

DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.1.14

УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАЗРУШЕНИЯ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА С УЧЕТОМ СЖИМАЕМОСТИ И НЕОДНОРОДНОСТИ

А.Н. Прокудин, В.И. Одинок

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре, Россия

Численно исследуется влияние сжимаемости и неоднородности льда на процесс разрушения ледяного покрова при помощи запатентованных способов разрушения. Напряженно-деформированное состояние в системе, состоящей из ледяного покрова, ледоразрушающего устройства и воды, рассчитывается апробированным численным методом. Приводятся и анализируются результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: численный метод, краевая задача, напряженно-деформированное состояние, уравнения механики деформируемого твердого тела, уравнения Навье–Стокса

NUMERICAL MODELING OF THE DESTRUCTION OF ICE COVER TAKING INTO ACCOUNT COMPRESSIBILITY AND INHOMOGENEITY

A.N. Prokudin and V.I. Odinkov

Institute of Machine Science and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia

The effect of ice compressibility and inhomogeneity on the process of ice cover destruction is studied numerically using the appropriate patented methods. The stress-strain state of the system consisting of ice cover, ice-breaking mechanism and water is calculated by the approved numerical method. The results of numerical experiments are given and analyzed.

Key words: numerical method, boundary-value problem, stress-strain state, deformable body mechanics equations, Navier–Stokes equations

1. Введение

Механическое поведение ледяного покрова под действием различных нагрузок представляет значительный прикладной интерес при проектировании нефтегазодобывающих платформ, при проведении мероприятий по предупреждению ледяных заторов на реках, в целях продления навигации в водоемах. Натурные эксперименты с ледяным покровом требуют больших материальных затрат, в связи с чем важную роль приобретает численное моделирование с применением современных вычислительных средств. За последнее десятилетие построением математических моделей, адекватно описывающих механическое поведение ледяного покрова, занимался ряд исследователей [1–5], в числе которых и авторы настоящей статьи.

Так, в работе [1] предложена феноменологическая модель механического поведения льда при больших скоростях деформаций. Модель позволяет учитывать такие явления как образование трещин, различие предела прочности при растяжении и сжатии, возможность возникновения в раздробленном льду гидростатического давления и ряд других. Сравнение вычисленных и экспериментальных данных показало качественное и количественное совпадение результатов для многих условий.

Модель разрушения льда при большой площади силового контакта построена в работе [2] на основе анализа натуральных показателей. Модель способна качественно объяснить характер разрушения при взаимодействии ледовых образований с морскими платформами. Более подробный обзор исследований в области механики ледяного покрова представлен в [3, 4].

Работы [5–7] посвящены математическому моделированию процесса разрушения ледяного покрова с помощью разработанных для этих целей устройств [8, 9]. В основе устройств лежит локализация процесса горения газозооной смеси в замкнутом объеме. Для построения математической модели ледяного покрова в работах использовались следующие основные допущения: лед считался линейно-упругим несжимаемым изотропным однородным телом, а деформации в нем — малыми. Следует отметить, что допущения о линейной упругости и изотропности льда традиционны и применяются при решении задач, где исследуется такой материал, а обоснованность допущений подтверждается экспериментами. Утверждение, что лед есть однородная и несжимаемая среда, является не столь однозначным и может вызвать закономерные вопросы. Во-первых, любая среда, в той или иной степени, является сжимаемой; в частности, для ледяного покрова коэффициент Пуассона по разным данным составляет примерно 0,35, в то время как для гипотетического несжимаемого материала он равен 0,5. Во-вторых, ледяной покров, существующий в естественных условиях, характеризуется значительным перепадом температур на нижней и верхней поверхностях, способным, вообще говоря, привести к заметной пространственной неоднородности физико-механических свойств льда. В данной работе

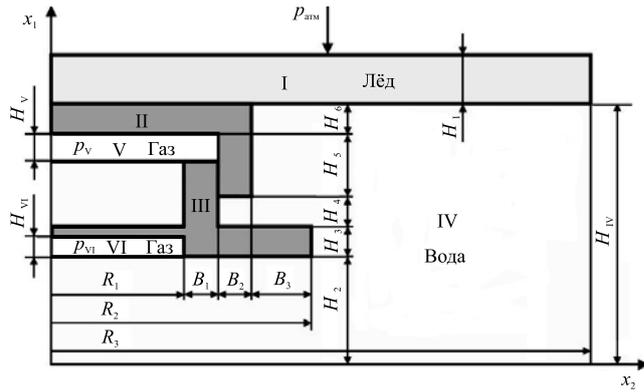


Рис. 1. Расчетная схема

исследуется влияние сжимаемости и неоднородности ледяного покрова на результаты численного моделирования его разрушения с помощью новых способов создания нагружающего воздействия [8, 9].

2. Постановка задачи

Расчетная схема для задачи разрушения льда с помощью устройства, описанного в [8], приведена на рисунке 1. Здесь: I — ледяной покров, II, III — цилиндры, IV — вода, V, VI — газозвушнные подушки. Данная расчетная схема аналогична схеме из работы [7]. Рассмотрим подробно основные допущения, использующиеся для построения математической модели.

2.1. Области I–III

Среды в этих областях положим линейно упругими сжимаемыми изотропными. При этом будем учитывать неоднородность по толщине физико-механических свойств ледяного покрова (область I), а материалы металлических цилиндров (области II, III) для простоты примем однородными. Деформации, возникающие в областях I–III, будем считать малыми. Таким образом, напряженно-деформированное состояние в этих областях математически описывают:

– уравнения движения

$$\sigma_{ij,j} + F_i^t = I_i^t, \quad I_i^t = \rho_t \left(\frac{\partial v_i}{\partial \tau} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) \quad (i, j, k = 1, 2, 3); \quad (1)$$

– закон Гука для изотропного материала

$$\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} = 2G_t(x_1)(\varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}/3) \quad (i = 1, 2, 3); \quad (2)$$

– уравнение неразрывности

$$3K \frac{d\sigma}{d\tau} - \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (3)$$

Здесь: t — идентификатор области, $t = I, II, III$; $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ — компоненты тензоров напряжений и деформаций соответственно; F_i^t — проекции удельной объемной силы на координатные оси x_i ($i = 1, 2, 3$); ρ_t — плотность материала; v_i — проекции скоростей перемещений на координатные оси x_i ; τ — время; σ — гидростатическое напряжение; $G_t(x_1)$ — модуль сдвига в области t как функция вертикальной координаты x_1 ; ε — первый инвариант тензора деформаций, $\varepsilon = \varepsilon_{ii}$; δ_{ij} — символы Кронекера; в уравнениях (1)–(3) производится суммирование по повторяющимся индексам; K — коэффициент объемного сжатия, который выражается через модуль сдвига G и коэффициент Пуассона ν следующим образом: $K = (1 - 2\nu)/(2G(1 + \nu))$.

В случае малых деформаций справедливы соотношения:

$$\frac{d\varepsilon_{ij}}{d\tau} = \xi_{ij} \Rightarrow \varepsilon_{ij} = \int_{\tau} \xi_{ij} d\tau, \quad (4)$$

где $[\xi_{ij}]$ — тензор скоростей деформаций, $\xi_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i})/2$. При дискретном по времени (с шагом $\Delta\tau_m$) процессе деформации, когда $\tau = \sum_m \Delta\tau_m$, формула (4) имеет вид:

$$(\varepsilon_{ij})_m \cong \sum_m (\xi_{ij})_m \Delta\tau_m = (\varepsilon_{ij})_{m-1} + (\xi_{ij})_m \Delta\tau_m, \quad (5)$$

где $\Delta\tau_m$ — продолжительность m -го временного шага; $(\xi_{ij})_m$ и $(\varepsilon_{ij})_m$ — компоненты тензоров скоростей деформаций и деформаций на m -м временном шаге; $(\varepsilon_{ij})_{m-1}$ — компоненты тензора деформаций на $(m-1)$ -м временном шаге

Рассмотрим подробно связь модуля сдвига G_t с координатой x_1 в областях $t = I - III$. Поскольку материалы цилиндров, согласно модели, однородны, то модули при $t = II, III$ представляют собой константы: $G_t(x_1) = G_t$. Ледяной покров ($t = I$), как сказано выше, считается неоднородным. Прежде чем говорить о конкретном модуле сдвига льда, необходимо отметить то обстоятельство, что физико-механические свойства естественного ледяного покрова имеют существенную как пространственную (не только по толщине), так и временную неоднородность. Заметно отличаются между собой по характеристикам лед речной и морской, однолетний и многолетний, арктический и антарктический, лед в период нарастания и таяния и так далее. Разумеется, учесть все многообразие видов ледяного покрова невозможно, однако рассматривать отдельно морской и пресноводный лед, безусловно, необходимо: именно между ними имеются наибольшие различия. Морской лед — это среда, в которую, кроме непосредственно льда, входят твердые соли (при достаточно низких температурах), солевой раствор, пузырьки воздуха и другие неорганические и органические примеси. Пресноводный лед более однороден по своему составу, и большую часть примесей в нем составляют пузырьки воздуха. Морской лед податливый и вязкий, а пресноводный — жесткий и хрупкий.

Для морского льда будем учитывать неоднородность модуля Юнга только по толщине; коэффициент Пуассона и плотность примем постоянными. Модуль Юнга традиционно [12] считается зависящим только от объема солевого раствора V_b : $E = E(V_b)$. Объем солевого раствора V_b , в свою очередь, определяется соленостью льда и температурой: $V_b = V_b(S, T)$, а соленость и температура льда являются функциями вертикальной координаты x_1 : $S = S(x_1)$, $T = T(x_1)$. Учитывая все вышесказанное, а также известное соотношение теории упругости $G = E/(2 + 2\nu)$, получаем:

$$G_1(x_1) = E_1(V_b(S(x_1), T(x_1)))/(2 + 2\nu_1). \quad (6)$$

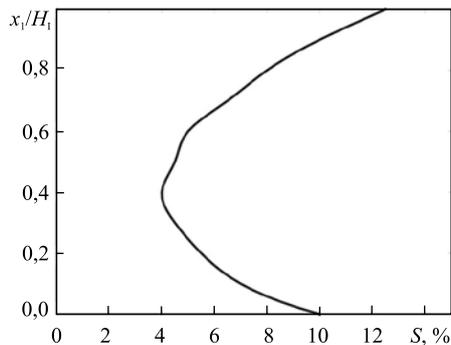


Рис. 2. Профиль солености морского ледяного покрова

Функцию связи температуры льда T и вертикальной координаты x_1 для простоты возьмем линейной, изменяющейся от температуры плавления льда T_{melt} на нижней поверхности ледяного покрова до температуры окружающей среды T_{min} на верхней. Профиль солености ледяного покрова не постоянен и непрерывно меняется под действием различных процессов, происходящих во льду. В данной работе используется «С-образный» профиль солености, характерный для однолетнего льда морей Арктики и Антарктики в период нарастания [10]. Профиль изображен на рисунке 2.

Соотношение для вычисления объема солевого раствора $V_b(S, T)$ (в промилле) как функции солености S (в промилле) и температуры T (в °С) получено на основе экспериментальных данных в работе [11] и имеет вид:

$$V_b = S(49,185/|T| + 0,532). \quad (7)$$

Данная формула справедлива для интервала температур от $-22,9$ до $-0,5^\circ\text{C}$.

Модуль Юнга морского льда зависит от относительного объема солевого раствора V_b следующим образом [12]:

$$E_1 = E_f(1 - V_b)^4, \quad (8)$$

где E_f — модуль Юнга пресноводного льда (в ГПа).

С учетом (7), (8) выражение для модуля сдвига льда (6) принимает следующий вид:

$$G_1(x_1) = E_f \left(1 - S(x_1) \left(\frac{49,185}{|T(x_1)|} + 0,532 \right) \right)^4 / (2 + 2\nu). \quad (9)$$

На рисунке 3, а приведено распределение модуля сдвига по толщине морского ледяного покрова для трех значений температуры $T_{\min} = -10; -15; -20^\circ\text{C}$, полученное с помощью формулы (9) с учетом профиля солености (Рис. 2) при $E_f = 9$ ГПа. Для пресноводного льда будем учитывать зависимость модуля Юнга только от температуры T : $E = E(T)$. Профиль температуры имеет, как и ранее, вид линейной функции, изменяющейся от T_{melt} на нижней поверхности до температуры окружающей среды T_{\min} на верхней границе. В итоге модуль Юнга имеет вид [13]: $E(T) = E_0 + e(T_{\text{melt}} - T)$. Тогда модуль сдвига можно определить по формуле:

$$G_1(x_1) = (E_0 + e(T_{\text{melt}} - T)) / (2 + 2\nu), \quad (10)$$

где $E_0 = 9$ ГПа — модуль Юнга при температуре плавления, $e = 4,5 \cdot 10^{-3}$ ГПа/К. Полученные профили показаны на рисунке 3, б.

Также для сравнения результатов использовалась однородная модель морского льда:

$$G_1(x_1) = E_0 / (2 + 2\nu). \quad (11)$$

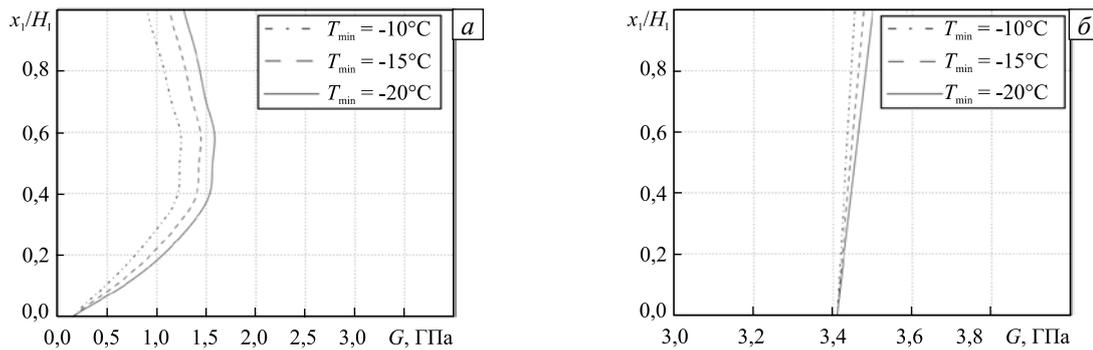


Рис. 3. Профиль модуля сдвига морского (а) и пресноводного (б) ледяного покрова

2.2. Область IV

Заполняющая эту область вода моделируется как ньютоновская вязкая несжимаемая жидкость. Система дифференциальных уравнений для воды, по сравнению с предыдущими работами [5–7], не претерпевает каких-либо изменений:

$$F_i^t - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 v_i = I_i^t, \quad I_i^t = \rho_t \left(\dot{v}_i + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) \quad (i, k = 1, 2, 3), \quad t = \text{IV}; \quad (12)$$

$$v_{i,i} = 0, \quad (13)$$

где p — давление; μ — коэффициент динамической вязкости; ∇^2 — оператор Лапласа.

2.3. Области V и VI (газовоздушная смесь)

Процесс горения в областях V, VI моделируется по аналогии с работами [5–7]. Давления p_V и p_{VI} продуктов сгорания возрастают от начального значения (давления, создаваемого при нагнетании газовой смеси) p_0 , до некоторого конечного p_1 . Процесс горения полагается адиабатическим; для продуктов горения выполняется закон $pV = \text{const}$. Для задания величины p_1 используются экспериментальные данные [14].

2.4. Единая система уравнений для областей I–IV

Системы уравнений (1)–(3) и (12)–(13) можно привести к единому виду:

$$\sigma_{ij,j} + F_i^t = I_i^t, \quad I_i^t = \rho_t \left(\frac{\partial v_i}{\partial \tau} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right), \quad t = \text{I–IV}; \quad (14)$$

$$\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} = 2\lambda_t C_{ij}^t, \quad \begin{cases} \lambda_t = G_t(x_1), & C_{ij}^t = \varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij} / 3, & t = \text{I–III}; \\ \lambda_t = \mu, & C_{ij}^t = \xi_{ij}, & t = \text{IV}; \end{cases} \quad (15)$$

$$3K_t(x_1) \frac{d\sigma}{d\tau} - \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad \begin{cases} K_t(x_1) = \frac{1-2\nu_t}{2G_t(x_1)(1+\nu_t)}, & t = \text{I–III}; \\ K_t(x_1) = 0, & t = \text{IV}. \end{cases} \quad (16)$$

2.5. Начальные и граничные условия

В начальный момент времени во всей расчетной области скорости перемещений и скорости деформаций равнялись нулю:

$$v_i = 0, \quad \xi_{ij} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (17)$$

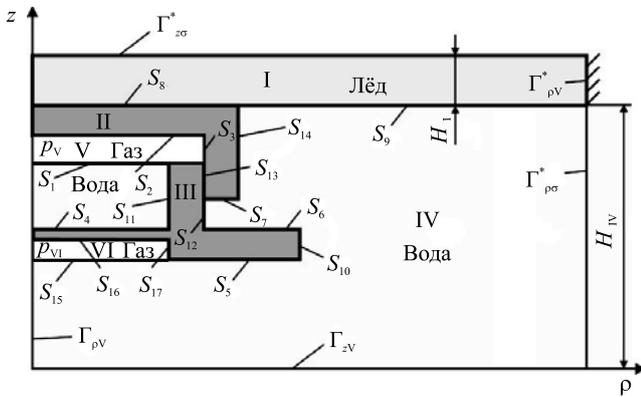


Рис. 4. Граничные условия задачи

Задача решалась в цилиндрической системе координат с учетом осевой симметрии

$$v_\varphi = 0, \quad \xi_{z\varphi} = 0, \quad \xi_{\rho\varphi} = 0, \quad \sigma_{z\varphi} = \sigma_{\rho\varphi} = 0, \quad (18)$$

и имела граничные условия (Рис. 4):

– на оси симметрии

$$v_\rho \Big|_{\Gamma_{\rho\nu}} = 0, \quad \sigma_{\rho z} \Big|_{\Gamma_{\rho\nu}} = 0, \quad (19)$$

$$\sigma_{zz} \Big|_{\Gamma_{z\sigma}^*} = -p_{atm}; \quad (20)$$

– условия на поверхностях контакта разнородных сред:

$$\sigma_{\rho z} \Big|_{S_i} = 0 \quad (i = 3, 10-14, 17), \quad (21)$$

$$\sigma_{z\rho} \Big|_{S_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 4-9, 15, 16); \quad (22)$$

– давление продуктов горения газовой смеси в областях V и VI:

$$\sigma_{zz} \Big|_{S_i} = -p_V \quad (i = 1, 2), \quad \sigma_{\rho\rho} \Big|_{S_3} = -p_{VI}, \quad (23)$$

$$\sigma_{zz} \Big|_{S_i} = -p_V \quad (i = 15, 16), \quad \sigma_{\rho\rho} \Big|_{S_{17}} = -p_{VI}; \quad (24)$$

– условие непротекания на дне водоема:

$$v_z \Big|_{\Gamma_{z\nu}} = 0; \quad (25)$$

– условия на внешней границе расчетной области:

$$v_\rho \Big|_{\Gamma_{\rho\nu}^*} = 0, \quad \sigma_{\rho z} \Big|_{\Gamma_{\rho\nu}^*} = -\psi \sigma_s v_{slip} / |v_u|, \quad (26)$$

$$\sigma_{\rho\rho} \Big|_{\Gamma_{\rho\nu}^*} = -p_1 - \gamma_1 H_1 - \gamma_2 h \quad (0 \leq h \leq H_{IV}), \quad (27)$$

где v_{slip} — скорость скольжения области I относительно некоторой основы, $v_{slip} = v_z|_{\Gamma_{zv}^*} - v_z^*$ (здесь: v_z^* — скорость основы, и если она неподвижна, как в рассматриваемом случае, то $v_z^* = 0$; $|v_u|$ — нормирующая скорость); σ_s — условный предел текучести льда; ψ — коэффициент трения (принимался $\psi = 1000$).

Наряду с моделью (14)–(16) для сравнения результатов расчетов далее будет использоваться модель из работ [5–7], основанная на предположении о несжимаемости и однородности упругих сред в областях I, II.

3. Численная схема и алгоритм решения

Для решения начально-краевой задачи (14)–(27) применим незначительным образом модифицированную численную схему, опубликованную в работе [7], и обсудим привнесенные отличия.

Запишем уравнение неразрывности (16) в конечных разностях для ортогонального цилиндрического элемента с учетом осевой симметрии с помощью полностью неявной схемы в соответствии с работой [7].

Для наглядности вместо длин дуг S_{ij}^k будем использовать размеры элемента $\Delta z, \Delta \rho$:

$$3K_t(z) \left(\frac{(\sigma)_m - (\sigma)_{m-1}}{\Delta \tau_m} + \bar{v}_z \frac{(\Delta \sigma)_z}{\Delta z} + \bar{v}_\rho \frac{(\Delta \sigma)_\rho}{\Delta \rho} \right) - \frac{\Delta v_z}{\Delta z} - \frac{\Delta v_\rho}{\Delta \rho} - \frac{v_\rho}{\rho_1 + \rho_2} = 0, \quad (28)$$

где $(\sigma)_m$ — гидростатическое давление на временном шаге m ; \bar{v}_z, \bar{v}_ρ — средние по элементу скорости в направлении z и ρ , зафиксированные на k -й итерации; $(\Delta \sigma)_z, (\Delta \sigma)_\rho$ — изменение гидростатического давления вдоль соответствующей координаты на текущем временном шаге m ; $\Delta \tau_m$ — продолжительность временного шага m ; $\Delta v_z = v_z^2 - v_z^1, \Delta v_\rho = v_\rho^2 - v_\rho^1, v_z = v_z^1 + v_z^2; v_\rho = v_\rho^1 + v_\rho^2; v_z^i, v_\rho^i$ — скорости на i -й грани элемента в направлении z и ρ ; $\Delta z, \Delta \rho$ — размеры ортогонального элемента в цилиндрической системе координат, ρ_1, ρ_2 — радиусы кривизны внутренней и внешней граней элемента.

Приведем уравнение (28) к рекуррентному виду:

$$v_z^2 = v_z^1 - \frac{\Delta z}{\Delta \rho} (v_\rho^2 - v_\rho^1) - \frac{\Delta z}{\rho_1 + \rho_2} (v_\rho^1 + v_\rho^2) + 3K_t(z) \left(\frac{\Delta z ((\sigma)_m - (\sigma)_{m-1})}{\Delta \tau_m} + \bar{v}_z (\Delta \sigma)_z + \frac{\Delta z}{\Delta \rho} \bar{v}_\rho (\Delta \sigma)_\rho \right). \quad (29)$$

Соотношение (29) позволяет вычислить скорости v_z , при этом расчет производится в направлении возрастания координаты z . Конечно-разностная форма уравнений движения (14) останется неизменной [7]. Для раскрытия нелинейности применяется та же итерационная процедура, что и в работе [7]. При этом нелинейные члены присутствуют не только в уравнениях движения (14), но и в уравнении неразрывности (16), что обусловлено наличием в нем полной производной $d\sigma/d\tau$.

Общее число независимых переменных образует множество следующего вида:

$$X \left\{ \left[\sigma_{zz} \Big|_{\Gamma_{zv}^*} \right], \left[v_\rho \Big|_{\Gamma_{\rho z}} \right], \left[v_z \Big|_{\Gamma_{zv}^*} \right], \left[v_\rho \right], \left[\sigma_{\rho\rho} \Big|_{\Gamma_{\rho v}^*} \right], \left[v_\rho \Big|_{\Gamma_{\rho z}} \right], \left[\sigma \right]_{t=I, II, III} \right\},$$

где $\Gamma_\rho|_{\rho=0}, \Gamma_\rho^*|_{\rho=\rho^*}, \Gamma_z|_{z=0}, \Gamma_z^*|_{z=z^*}$ — поверхности, ограничивающие рассматриваемую расчетную область; $\Gamma_{\rho v}, \Gamma_{\rho v}^*, \Gamma_{\rho\sigma}, \Gamma_{\rho\sigma}^*, \Gamma_{zv}, \Gamma_{zv}^*, \Gamma_{z\sigma}, \Gamma_{z\sigma}^*$ — поверхности, где заданы скорости перемещений v и нормальные напряжения. По сравнению с работой [7] множество стало шире за счет добавления группы неизвестных $[\sigma]_{t=I, II, III}$, обусловленных сжимаемостью упругих сред. Этой группе соответствуют новые уравнения, имеющие место для каждого элемента расчетной сетки в областях I–III:

$$F_4^f = (\sigma_{zz})^f + (\sigma_{\rho\rho})^f + (\sigma_{\phi\phi})^f - 3(\sigma)^f = 0 \quad (f = 1, \dots, f_4),$$

где f_4 — количество элементов в областях $t = I, II, III$.

Для решения задачи используется алгоритм, разработанный в [7].

4. Результаты численных расчетов

Физико-механические параметры льда, материалов цилиндров и воды были взяты из работ [8, 15, 16] и равнялись: удельный вес $\gamma_1 = 9200 \text{ Н/м}^3$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 78000 \text{ Н/м}^3$; модуль сдвига $G_2 = G_3 = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$; динамическая вязкость $\mu = 1,789 \text{ мПа}\cdot\text{с}$.

Начальные геометрические параметры имели следующие значения (см. Рис.1): $H_1 = 1 \text{ м}$; $H_2 = 10 \text{ м}$; $H_3 = 0,1 \text{ м}$; $H_4 = 0,4 \text{ м}$; $H_5 = 0,5 \text{ м}$; $H_6 = 0,1 \text{ м}$; $H_V = 0,05 \text{ м}$; $H_{VI} = 0,04 \text{ м}$; $R_1 = 2,5 \text{ м}$; $B_1 = 0,1 \text{ м}$; $B_2 = 0,1 \text{ м}$; $B_3 = 0,3 \text{ м}$; $R_3 = 20 \text{ м}$. Конечное давление p_1 в замкнутом объеме составляло $p_1 \approx 0,7 \text{ МПа}$ [14].

Исследуемый процесс разбивался на равные по длительности шаги по времени. Для анализа сходимости применяемого вычислительного алгоритма и определения оптимального разбиения области проведена серия тестовых расчетов на сетках, состоящих из 5668, 7316, 10540, 13195 и 14214 элементов. Под оптимальной понимается сетка, дальнейшее измельчение которой не приводит к существенному изменению результатов. Расчеты дали одинаковую качественную картину напряженно-деформированного состояния в системе «лед–разрушающее устройство» на всех сетках; количественная разница в результатах с использованием сеток из 10540, 13195 и 14214 элементов составила $1 \div 2\%$. В итоге за основную была выбрана сетка из 13195 элементов, из которых 2900 приходилось на ледяной покров. Именно при этой сетке были получены все нижеприведенные результаты.

Необходимо отметить, что дополнительные нелинейные члены в уравнении (16) не оказали принципиального влияния на сходимость итерационной процедуры раскрытия нелинейности, и $5 \div 8$ итераций оказались достаточными для получения максимальной относительной разницы $e = 0,001$ между полями скоростей на соседних итерациях.

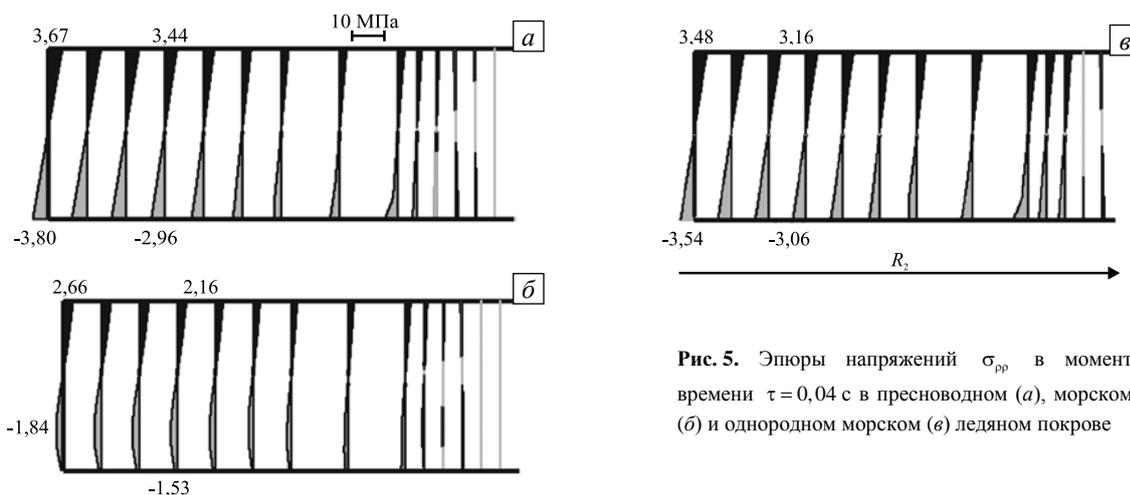
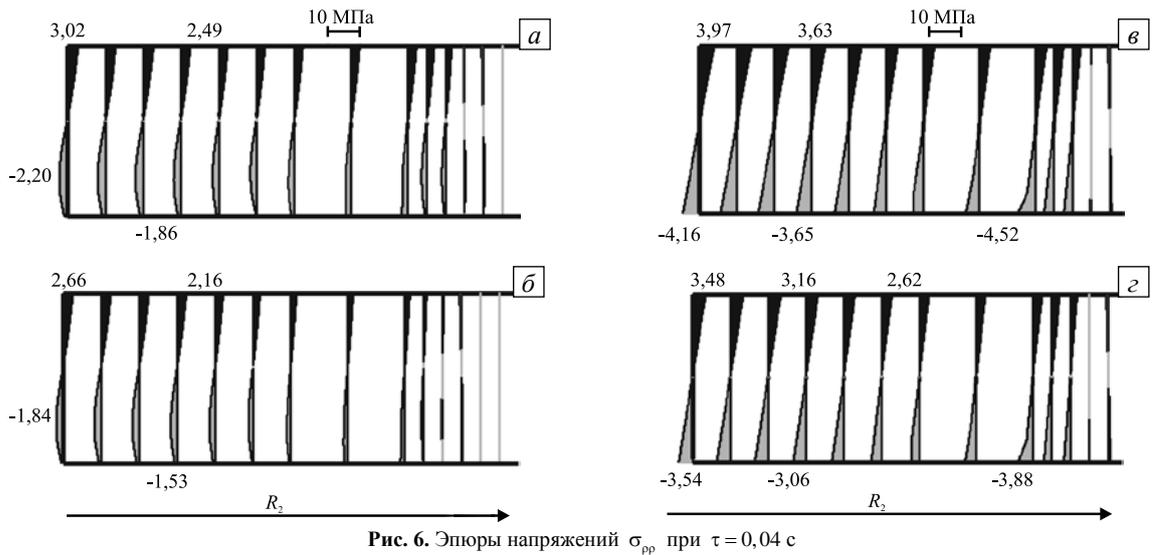


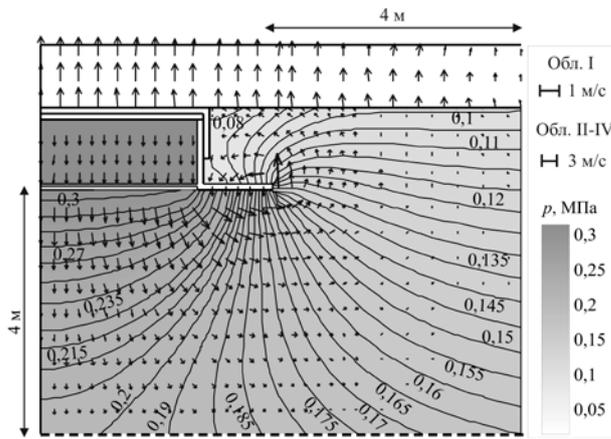
Рис. 5. Эпюры напряжений σ_{pp} в момент времени $\tau = 0,04 \text{ с}$ в пресноводном (а), морском (б) и однородном морском (в) ледяном покрове

На рисунке 5 приведены результаты решения начальной краевой задачи (14)–(27) в виде эпюр напряжений σ_{pp} в момент $\tau = 0,04 \text{ с}$ (то есть в конце процесса разрушения) при зависимостях модуля сдвига от вертикальной координаты (9), (10) и (11). Из рисунка видно, что во всех трех случаях наблюдается схожая картина: под действием верхнего цилиндра в зоне радиусом $R < R_1$ ледяной покров изгибается, в результате чего его нижние слои сжимаются, а верхние растягиваются. Вне области действия верхнего цилиндра напряжения во льду меняют знак и быстро убывают по абсолютной величине (практически падают до нуля). Напряженно-деформированные состояния пресноводного и однородного ледяного покровов (Рис. 5, а, в) отличаются незначительно: и в том и в другом случае напряжения в области $R < R_1$ распределены по толще льда линейно (с минимумом на нижней поверхности и максимумом на верхней), а различия есть только в числовых значениях (примерно 5%). Для морского ледяного покрова (Рис. 5, б) характерна иная картина. Во-первых, напряжения в толще льда распределены нелинейно (максимум на верхней поверхности, минимум на расстоянии $\approx 0,25H_1$ от нижней поверхности), что можно объяснить существенной неоднородностью свойств морского ледяного покрова (Рис. 3). И, во-вторых, между значениями напряжений в морском и однородном льду имеет место существенная разница, достигающая 50 %.

На рисунке 6 показаны эпюры напряжений σ_{pp} при $\tau = 0,04 \text{ с}$ для морского (Рис. 6, а, б) и пресноводного (Рис. 6, в, г) льда соответственно, при этом буквами (а) и (в) обозначены результаты,

Рис. 6. Эпюры напряжений σ_{pp} при $\tau = 0,04$ с

полученные для модели из работ [5–7], в которой упругие среды приняты несжимаемыми, а буквами (б) и (г) — для модели (14)–(16) с учетом сжимаемости упругих сред. Видно, что качественная картина напряжений как в морском, так и пресноводном льду при учете сжимаемости сохраняется. При этом числовые значения напряжений по абсолютной величине меньше, чем в несжимаемом ледяном покрове, примерно на 10–15%. Все вышесказанное справедливо не только для последнего момента времени $\tau = 0,04$ с, но и для всего процесса в целом. Разумеется, значения напряжений на разных временных шагах отличаются между собой.

Рис. 7. Векторное поле скоростей и изолинии давления в окрестности устройства в момент времени $\tau = 0,04$ с

Следует отметить, что учет сжимаемости и неоднородности упругих сред практически не сказывается на остальных компонентах системы. Так, характерная картина течения воды в окрестности устройства в ходе процесса не зависит от используемой модели ледяного покрова и приведена на рисунке 7 для момента времени $\tau = 0,04$ с. При рассмотрении конструкции сбоку можно увидеть область (в пространстве между ледяным покровом и нижним цилиндром), в которой в результате разнонаправленного движения цилиндров образуется область пониженного давления. В свою очередь под нижним цилиндром возникает область повышенного давления. Максимальная скорость движения воды имеет место рядом с боковой поверхностью нижнего цилиндра S_{10} . В той части расчетной области, которая

не изображена на рисунке 7, скорости движения на порядок меньше, а распределение давления близко к гидростатическому.

Во всех полученных результатах можно выделить ряд закономерностей. Во-первых, касательные напряжения, возникающие во льду и устройстве, на порядок меньше нормальных, из чего можно сделать вывод, что главные напряжения близки к нормальным. Во-вторых, напряжения σ_{pp} и $\sigma_{фр}$ отличаются незначительно. В-третьих, изменение температуры верхней поверхности ледяного покрова практически не влияет на уровень значений вычисляемых величин.

5. Заключение

Суммируя все вышесказанное можно сказать следующее:

- 1) Учет неоднородности имеет существенное значение только для морского льда; пресноводный ледяной покров можно принимать однородным по толщине.
- 2) Модель (14)–(16), учитывающая сжимаемость упругих сред, безусловно более полно описывает исследуемый процесс. Характерная картина напряженно-деформированного состояния упругих компонент ($t = I - III$) расчетной области при учете сжимаемости не меняется. Разницу в вычисленных значениях

(20–25% в элементах устройства, 10–15% в ледяном покрове) можно считать несущественной. Это объясняется следующими причинами. Во-первых, при анализе напряжений в устройстве основной интерес представляет распределение напряжений и их максимальное (минимальное) значение. Необходимо удостовериться, что напряжения в конструкции не превышают предела прочности на растяжение (сжатие) с некоторым коэффициентом запаса прочности. Существенно, что конкретные значения напряжений играют при этом второстепенную роль. Во-вторых, экспериментальные исследования механических характеристик естественного льда дают очень большой разброс результатов, который достигает десятков процентов, в сравнении с чем учет сжимаемости вносит относительно небольшой вклад (в 10–15%), и поэтому при моделировании процесса разрушения рассмотрение льда как несжимаемой среды можно считать достаточно адекватным приближением.

Это заключение можно отнести к более широкому классу задач определения напряженно-деформированного состояния ледяного покрова, в которых лед считается упругой средой, длительность нагружения не превышает нескольких секунд, а скорость деформации во льду соответствует скорости исследуемого процесса ($10^{-5} \div 10^{-2} \text{ с}^{-1}$).

Следует отметить, что ранее сжимаемость льда исследовалась в работе [17], в которой сделан вывод о допустимости подхода ко льду как к несжимаемой среде во многих случаях. Но это относится лишь к пресноводному льду при очень низких температурах. Вывод, полученный в настоящей работе, распространяется и на пресноводный, и на морской лед в широком диапазоне температур.

3) Учет сжимаемости упругих сред и неоднородности льда (модель (14)–(16)) не оказывает влияния на течение воды ($t = IV$).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-01-98500-р_восток_a).

Литература

1. *Carney C.S., Benson D.J., DuBois P., Lee R.* A phenomenological high strain rate model with failure for ice // *Int. J. Solids Struct.* – 2006. – V. 43, N. 25-26. – P. 7820-7839. DOI
2. *Гольдштейн Р.В., Осипенко Н.М.* О модели разрушения льда при большой площади контакта // *МТТ.* – 2011. – № 1. – С. 137-153.
3. *Squire V.A.* Of ocean waves and sea-ice revisited // *Cold Reg. Sci. Technol.* – 2007. – V. 49, N. 2 – P. 110-133. DOI
4. *Feltham D.L.* Sea ice rheology // *Annu. Rev. Fluid Mech.* – 2008. – V. 40 – P. 91-112. DOI
5. *Одинокое В.И., Прокудин А.Н.* Моделирование процесса разрушения ледяных затворов // *ПМТФ.* – 2010. – Т. 51, № 1. – С. 110-116.
6. *Odinokov V.I., Prokudin A.N.* Computational investigation of new ice-breaking method // *The Proceedings of the Twentieth (2010) International Offshore and Polar Engineering Conference.* Beijing, China, June 20-25, 2010. – V. 1. – P. 1148-1154.
7. *Одинокое В.И., Прокудин А.Н.* Численное моделирование процесса деформации элементов конструкции в многокомпонентных системах под действием динамической нагрузки // *Вычисл. мех. сплош. сред.* – 2010. – Т. 3, № 4. – С. 80-95. DOI
8. Пат. 2397911 РФ, Кл. В63В 35/08, E02В 15/02. Устройство для ликвидации заторообразования / Одинокое В.И., Прокудин А. Н. (РФ); заявитель и патентообладатель ИМиМ ДВО РАН (RU). – № 2008145808; заявл. 19.11.2008; опубл. 27.08.2010, Бюл. № 24 – 5 с.: ил.
9. Пат. 2398706 РФ, Кл. В63В 35/08, E02В 15/02. Устройство для ликвидации заторообразования / Одинокое В.И., Прокудин А. Н. (РФ); заявитель и патентообладатель ИМиМ ДВО РАН (RU). – № 2009108247; заявл. 06.03.2009; опубл. 10.09.2010, Бюл. № 25 – 5 с.: ил.
10. *Weeks W.F.* On sea ice. – University of Alaska Press, 2010. – 664 p.
11. *Frankenstein G.E., Garner R.* Equations for determining the brine volume of sea ice from -0.5 to -22.9 °C // *J. Glaciol.* – 1967. – V. 6, N. 48. – P. 943-944.
12. *Timco G.W., Weeks W.F.* A review of the engineering properties of sea ice // *Cold Reg. Sci. Technol.* – 2010. – V. 60, N. 2 – P. 107-129. DOI
13. *Sinha N.K.* Elasticity of natural types of polycrystalline ice // *Cold Reg. Sci. Technol.* – 1989. – V. 17, N. 2. – P. 127-135. DOI
14. *Равич М.Б.* Беспламенное поверхностное горение. – М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1949. – 354 с.
15. *Кроха В.А.* Упрочнение металлов при холодной пластической деформации. Справочник. – М.: Машиностроение, 1980. – 157 с.
16. *Кикоин И.К.* Таблицы физических величин. Справочник. – М.: Атомиздат, 1976. – 1008 с.
17. *Меллор М.* Механические свойства поликристаллического льда // *Физика и механика льда* / Под ред. П. Трюде. – М.: Мир, 1983. – С. 202-239.

Поступила в редакцию 06.07.12; опубликована в электронном виде 25.04.13

Сведения об авторах

Прокудин Александр Николаевич, ктн, нс, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН (ИМиМ ДВО РАН), 681005, Комсомольск-на-Амуре, ул. Металлургов, д. 1; E-mail: sunbeam_85@mail.ru

Одинокое Валерий Иванович, дтн, проф., гнс., ИМиМ ДВО РАН; E-mail: mail@imim.ru