой. В [16] указывается метод измерения этого показателя в натурном и численном экспериментах. По способу получения данное неравенство выражает достаточное условие. Численный эксперимент показывает, что в случае хаотических аттракторов оно выполняется на некоторых интервалах значений параметра связи [16].

Исследования устойчивости структур на базе простых клеток при последовательном (Рис. 4, б), и параллельном синтезе принципиально не отличается от исследования структур на базе КО $O_s(n)$. Поэтому ограничимся короткими замечаниями.

Матрицей последовательного синтеза простых клеток служит та же самая матрица $C_* = \text{diag}(0, 0, \dots, 0, 1)$. Это значит, что структура, изображенная на рисунке 4, б, будет устойчивой в случае регулярного аттрактора $A_a(n)$ (ламинарного вторичного течения) и неустойчивой (мультистабильной) для хаотического аттрактора (структурированной турбулентности).

Двумерные и трехмерные структуры, подобные показанной на рисунке 4, б, где изображение $O_s(n)$ заменяется простой клеткой, будут устойчивы при выполнении двух условий: а) устойчивости структуры самой клетки; б) устойчивости синхронизации клеток как квазичастиц. Второе условие может быть получено из условия устойчивости синхронизации $O_s(n)$ в результате замены: $\lambda_s(n) \rightarrow \lambda_a(n)$.

7. Заключение

Условия устойчивости структур принципиальным образом зависят от характера динамики (регулярной или хаотической) ее парциальных элементов. Применительно к конвективным структурам в слое жидкости это говорит о следующем: если число Рэлея невелико и пространственно-периодическое течение в слое жидкости ламинарное (периодическое или квазипериодическое во времени, что соответствует $\varepsilon^* \leq 0$), то структура конвективных валов (или другая ячеистая структура) устойчива при сколь угодно малой связи между конвективными ячейками; и эта устойчивость не зависит от числа ячеек, то есть, структуры с ламинарным течением могут наблюдаться в слоях жидкости с любыми геометрическими размерами.

Однако, как только течение переходит в турбулентную фазу (например, за счет увеличения температуры подогрева слоя), ситуация резко меняется. В этом случае $\varepsilon^* > 0$, и условия устойчивости становятся выполнимыми лишь для ограниченного числа ячеек $N \leq N_0$. Причем с ростом интенсивности турбулентных пульсаций (с увеличением показателя аттрактора) величина параметра N_0 становится меньше. А поскольку число конвективных ячеек пропорционально ширине слоя L , то это значит, что существует критическое значение $L = L_0$, такое, что при $L < L_0$ структура с турбулентной динамикой является устойчивой, а если ширина слоя превышает значение L_0 , то структура теряет устойчивость и разрушается. В кювете достаточно больших размеров турбулентная фаза структурного конвективного течения может не наблюдаться практически. В случае неограниченного по ширине слоя этот результат можно интерпретировать следующим образом: если конвективная структура с турбулентным движением возникает в некоторой области пространства (например, случайно, за счет неконтролируемых начальных условий), то она, по мере своего распространения, с вовлечением в конвективное движение соседних областей, обязательно разрушается.

Обнаружено свойство трансляции условий устойчивости 2D и 3D структур на устойчивость 1D структуры с максимальным числом элементов: эти структуры устойчивы, когда устойчива структура в ассоциированной с ними цепочке наибольшей длины. Для 2D структуры это свойство имеет ясный физический смысл, состоящий в следующем: ячеистую структуру можно рассматривать как результат взаимодействия двух взаимоперпендикулярных систем конвективных валов. Тогда, во-первых, при устойчивости парциальной системы с наибольшим числом элементов устойчива и другая, включающая меньшее число элементов. Во-вторых, в результате взаимодействия устойчивых субъектов естественным образом возникает также устойчивое новое образование — ячеистая структура. Наоборот, если хотя бы одна из систем конвективных валов неустойчива, то неустойчива и порождаемая ими структура. Таким образом, устойчивость сложных ячеистых структур обуславливается устойчивостью более простых порождающих структур.

Если параметр связи не слишком велик (при больших ε аттрактор основного течения $A(1)$ может быть глобальным [17]), аттракторы вторичных течений (в рассмотренных случаях это $A_s(n)$ и $A_u(n)$) сосуществуют в фазовом пространстве совместно с аттрактором основного течения. Количество аттракторов вторичных течений и соответствующих им структур определяется свойствами делимости чисел N_1, N_2, N_3 [21], величины которых, в свою очередь, связаны с геометрическими размерами слоя. Например, для цепочки из 100 элементов таких аттракторов будет девять. Одна часть структур может быть устойчивой, а другая — мультистабильной. При вариации начальных условий возможна реализация как основного, так и одного из устойчивых вторичных течений. По мере установления стационарных режимов, которое из-за сложности и многомерности фазового пространства может занимать достаточно большое время, мультистабильные структуры проявляют себя как части переходных процессов, появляясь и затем исчезая на коротких промежутках времени.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-08-97066-р_поволжье).

Литература

1. Пригожин И. Неравновесная статистическая механика. – М.: Мир, 1964. – 316 с.
2. Рабинович М.И., Суцук М.М. Регулярная и хаотическая динамика структур в течениях жидкости // УФН. – 1990. – Т. 160, № 1. – С. 3-64. DOI
3. Гетлинг А.В. Формирование пространственных структур конвекции Рэлея–Бенара // УФН. – 1991. – Т. 161, № 9. – С. 1-80.
4. Браун Г., Уолкен Дж. Жидкие кристаллы и биологические структуры. – М.: Мир, 1982. – 198 с.
5. Rabinovich M.I., Eversky A.B., Weidman Patrick D. The dynamics of pattern. – World Scientific, 2000. – 324 p.
6. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. – М.: Наука, 1989. – 320 с.
7. Гетлинг А.В. Конвекция Рэлея–Бенара. Структуры и динамика. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 248 с.
8. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. – М.: Мир, 1986. – 184 с.

9. *Kaneko K.* Clustering, coding, switching, hierarchical ordering, and control in a network of chaotic elements // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. – 1990. – V. 41, N. 2. – P. 137-172. DOI
10. *Belykh V.N., Belykh I.V., Hasler M.* Hierarchy and stability of partially synchronous oscillations of diffusively coupled dynamical systems // *Phys. Rev. E*. – 2000. – V. 62, N. 5. – P. 6332-6345. DOI
11. *Belykh V.N., Belykh I.V., Hasler M., Nevidin K.V.* Cluster synchronization in three-dimensional lattices of diffusively coupled oscillators // *Int. J. Bifurcation Chaos*. – 2003. – V. 13. – P. 755-779. DOI
12. *Lorenz E.N.* Deterministic Nonperiodic Flow // *J. Atmos. Sci.* – 1963. – V. 20. – P. 130-141. DOI
13. *Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М.* Системы гидродинамического типа и их применение / Под ред. А.М. Обухова. – М.: Наука, 1981. – 366 с.
14. *Moon F.C.* Chaotic vibrations // *Physik in Unserer Zeit*. – 1987. – V. 19, N. 3. – P. 94-96. DOI
15. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. – М.: Физматлит, 2001. – 296 с.
16. *Verichev N.N., Verichev S.N., Wiercigroch M.* C-oscillators and stability of stationary cluster structures in lattices of diffusively coupled oscillators // *Chaos Soliton. Fract.* – 2009. – V. 42, N. 2. – P. 686-701. DOI
17. *Белых В.Н., Веричев Н.Н.* Пространственно-однородные автоволновые процессы в системах с переносом и диффузией // *Известия ВУЗов. Радиофизика*. – 1996. – Т. 39, № 5. – С. 588-596.
18. *Арнольд В.И.* Новый обскурантизм и Российское просвещение. – М.: Фазис, 2003. – 60 с.
19. *Ahlers G.* Experiments with Rayleigh–Bénard convection // *Dynamics of Spatio-Temporal Structures. Springer Tr. Mod. Phys.* – 2006. – V. 207. – P. 67-94. DOI
20. *Josić K.* Invariant manifolds and synchronization of coupled dynamical systems // *Phys. Rev. Lett.* – 1998. – V. 80, N. 14. – P. 3053-3056. DOI
21. *Веричев Н.Н.* Физика, существование и синтез кластерных структур связанных динамических систем // *Нелинейный мир*. – 2009. – Т. 7, № 1. – С. 28-46.
22. *Гагаишев А.И., Тарунин Е.Л.* Интенсивность тепловой конвекции в ульях. // *Вычисл. мех. сплош. сред.* – 2008. – Т. 1, № 2. – С. 16-26. DOI

Поступила в редакцию 06.06.12; опубликована в электронном виде 25.04.13