

DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.1.12

УДК 533.6.013.42

## УСТОЙЧИВОСТЬ КОАКСИАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, СОДЕРЖАЩИХ ВРАЩАЮЩИЙСЯ ПОТОК ЖИДКОСТИ

С.А. Бочкарёв, В.П. Матвеевко

*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия*

Работа посвящена анализу динамического поведения коаксиальных цилиндрических оболочек вращения, взаимодействующих с вращающимися потоками сжимаемой жидкости. Поведение вращающейся жидкости описывается в рамках потенциальной теории. Упругие оболочки рассматриваются на основе модели классической теории оболочек. Для численной реализации используется полуаналитический вариант метода конечных элементов. В результате широкого круга численных экспериментов, проведенных для оболочек с различными комбинациями граничных условий и разной величиной кольцевого зазора между внутренней и наружной оболочками, обнаружен ряд новых качественных закономерностей.

*Ключевые слова:* коаксиальные оболочки, потенциальная жидкость, метод конечных элементов, устойчивость, флаттер

## STABILITY OF COAXIAL CYLINDRICAL SHELLS CONTAINING A ROTATING FLUID

S.A. Bochkarev and V.P. Matveenko

*Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia*

The dynamic behavior of coaxial cylindrical shells of revolution interacting with the rotating flows of a compressible fluid is studied. The flowing fluid properties are described within the framework of the potential theory. The classic shell theory is used to model elastic shells. In the numerical implementation, a semi-analytic finite element technique is applied. Numerical experiments carried out on shells with different boundary conditions and different values of the annular gap between the shells provide evidence for the existence of a subset of new qualitative regularities.

*Key words:* coaxial shells, potential rotating fluid, finite element method, stability, flutter

### 1. Введение

Исследование динамического поведения упругой цилиндрической оболочки вращения, взаимодействующей с кольцевым потоком закрученного сжимаемого газа, представлено только в [1]. Здесь на основе аналитических методов рассмотрена бесконечно длинная цилиндрическая оболочка, помещенная в кольцевой канал с жесткой наружной стенкой. Показано, что при слиянии бегущих волн, распространяющихся в прямом и обратном направлениях, может возникнуть потеря устойчивости в виде флаттера. Некоторые экспериментальные результаты, связанные с изучением влияния закрученного кольцевого потока на устойчивость цилиндрической оболочки, приведены в [2, 3].

В настоящей работе осуществляется численное решение задачи, которое предоставляет возможность детального анализа ряда факторов (граничных условий, величин кольцевого зазора между внутренней и наружной оболочками, упругости внешней оболочки, линейных размеров системы и других), оказывающих влияние на границу устойчивости коаксиальных оболочек, взаимодействующих с вращающейся жидкостью.

### 2. Постановка задачи и основные соотношения

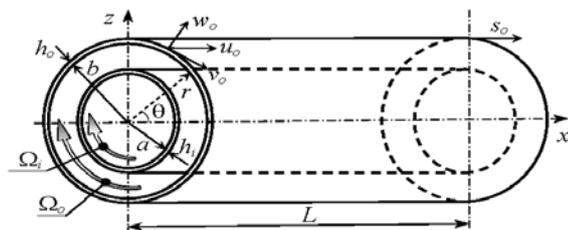


Рис. 1. Расчётная схема

Рассматриваются две упругие цилиндрические оболочки длиной  $L$  (Рис. 1), радиусами  $a$  (внутренняя оболочка) и  $b$  (внешняя оболочка), которые взаимодействуют с двумя потоками идеальной сжимаемой вращающейся жидкости: один находится во внутренней оболочке, а другой — в кольцевом канале между оболочками. Угловая скорость вращения внутреннего потока жидкости, его удельная плотность и скорость распространения звука в нем обозначаются как  $\Omega_i$ ,  $\rho_f^i$  и  $c_i$ . Соответствующие величины для кольцевого потока отличаются заменой индекса  $i$  на  $o$ .

Движение идеальной сжимаемой вращающейся жидкости в случае потенциального течения описывается волновым уравнением, которое в цилиндрических координатах  $(r, \theta, x)$  для внутреннего потока, занимающего объем  $V_j^i$ , записывается в виде [4]

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} - \frac{1}{c_i^2} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial t^2} = \frac{2\Omega_i}{c_i^2} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial \theta \partial t} + \frac{\Omega_i^2}{c_i^2} \left( \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right), \quad (1)$$

где  $\phi_i$  — потенциал возмущения скорости. Давление внутреннего потока жидкости  $p_i$  на поверхности раздела внутренней оболочки и жидкости  $S_\sigma^i = S_f^i \cap S_s^i$  вычисляется по линеаризованной формуле Бернулли

$$p_i = -\rho_f^i \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \Omega_i \frac{\partial \phi_i}{\partial \theta} \right). \quad (2)$$

Здесь  $S_f^i, S_s^i$  — поверхности, ограничивающие объемы внутреннего потока жидкости и внутренней оболочки соответственно. Уравнения для кольцевого потока получаются из уравнений (1), (2) заменой индексов  $i$  на  $o$ . На поверхности раздела внутренняя оболочка – внутренний поток жидкости  $S_\sigma^o$  задается условие непроницаемости

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial r} = \frac{\partial w_i}{\partial t} + \Omega_i \frac{\partial w_i}{\partial \theta}. \quad (3)$$

Для кольцевого потока на смоченных поверхностях  $S_f^o \cap S_s^i$  и  $S_f^o \cap S_s^o$  задаются условия

$$\frac{\partial \phi_o}{\partial r} = \frac{\partial w_i}{\partial t} + \Omega_o \frac{\partial w_i}{\partial \theta}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \phi_o}{\partial r} = \frac{\partial w_o}{\partial t} + \Omega_o \frac{\partial w_o}{\partial \theta}. \quad (5)$$

Здесь  $w_i$  и  $w_o$  — нормальные составляющие вектора перемещений внутренней и внешней оболочек. Потенциалы возмущения скорости на входе в оболочки и выходе из них подчиняется граничным условиям

$$x = 0: \phi_i = \phi_o = 0, \quad x = L: \frac{\partial \phi_i}{\partial x} = \frac{\partial \phi_o}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

Осуществляя дискретизацию уравнения для потенциала возмущения скорости (1) с граничными условиями (3), (6) по пространственным переменным методом конечных элементов с использованием процедуры Бубнова–Галёркина [5], получим систему уравнений

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{m_j^i} \left[ \int_{V_j^i} \left( \frac{\partial F_l^i}{\partial r} \frac{\partial F_k^i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial F_l^i}{\partial \theta} \frac{\partial F_k^i}{\partial \theta} + \frac{\partial F_l^i}{\partial x} \frac{\partial F_k^i}{\partial x} + \frac{\Omega_i^2}{c_i^2} \left[ \frac{\partial^2 F_l^i}{\partial \theta^2} F_k^i - r \frac{\partial F_l^i}{\partial r} F_k^i \right] \right) dV \right] \phi_{al}^i + \\ & + \sum_{l=1}^{m_j^i} \left[ \int_{V_j^i} \frac{2\Omega_i}{c_i^2} \frac{\partial F_l^i}{\partial \theta} F_k^i dV \right] \dot{\phi}_{al}^i + \sum_{l=1}^{m_j^i} \left[ \int_{V_j^i} \frac{F_l^i F_k^i}{c_i^2} dV \right] \ddot{\phi}_{al}^i - \\ & - \sum_{p=1}^{m_s^i} \left[ \int_{S_\sigma^i} \bar{N}_p^i F_k^i dS \right] \dot{w}_{ap}^i - \sum_{p=1}^{m_s^i} \left[ \int_{S_\sigma^i} \Omega_i \frac{\partial \bar{N}_p^i}{\partial \theta} F_k^i dS \right] w_{ap}^i = 0 \quad (k = 1, m_j^i). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $m_s^i$  и  $m_j^i$  — число конечных элементов, на которое разбиваются, соответственно, области внутренней оболочки  $V_s^i$  и заключённой в ней жидкости  $V_j^i$ ;  $\phi_a^i$  и  $w_a^i$  — узловые значения потенциала возмущения скорости жидкости и перемещений оболочки;  $F_i$  и  $\bar{N}_i$  — функции формы для потенциала возмущения скорости внутреннего потока и нормальной составляющей вектора перемещения внутренней

оболочки. Аналогичное уравнение (с заменой индекса  $i$  на  $o$ ) записывается для кольцевого течения, в котором также будут присутствовать дополнительные слагаемые в результате учета условия (4).

Для оболочек приняты гипотезы Кирхгофа–Лява, согласно которым компоненты вектора деформации срединной поверхности, изменения кривизн и кручения в координатной системе  $(s, \theta, z)$  записываются следующим образом [6]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^i &= \frac{\partial u_i}{\partial s}; & \varepsilon_2^i &= \frac{1}{a} \left( \frac{\partial v_i}{\partial \theta} + w_i \right); & \varepsilon_{12}^i &= \frac{1}{a} \frac{\partial u_i}{\partial \theta} + \frac{\partial v_i}{\partial s}; \\ \kappa_1^i &= -\frac{\partial^2 w_i}{\partial s^2}; & \kappa_2^i &= \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w_i}{\partial \theta^2} \right); & \kappa_{12}^i &= \frac{1}{a} \left( \frac{\partial v_i}{\partial s} - \frac{\partial^2 w_i}{\partial s \partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $u_i, v_i$  — меридиональная и окружная составляющие вектора перемещений внутренней оболочки.

Физические соотношения, устанавливающие связь между вектором обобщенных усилий и моментов  $\mathbf{T}_i$  и вектором обобщенных деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}_i = \{\varepsilon_1^i, \varepsilon_2^i, \varepsilon_{12}^i, \kappa_1^i, \kappa_2^i, 2\kappa_{12}^i\}^T$ , представляются в матричном виде

$$\mathbf{T}_i = \boldsymbol{\varepsilon} \{T_{11}^i, T_{22}^i, T_{12}^i, M_{11}^i, M_{22}^i, M_{12}^i\}^T = \mathbf{D}_i \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad (9)$$

где ненулевые элементы матрицы физико-механических свойств  $\mathbf{D}_i$  для изотропного материала оболочки определяются известным образом через модуль упругости  $E_i$  и коэффициент Пуассона  $\nu_i$ .

В математической постановке рассматриваемой задачи для оболочек используется принцип возможных перемещений, который для внутренней оболочки в матричной форме может быть записан как

$$\int_{s_i^l} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_i^T \mathbf{T}_i dS + \int_{s_i^l} \delta \mathbf{d}_i^T \rho_0^i \ddot{\mathbf{d}}_i dS - \int_{s_i^l} \delta \mathbf{d}_i^T \mathbf{P}_i dS = 0. \quad (10)$$

Здесь  $\mathbf{d}_i$  и  $\mathbf{P}_i = \{0 \ 0 \ p_i|_{r=a} - p_o|_{r=a}\}^T$  — векторы обобщенных перемещений и поверхностных нагрузок,  $\rho_0^i = \sum_{h_i} \rho_s^i dz$ ,  $\rho_s^i$  — удельная плотность материала внутренней оболочки,  $h_i$  — толщина внутренней оболочки. Для внешней оболочки записывается аналогичное уравнение (с заменой  $i$  на  $o$ ), в котором  $\mathbf{P}_o = \{0 \ 0 \ p_o|_{r=b}\}^T$ .

### 3. Численная реализация

Численная реализация осуществляется с использованием полуаналитического варианта метода конечных элементов [7], основанного на представлении решения в виде ряда Фурье по окружной координате  $\theta$ :

$$\begin{aligned} (u, w, \phi_a) &= \sum_{j=0}^{\infty} (\hat{u}_j, \hat{w}_j, \hat{\phi}_j) \cos j\theta + \sum_{j=0}^{\infty} (\check{u}_j, \check{w}_j, \check{\phi}_j) \sin j\theta; \\ v &= \sum_{j=0}^{\infty} \hat{v}_j \sin j\theta - \sum_{j=0}^{\infty} \check{v}_j \cos j\theta, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $j$  — номер гармоники.

Выражение входящих в (11) переменных при симметричных и антисимметричных слагаемых через узловые неизвестные дает для конечных элементов оболочки и жидкости соотношения:

$$\mathbf{U} = \{u, v, w\}^T = \mathbf{N} \mathbf{d}^e = [\tilde{\mathbf{N}} \tilde{\mathbf{N}}] \{ \tilde{\mathbf{d}}^e \tilde{\mathbf{d}}^e \}^T; \quad \boldsymbol{\phi}_a = \mathbf{F} \mathbf{f}^e = [\tilde{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{F}}] \{ \tilde{\mathbf{f}}^e \tilde{\mathbf{f}}^e \}^T. \quad (12)$$

Здесь  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{F}$  — матрицы функций формы,  $\mathbf{d}^e$  и  $\mathbf{f}^e$  — векторы узловых неизвестных. В расчетной области оболочка разбивается на двухузловые конечные элементы с аппроксимацией меридиональной и окружной компонент вектора перемещений линейным полиномом, а нормальной компоненты — кубическим

полиномом [7]. Зона жидкости разбивается на треугольные конечные элементы с линейной аппроксимацией потенциала возмущения скорости.

Обобщенные деформации с учетом (11), например, для внутренней оболочки, представляются в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbf{B}_i \mathbf{d}_i^e, \quad (13)$$

где  $\mathbf{B}_i$  — матрица связи деформаций с узловыми неизвестными.

После применения стандартных процедур МКЭ к (7) и (10), с учетом (12), (13), получаются системы уравнений, которые в объединенном виде записываются как

$$(\mathbf{K} + \mathbf{A})\{\mathbf{d}_i, \mathbf{f}_i, \mathbf{d}_o, \mathbf{f}_o\}^T + \mathbf{M}\{\ddot{\mathbf{d}}_i, \ddot{\mathbf{f}}_i, \ddot{\mathbf{d}}_o, \ddot{\mathbf{f}}_o\}^T + \mathbf{C}\{\dot{\mathbf{d}}_i, \dot{\mathbf{f}}_i, \dot{\mathbf{d}}_o, \dot{\mathbf{f}}_o\}^T = 0, \quad (14)$$

где

$$\mathbf{K} = \text{diag}\{\mathbf{K}_s^i, \mathbf{K}_f^i + \mathbf{K}_f^{\omega i}, \mathbf{K}_s^o, \mathbf{K}_f^o + \mathbf{K}_f^{\omega o}\}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C}_{sf}^i & 0 & \mathbf{C}_{sf}^o \\ \mathbf{C}_{fs}^i & \mathbf{C}_f^{\omega i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{sf}^o \\ \mathbf{C}_{fs}^o & 0 & \mathbf{C}_{fs}^o & \mathbf{C}_f^{\omega o} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \text{diag}\{\mathbf{M}_s^i, \mathbf{M}_f^i, \mathbf{M}_s^o, \mathbf{M}_f^o\}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A}_{sf}^{\omega i} & 0 & \mathbf{A}_{sf}^{\omega o} \\ \mathbf{A}_{fs}^{\omega i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{A}_{sf}^{\omega o} \\ \mathbf{A}_{fs}^{\omega o} & 0 & \mathbf{A}_{fs}^{\omega o} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_s^i = \sum_{m_s^i, s_s^i} \int \mathbf{B}_i^T \mathbf{D}_i \mathbf{B}_i dS, \quad \mathbf{M}_s^i = \sum_{m_s^i, s_s^i} \int \mathbf{N}_i^T \rho_0 \mathbf{N}_i dS, \quad \mathbf{M}_f^i = \sum_{m_f^i, v_f^i} \int \frac{1}{c_i^2} \mathbf{F}_i^T \mathbf{F}_i dV,$$

$$\mathbf{K}_f^i = \sum_{m_f^i, v_f^i} \int \left( \frac{\partial \mathbf{F}_i^T}{\partial r} \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \mathbf{F}_i^T}{\partial \theta} \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathbf{F}_i^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x} \right) dV, \quad \mathbf{C}_{fs}^i = -\sum_{m_s^i, s_s^i} \int \mathbf{F}_i^T \bar{\mathbf{N}}_i dS,$$

$$\mathbf{C}_{sf}^i = \sum_{m_s^i, s_s^i} \int \rho_f^i \bar{\mathbf{N}}_i^T \mathbf{F}_i dS, \quad \mathbf{A}_{fs}^{\omega i} = -\sum_{m_f^i, v_f^i} \int \Omega_i \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}_i}{\partial \theta} \mathbf{F}_i dS, \quad \mathbf{A}_{sf}^{\omega i} = \sum_{m_s^i, s_s^i} \int \rho_f^i \Omega_i \bar{\mathbf{N}}_i^T \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \theta} dS,$$

$$\mathbf{K}_f^{\omega i} = \sum_{m_f^i, v_f^i} \int \frac{\Omega_i^2}{c_i^2} \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{F}_i^T}{\partial \theta^2} \mathbf{F}_i - r \frac{\partial \mathbf{F}_i^T}{\partial r} \mathbf{F}_i \right] dV, \quad \mathbf{C}_f^{\omega i} = \sum_{m_f^i, v_f^i} \int \frac{2\Omega_i}{c_i^2} \frac{\partial \mathbf{F}_i^T}{\partial \theta} \mathbf{F}_i dV.$$

Здесь матрицы  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{A}$  традиционно называются матрицами жесткости, масс, демпфирования и гидродинамической жесткости. Недостающие матрицы для кольцевого потока получаются заменой индекса  $i$  на  $o$ .

Представление возмущенного движения оболочки и жидкости в виде  $(\mathbf{d}_i, \mathbf{f}_i, \mathbf{d}_o, \mathbf{f}_o) = (\mathbf{q}_i, \mathbf{g}_i, \mathbf{q}_o, \mathbf{g}_o) \exp(i^* \lambda t)$ , где  $\mathbf{q}_i, \mathbf{g}_i, \mathbf{q}_o, \mathbf{g}_o$  — некоторые функции координат,  $i^* = \sqrt{-1}$ , а  $\lambda = \lambda_1 + i^* \lambda_2$  — характеристический показатель, окончательно дает:

$$(\mathbf{K} + \mathbf{A} - \lambda^2 \mathbf{M} + i^* \lambda \mathbf{C})\{\mathbf{q}_i, \mathbf{g}_i, \mathbf{q}_o, \mathbf{g}_o\}^T = 0. \quad (15)$$

Таким образом, решение задачи сводится к определению и анализу собственных значений  $\lambda$  системы (15). Для вычисления комплексных собственных значений используется алгоритм на основе метода Мюллера [8].

#### 4. Численные примеры

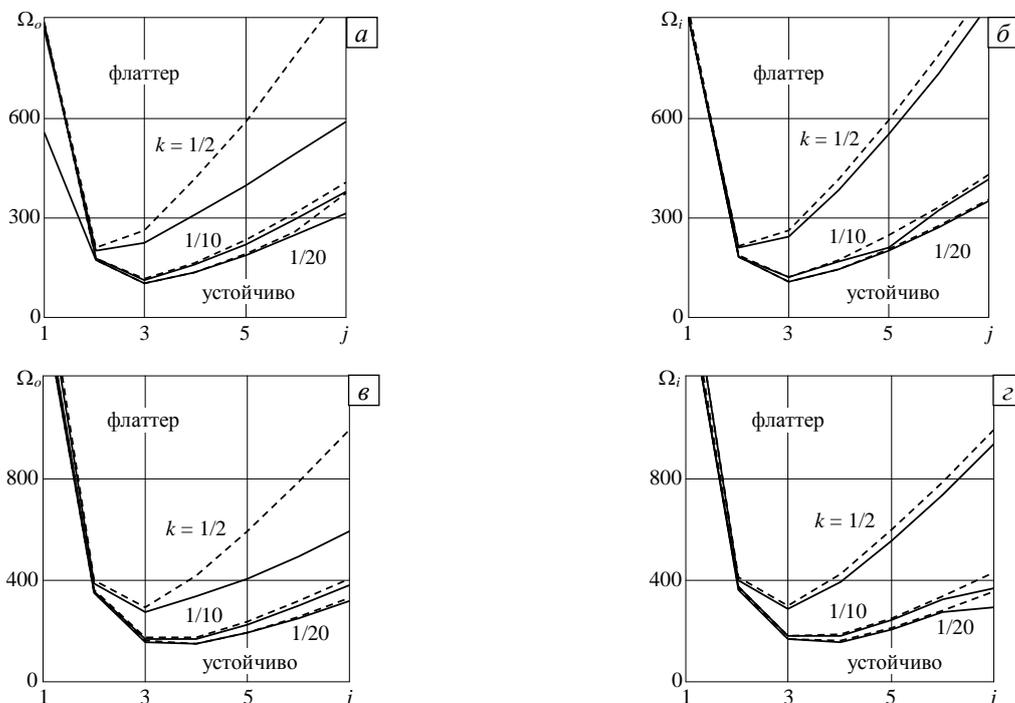
Приведенные ниже расчеты выполнены при различной величине кольцевого зазора между внешней и наружной оболочками, который определяется как  $k = (b - a)/a$ . Например, зазор  $k = 1/2$  соответствует половине радиуса внутренней оболочки или  $a/b = 2/3$ ; зазор  $k = 1/10$  —  $a/b = 10/11$ , зазор  $k = 1/20$  —  $a/b = 20/21$ . Все расчеты, если не оговорено другое, выполнены для системы коаксиальных оболочек при разных комбинациях граничных условий на торцах: свободное опирание ( $v = w = 0$  — SS);

жесткое закрепление ( $u = v = w = \partial w / \partial s = 0$  — СС) ( $x = \overline{0, L}$ ); консольное закрепление — СФ. Механические характеристики материала оболочек были следующими:  $E_{io} = E = 2,0 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\nu_{io} = \nu = 0,3$ ,  $\rho_s^i = \rho_s^o = 7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $L = 1,0$  м,  $b = 0,1$  м,  $h_i = h_o = 5,0 \cdot 10^{-4}$  м. Оболочки взаимодействуют со сжимаемой жидкостью, имеющей характеристики  $\rho_f^i = \rho_f^o = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_{io} = c = 1500$  м/с.

Все расчеты осуществлены при 40 элементах в расчетной области каждой из оболочек и 1600 — в областях, занимаемых жидкостями внутреннего и кольцевого потоков. Количество элементов кольцевого потока определялось величиной зазора между оболочками.

В связи с отсутствием известных решений, выполненных для коаксиальных оболочек конечной длины, тестирование разработанного алгоритма проведено на основе экспериментальных данных [2], полученных при исследовании алюминиевой цилиндрической оболочки ( $E_i = 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\nu_i = 0,33$ ,  $\rho_s^i = 2750$  кг/м<sup>3</sup>,  $a = 0,1$  м,  $h_i = 5,0 \cdot 10^{-4}$  м,  $L = 2,42$  м), расположенной внутри другой жесткой цилиндрической оболочки ( $b = 0,305$  м). В результате вращения наружной оболочки поверхность внутренней оболочки взаимодействует с кольцевым закрученным потоком несжимаемой жидкости ( $\rho_f^o = 214$  кг/м<sup>3</sup>). В эксперименте установлено, что при указанных параметрах потеря устойчивости внутренней оболочкой происходит в виде флаттера по двум формам колебаний при скорости вращения наружной оболочки  $1800$  мин<sup>-1</sup>, а флаттер имеет частоту  $65$  Гц. При этом авторы эксперимента отмечают, что в зависимости от условий формирования кольцевого потока газа частота флаттера изменяется в диапазоне от  $55$  до  $140$  Гц. В известном решении [9] при анализе устойчивости бесконечно-длинной оболочки получена частота флаттера  $9,8$  Гц. В данной работе установлено, что при  $j = 2$  критическая скорость углового вращения кольцевого потока  $\Omega_o$  равна  $1742,3$  мин<sup>-1</sup>, а частота флаттера составляет  $50,1$  Гц. Расчеты проводились для граничных условий свободного опирания, так как в [10] показано, что с увеличением отношения длины оболочки к ее радиусу вид граничных условий фактически не оказывает никакого влияния на критические скорости флаттера. Таким образом, результаты расчетов настоящей работы хорошо согласуются с экспериментальными данными, несмотря на то, что характер течения жидкости в таком эксперименте может быть только приблизительно описан в рамках потенциальной теории.

Рисунок 2 содержит графики изменения критических угловых скоростей вращения в кольцевом ( $\Omega_o$ ) и внутреннем ( $\Omega_i$ ) потоках в зависимости от номера гармоники  $j$  в разложении в ряд Фурье, полученных для коаксиальных оболочек с жесткой и упругой внешней стенкой. Расчеты проведены для различной



**Рис. 2.** Зависимости критических угловых скоростей вращения жидкости (рад/с) в кольцевом ( $\Omega_o \neq 0, \Omega_i = 0$ ) (а) и внутреннем ( $\Omega_i \neq 0, \Omega_o = 0$ ) (б) потоках от номера гармоники  $j$  при различной величине зазора  $k$  в коаксиальных оболочках; оболочки, свободно опертые (а, б) и жестко защемленные (в, г) с жесткой (пунктирные линии) и упругой (сплошные линии) внешней оболочкой

величины кольцевого зазора  $k$  и разных комбинаций граничных условий на торцах оболочек: свободное опирание (Рис. 2, а, б); жесткое закрепление (Рис. 2, в, г). Из представленных результатов следует, что в случае вращения жидкости изменение величины кольцевого зазора оказывает дестабилизирующее влияние: с ее уменьшением критические значения скоростей уменьшаются. Учет упругости внешней оболочки также оказывает незначительное дестабилизирующее влияние на угловые скорости вращения. Исключение составляет вращение в кольцевом зазоре при его наибольшей величине.

На рисунке 3 приведены соответствующие значения критических скоростей углового вращения для внутреннего и кольцевого потоков жидкости и разных вариантов граничных условий при фиксированной величине зазора ( $k = 1/10$ ). Здесь различие в критических скоростях вращения жидкости в коаксиальных оболочках, как и в случае одиночных оболочек [11], наиболее сильно проявляется на низших гармониках и практически исчезает на более высоких. Представленные данные демонстрирует незначительное отличие в критических угловых скоростях вращения внутреннего и кольцевого потоков для высоких гармоник и фактическую независимость от величины кольцевого зазора, в то время как критические скорости осевого течения жидкости с уменьшением величины кольцевого зазора катастрофически снижаются [12].

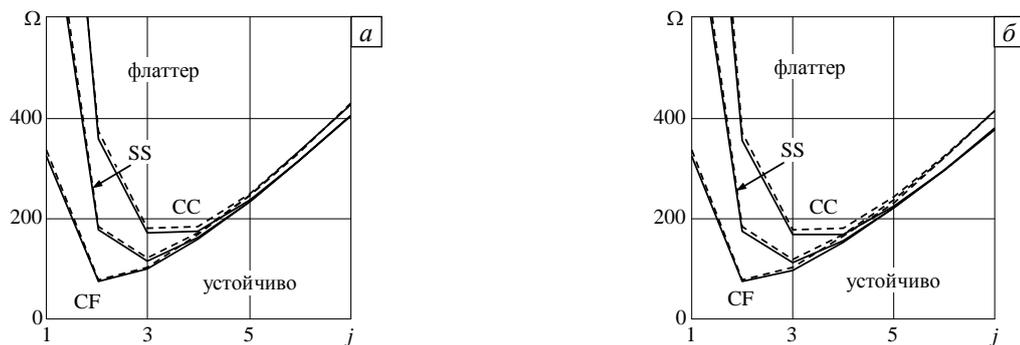


Рис. 3. Зависимости критических угловых скоростей вращения жидкости  $\Omega$  (рад/с) в кольцевом (сплошные линии) и внутреннем (пунктирные линии) потоках от номера гармоники  $j$  для коаксиальных оболочек с различными граничными условиями с жесткой (а) и упругой (б) внешней оболочкой;  $k = 1/10$

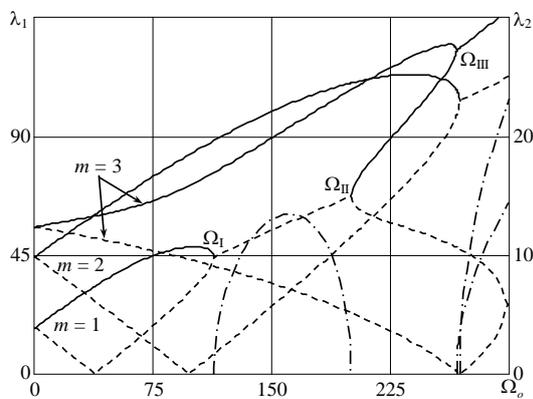


Рис. 4. Зависимости действительных  $\lambda_1$  и мнимых  $\lambda_2$  частей собственных значений (Гц) от угловой скорости вращения жидкости  $\Omega_0$  (рад/с) в кольцевом потоке для коаксиальных оболочек, свободно опертых с торцов:  $j = 3$ ,  $k = 1/10$

При анализе коаксиальных оболочек, взаимодействующих с вращающимися потоками жидкости, в случае упругости обеих оболочек, обнаружена качественная особенность. Суть ее заключается в том, что при определенных значениях угловой скорости вращения во внутреннем или кольцевом потоках системы возможны вторичные области устойчивости. Такие области устойчивости, возникающие при возрастании угловой скорости вращения жидкости, отсутствуют как в одиночных оболочках при любой комбинации граничных условий, так и в коаксиальных оболочках в случае жесткой внешней оболочки. Более подробно этот эффект демонстрирует рисунок 4. Здесь показаны зависимости действительных ( $\lambda_1$  — сплошные и пунктирные линии) и мнимых ( $\lambda_2$  — штрихпунктирные линии) частей трех первых собственных значений от угловой скорости вращения жидкости  $\Omega_0$  в кольцевом потоке для обеих упругих коаксиальных оболочек, свободно опертых на торцах при  $j = 3$  и  $k = 1/10$ .

Из рисунка 4 видно, что при скорости углового вращения  $\Omega_I$  наблюдается потеря устойчивости в виде флаттера по двум формам колебаний, являющегося результатом слияния прямой (сплошные линии) и обратной (пунктирные линии) волн первой моды колебаний (число полуволн в меридиональном направлении  $m = 1$ ). Период неустойчивости длится до тех пор, пока скорость вращения не достигнет значения  $\Omega_{II}$ , после чего имеет место режим вторичной стабилизации. При дальнейшем увеличении скорости до значения  $\Omega_{III}$  происходит слияние прямых волн первой и третьей мод колебаний, и потеря устойчивости становится необратимой, так как дальнейшее увеличение скорости влечет проявление неустойчивости в остальных модах колебаний. Такой режим динамического поведения — с чередованием

областей устойчивости и неустойчивости при возрастании скорости углового вращения — характерен для быстровращающихся упругих тел [13].

Необходимо отметить, что при некоторой комбинации граничных условий, а также величине кольцевого зазора и виде потока жидкости вторичные области устойчивости являются крайне узкими или не обнаруживаются. Этот факт подтверждают данные, приведенные в таблице 1. Здесь показаны скорости углового вращения жидкости во внутреннем ( $\Omega_i$ ) и кольцевом ( $\Omega_o$ ) потоках, которые соответствуют режимам устойчивости или неустойчивости и получены при разной величине кольцевого зазора  $k$  и различных вариантах граничных условий ( $j = 3$ ). В таблице 1 введены обозначения: I — граница первичной потери устойчивости; II — граница, на которой начинается повторная стабилизация; III — граница необратимой потери устойчивости. Закономерность в появлении или отсутствии повторных зон устойчивости не установлена. Однако для любой комбинации граничных условий протяженность вторичной зоны устойчивости возрастает с уменьшением величины кольцевого зазора.

Таблица 1. Угловые скорости вращения жидкости (рад/с) во внутреннем ( $\Omega_i$ ) и кольцевом ( $\Omega_o$ ) потоках на границах устойчивости при разной величине кольцевого зазора  $k$  и различных вариантах граничных условий для третьей гармоники ( $j = 3$ )

Граничные условия на торцах	Вид границы устойчивости	Внутренний поток $\Omega_i$			Кольцевой поток $\Omega_o$		
		$k = 1/2$	1/10	1/20	1/2	1/10	1/20
Свободное опирание (SS)	I	243,14	119,45	107,02	224,02	113,06	101,08
	II	288,96	223,26	207,65	255,97	199,79	183,11
	III	290,05	240,04	255,44	275,82	266,47	256,89
Жесткая заделка (CC)	I	284,40	177,11	166,12	270,04	167,81	156,92
	II	–	351,46	332,66	352,22	317,73	294,31
	III	–	371,44	384,83	353,72	379,04	363,33
Консольное закрепление слева (CF)	I	231,50	101,26	87,398	203,76	95,739	82,540
	II	265,47	–	164,41	–	159,28	144,52
	III	275,86	–	167,81	–	169,30	158,46

В таблице 2 приведены критические угловые скорости вращения жидкости во внутреннем и кольцевом потоках для разных номеров гармоник  $j$ , полученные для консольно закрепленных коаксиальных оболочек при различной величине кольцевого зазора  $k$  и жесткости внешней оболочки.

Таблица 2. Критические скорости углового вращения жидкости  $\Omega$  (рад/с) в консольно закрепленных коаксиальных оболочках для разных номеров гармоник  $j$  при различной величине кольцевого зазора  $k$

№ п/п	$j$	Жесткая внешняя и упругая внутренняя оболочки			Обе оболочки упругие		
		Зазор $k$					
		1/2	1/10	1/20	1/2	1/10	1/20
1		Внутренний поток ( $\Omega_i \neq 0, \Omega_o = 0$ )					
2	1	329,55	336,09	335,07	324,32	335,12	334,75
3	2	130,12	78,281	73,869	123,89	77,583	73,633
4	3	254,43	103,19	88,003	231,50	101,26	87,398
5	4	414,73	167,63	140,51	379,48	163,46	139,07
6	5	597,03	244,69	203,79	548,32	231,53	201,08
7	6	784,84	331,48	275,32	733,90	321,25	270,93
8	7	989,29	428,67	354,36	933,99	413,52	347,94
9		Кольцевой поток ( $\Omega_o \neq 0, \Omega_i = 0$ )					
10	1	318,77	323,66	322,55	312,03	322,49	322,17
11	2	127,36	75,131	70,689	118,14	74,252	70,399
12	3	251,06	98,412	83,345	203,76	95,739	82,540
13	4	411,62	159,17	131,79	300,78	152,81	129,75
14	5	589,93	231,89	189,60	394,84	219,98	185,46
15	6	782,50	314,15	254,52	491,23	294,84	247,24
16	7	987,73	405,07	326,02	589,89	379,19	316,08
17		Внутренний и кольцевой поток ( $\Omega_i = \Omega_o \neq 0$ )					
18	1	829,91	1088,3	1131,9	829,67	1088,2	1131,9
19	2	275,29	220,83	220,83	229,39	220,50	220,67
20	3	457,80	245,71	224,39	215,11	207,75	206,08
21	4	664,15	346,67	313,07	301,14	288,17	284,47
22	5	870,14	451,42	406,07	394,85	377,02	368,70
23	6	1077,2	557,03	499,54	490,41	464,74	453,65
24	7	1286,6	663,85	593,73	587,65	555,93	539,43

Здесь также представлен пример расчета, в котором внутренний и кольцевой потоки вращаются с одинаковой угловой скоростью (см. 18-ю строку таблицы). Данные свидетельствуют, что одновременное угловое вращение жидкости с одинаковыми скоростями во внутреннем и кольцевом потоках оказывает стабилизирующее воздействие как при жесткой, так и упругой внешней оболочке и не зависит от вида граничных условий.

Внутренний и кольцевой потоки, вращающиеся с разными угловыми скоростями, также могут оказывать стабилизирующее действие. На рисунке 4 представлены диаграммы устойчивости (области устойчивости заштрихованы) для системы коаксиальных свободно опертых (Рис. 5, а) и консольно закрепленных (Рис. 5, б) оболочек при одновременном внутреннем ( $\Omega_i$ ) и кольцевом ( $\Omega_o$ ) угловом вращении ( $k = 1/10$ ,  $j = 3$ ). Из диаграмм следует, что, например, для устойчивой системы с угловым вращением в кольцевом потоке учет вращения во внутреннем потоке еще больше стабилизирует систему. При этом, в отличие от осевого течения жидкости [14], для любой комбинации граничных условий и во всем рассмотренном диапазоне угловых скоростей смена вида потери устойчивости не имеет места.

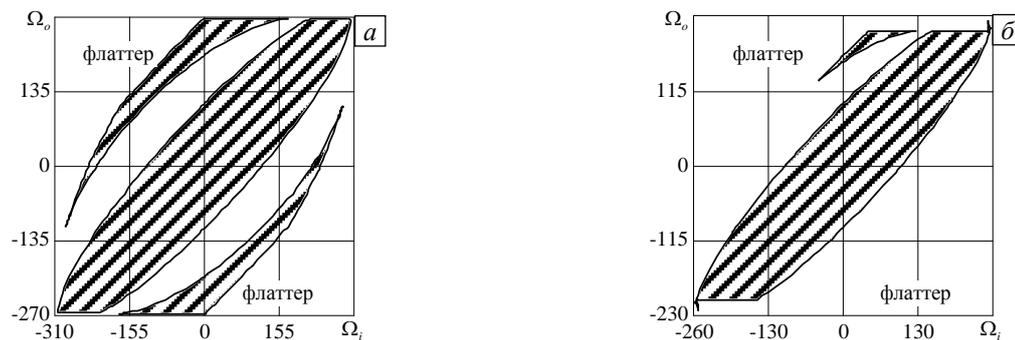


Рис. 5. Диаграммы устойчивости свободно опертых (а) и консольно закрепленных (б) коаксиальных оболочек при одновременном угловом вращении жидкости (рад/с) во внутреннем ( $\Omega_i$ ) и кольцевом ( $\Omega_o$ ) потоках;  $j = 3$ ,  $k = 1/10$

Численные эксперименты позволили установить, что изменение направления вращения жидкости внутри одиночной оболочки или в обоих потоках коаксиальных оболочек не оказывает влияния на величину критических скоростей потери устойчивости. Разнонаправленное вращение жидкости во внутренней оболочке и кольцевом канале приводит к снижению границы устойчивости (Рис. 5). Следует отметить, что система остается устойчивой до тех пор, пока угловая скорость вращения в обратном направлении в одном из потоков не достигнет значения максимальной угловой скорости вращения другого потока. Эта закономерность для скоростей характерна и во вторичных областях устойчивости, если эти области имеют место одновременно в обоих потоках (Рис. 5, а). В противном случае вторичная область устойчивости в диапазоне отрицательных скоростей другого потока определяется величиной кольцевого зазора и комбинацией граничных условий (Рис. 5, б).

## 5. Заключение

Для исследования устойчивости коаксиальных цилиндрических оболочек, взаимодействующих с вращающимися потоками жидкости, рассмотрена математическая постановка задачи и алгоритм ее численной реализации. В рамках разработанного алгоритма выполнен анализ устойчивости оболочек с различными граничными условиями при разных значениях параметров жесткости наружной оболочки и величины кольцевого зазора между внутренней и наружной оболочками. Установлено, что динамическое поведение коаксиальных оболочек, взаимодействующих с вращающимися потоками жидкости, имеет ряд отличительных особенностей по сравнению с поведением одиночных оболочек при учете вращения жидкости в них и коаксиальных оболочек, содержащих поток, имеющий осевую компоненту скорости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы УрО РАН 12-С-1-1015.

## Литература

1. Srinivasan A.V. Flutter analysis of rotating cylindrical shells immersed in a circular helical flowfield of air // AIAA J. – 1971. – V. 9, N. 3. – P. 394-400. DOI
2. Dowell E.H., Srinivasan A.V., McLean J.D., Ambrose J. Aeroelastic stability of cylindrical shells subjected to a rotating flow // AIAA J. – 1974. – V. 12, N. 12. – P. 1644-1651. DOI
3. McLean J.D., Dowell E.H. Swirling flows between coaxial cylinders with injection by radial jets // AIAA J. – 1975. – V. 13, N. 11. – P. 1435-1440. DOI

4. *Ильгамов М.А.* Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. – М.: Наука, 1969. – 184 с.
5. *Бочкарёв С.А., Матвеев В.П.* Численное исследование влияния граничных условий на динамику поведения цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью // Изв. РАН. МТТ. – 2008. – № 3. – С. 189-199.
6. *Бидерман В.Л.* Механика тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1977. – 488 с.
7. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 543 с.
8. *Матвеев В.П.* Об одном алгоритме решения задачи о собственных колебаниях упругих тел методом конечных элементов // Краевые задачи теории упругости и вязкоупругости. – Свердловск, 1980. – С. 20-24.
9. *David T.S., Srinivasan A.V.* Flutter of coaxial cylindrical shells in an incompressible axisymmetric flow // AIAA J. – 1974. – V. 12, N. 12. – P. 1631-1635. DOI
10. *Бочкарёв С.А.* Устойчивость цилиндрической оболочки с вращающейся в ней жидкостью // Вестник СамГУ — Естественнонаучная серия. – 2010. – № 6 (80). – С. 106-115.
11. *Бочкарёв С.А.* Собственные колебания вращающейся круговой цилиндрической оболочки с жидкостью // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2010. – Т. 3, № 2. – С. 24-33. DOI
12. *Païdoussis M.P., Chan S.P., Misra A.K.* Dynamics and stability of coaxial cylindrical shells containing flowing fluid // J. Sound Vib. – 1984. – V. 97, N. 2. – P. 201-235. DOI
13. *Шевелев Н.А., Домбровский И.В.* Численный анализ динамических характеристик вращающихся деформируемых конструкций // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 93-104. DOI
14. *Бочкарёв С.А., Матвеев В.П.* Динамическое поведение упругих коаксиальных цилиндрических оболочек, содержащих движущуюся в них жидкость // ПММ. – 2010. – Т. 74, № 4. – С. 655-666.

*Поступила в редакцию 22.02.13; опубликована в электронном виде 25.04.13*