

DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.1.1

УДК 539.4:620.22

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ МЕТОД ФАКТОРИЗАЦИИ В ЗАДАЧАХ ГЕОЭКОЛОГИИВ.А. Бабешко¹, О.М. Бабешко¹, М.В. Зарецкая¹, М.С. Капустин¹, В.Л. Шестопалов²¹Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия²Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону, Россия

Рассматриваются вопросы переноса субстанций в блочной структуре, где каждый блок является слоем, и оседания этих субстанций на разнотипное основание, возникающие в экологии, сейсмологии, материаловедении и описываемые однотипными уравнениями смешанных краевых задач. Применение дифференциального метода факторизации позволяет получить интегральное представление решения в каждом блоке. Приводятся результаты расчетов для модельной задачи.

Ключевые слова: перенос субстанций, блочная структура, дифференциальный метод факторизации

DIFFERENTIAL FACTORIZATION METHOD APPLIED TO GEOECOLOGICAL PROBLEMSV.A. Babeshko¹, O.M. Babeshko¹, M.V. Zaretskaya¹, M.S. Kapustin¹ and V.L. Shestopalov²¹Kuban State University, Krasnodar, Russia²Southern Scientific Center of RAS, Rostov-on-Don, Russia

The transport of substances in a block structure, where each block is a layer, and the settlement of these substances on a diverse-type base are considered. Such issues encountered in studying ecological, seismological, and materials science problems can be described by the mixed boundary-value problems of the same type. Application of a differential factorization method allows us to obtain an integral representation of the solution for each block. The results of calculations for the model problem are presented.

Key words: substance transport, block structure, differential factorization method

1. Введение

Исследование напряженно-деформированного состояния блочно структурированной геологической среды является сложной многоуровневой проблемой, далекой от полного решения, несмотря на значительные усилия и очевидные успехи, достигнутые в этом направлении. В настоящее время получены значимые результаты в области развития методов исследования сейсмических волновых процессов [1, 2], анализа сейсмической напряженности литосферных плит с позиции механики деформируемого твердого тела с учетом множественных неоднородностей [3, 4]. Однако для оценки концентрации напряжений, возникающих в литосферных плитах, необходимо учитывать, что на уровень и распределение напряжений в земной коре оказывает влияние ряд факторов, в том числе тепловой поток, полная энергия которого достаточно велика, чтобы рассматривать его в качестве одного из основных источников механического движения в недрах Земли [5]. Выделяется два источника теплового потока: горячие легкие фракции мантийных неоднородностей на границе мантия–кора Земли и устойчивые зоны высоких температур в приземном слое атмосферы; воздействие первого источника существеннее, чем второго.

Проблема определения напряженно-деформированного состояния литосферных плит как деформируемых физико-механических объектов сложного строения с учетом их блочной структуры [6, 7], широкого спектра физико-механических характеристик, поверхностного теплового воздействия, может быть решена путем сведения ее к двум самостоятельным последовательно реализуемым задачам.

Сначала решается задача определения областей концентрации на подошве литосферной плиты всплывающих горячих фракций мантийных неоднородностей. Принимается известный факт расслоенности астеносферы [8], что позволяет рассматривать астеносферу как блочную структуру, где каждый блок является слоем, и учитывает разнотипность нижнего основания литосферной плиты. Результаты решения этой задачи используются далее для постановки граничных условий при исследовании полей напряжений и деформаций в литосферной плите.

Итак, плита понимается как блочная структура. В зависимости от типа блоков модель изотропного термоупругого тела применяется либо к блоку блочной структуры, либо к блочному элементу в случае, если рассматриваемую область целесообразно разбить сеткой на блоки меньшего размера [9].

Ниже представлено решение задачи переноса субстанций в блочно структурированной среде в общем случае. Перенос и всплытие горячих фракций мантийных неоднородностей в астеносфере является ее частным случаем. Представленная модель вполне самостоятельна и может широко использоваться при решении проблем практической экологии, значимых для охраны и мониторинга окружающей среды.

2. Методы решения

Решение задачи переноса субстанций в среде требует учета двух факторов. Во-первых, среда, как правило, характеризуется сложным распределением физических и механических характеристик не только по высоте, но и по всему объему. В ряде случаев можно выделить квазиоднородные слои, как, например, в водной среде [10] или астеносфере [8]. Во-вторых, необходимо помнить, что подстилающая поверхность, на которую происходит оседание субстанций, является неоднородной: одни области могут полностью отражать субстанцию, другие — аккумулировать все осевшее вещество, третьи — частично аккумулировать и отражать вещество обратно в среду.

Для решения уравнений переноса широко применяются методы, основанные на прямом сведении пространственных задач к алгебраическим системам (разностные методы, основанные на простейших аппроксимациях операторов в частных производных их разностными аналогами, и проекционные, базирующиеся на идеях метода Галеркина [11–14]) или метод граничных интегральных уравнений [15]. Также к числу часто используемых методов построения аналитических (полуаналитических) решений относятся метод разделения переменных и метод интегральных преобразований, к которым прибегают обычно для канонических областей. В последние годы получил развитие метод конечных интегральных преобразований, в некоторых задачах решение строится в рядах, в некоторых дополнительно приходится решать бесконечные системы [16]. Однако усложнение областей, их протяженность или неограниченность, сложные граничные воздействия делают те или иные из перечисленных методов неприемлемыми.

В работах [17, 18, 19] предложены теория блочных структур и дифференциальный метод факторизации, качественно обобщающий на дифференциальные уравнения подход, развитый Н. Винером только для интегральных уравнений. Разработанные методы позволяют строить представления решений краевых задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных в произвольных областях в аналитическом виде. Наличие аналитического представления общих решений дает возможность анализа качественного поведения различных параметров в блоках системы.

Теория блочных структур предназначена для исследования граничных задач в телах сложной формы. Под блочными структурами понимаются среды, заполняющие ограниченные, полуограниченные или неограниченные области, называемые контактирующими блоками, каждый из которых обладает своими специфическими физико-механическими свойствами и собственным поведением при воздействиях различной природы. В каждом блоке могут протекать связанные процессы механики деформируемого твердого тела, механики сплошных сред и другие. Считается, что область Ω блочной структуры состоит из областей Ω_b , $b = 1, 2, \dots, B$ с границами $\partial\Omega_b$. Часть границы блока может оказаться общей с границей другого блока, ее называют контактирующей. Остальная часть, не контактирующая, может быть свободной или подчиненной внешним воздействиям. Предполагается, что в каждой области Ω_b ставится краевая задача для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными, своими в каждой области, коэффициентами.

В блочной структуре исследование и решение граничных задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами производится дифференциальным методом факторизации [17, 18, 19], который представляет собой обобщение метода интегральных преобразований, являющегося удобным инструментом изучения граничных задач в случае, когда область Ω и функции, описывающие интегральное преобразование, согласованы. При этом под согласованностью понимается возможность перехода от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям в результате применения интегрального преобразования. Если область Ω является полупространством, граничная задача решается дифференциальным методом факторизации в конечном виде. В случае выпуклой области Ω задача сводится к решению системы нормально разрешимых псевдодифференциальных уравнений меньшей размерности.

3. Исследование процессов переноса и оседания субстанций в блочно структурированной среде

Рассмотрим процесс переноса и оседания субстанций в блочно структурированной среде в общем случае. Считаем, что вертикальные профили физико-механических характеристик среды характеризуются стратификацией с квазиоднородными слоями. Для описания процессов переноса в такой среде введем блочную структуру, где каждый блок является слоем. В каждом слое движение среды полагаем установившимся, доступным для оперативного измерения. Каждому типу подстилающей поверхности ставим в соответствие параметр, характеризующий способность данного участка поверхности удерживать часть осаждающихся веществ при наличии приповерхностных движений среды. В процессе переноса субстанция может претерпевать изменения, вступая в физическое и химическое взаимодействие с частицами окружающей среды и другими примесями, которые изменяют механические, физические и химические свойства. Источники поступления субстанций могут быть как сосредоточенными, так и распределенными. Молекулярным потоком, обусловленным тепловым движением молекул, пренебрежем. Процессы рассмотрим в мезомасштабном приближении.

Пусть среда занимает область Ω с конечным числом слоев N и плоскими границами. В каждом слое движение среды имеет периодически установившийся характер со собственными слою скоростями. Количественное изменение содержания субстанций в среде во времени и пространстве опишем уравнением переноса [12]

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial t} + u_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + v_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} + (w_n - w_{gn}) \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} + \sigma_0 \varphi_n - \mu_n \left(\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial y^2} \right) - \nu_n \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial z^2} = f_n(x, y, z, t). \quad (1)$$

В (1) приняты обозначения: $\varphi_n(x, y, z)$ — функция концентрации субстанций в n -м слое; u_n, v_n, w_n — компоненты вектора скорости в направлениях x, y, z для n -го слоя; w_{gn} — абсолютная величина вертикальной скорости движения субстанций в n -м слое под действием силы тяжести; σ_0 — коэффициент поглощения; ν_n, μ_n — коэффициенты диффузии в вертикальном и горизонтальном направлениях для n -го слоя; $n = 1, 2, \dots, N$ — номер слоя; f_n — функция, характеризующая внутренние источники субстанций (если источники допускают незначительные пульсации мощности, f_n описывается функцией $f_n(x, y, z, t) = f_{n1}(x, y, z) + f_{n2}(x, y, z) \sin \omega t$, $f_{n1}(x, y, z, t) > f_{n2}(x, y, z, t) > 0$; если субстанции поступают от источников, сосредоточенных в точках $(x_{c_n}, y_{c_n}, z_{c_n})$, $h_{n-1} \leq z_{c_n} \leq h_n$, то функция f_n может быть выражена через δ -функцию в виде:

$$f_n(x, y, z, t) = C_n \delta(x - x_{c_n}, y - y_{c_n}, z - z_{c_n}) \exp i \omega t, \quad (2)$$

где t — время; C_n — мощность n -го источника.

Далее, считая частоту ω малой, пренебрегаем пульсациями скоростей, считаем их постоянными. Вектор скорости должен удовлетворять уравнениям неразрывности, что при постоянных скоростях выполняется автоматически.

Условия на границах сопряжения слоев запишем с учетом отсутствия разрывов:

$$\begin{aligned} \varphi_n(x, y, z) &= \varphi_{n+1}(x, y, z), & z = h_n, \\ \nu_n \frac{\partial \varphi_n(x, y, z)}{\partial z} &= \nu_{n+1} \frac{\partial \varphi_{n+1}(x, y, z)}{\partial z}, & z = h_n. \end{aligned} \quad (3)$$

На нижней границе нижнего слоя ($z = 0$) и на верхней границе верхнего слоя ($z = h_N$) выполним условия:

$$\alpha_{10m} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \alpha_{20m} \varphi_1 = f_m(x, y), \quad z = 0, \quad x, y \in \Sigma_m, \quad \cup \Sigma_m = \mathbf{R}^2 \quad (m = 1, 2, \dots, M), \quad (4)$$

$$\alpha_{1N} \frac{\partial \varphi_N}{\partial z} - \alpha_{2N} \varphi_N = g(x, y), \quad z = h_N. \quad (5)$$

Здесь $f_m(x, y)$, $g(x, y)$ — функции, изображающие, соответственно, источник на уровне поверхности в области Σ_m и источник на верхней границе пакета слоев.

Введем в рассмотрение дифференциальный оператор

$$L_m = \alpha_{10m} \frac{\partial}{\partial z} - \alpha_{20m}. \quad (6)$$

Тогда граничное условие (4) можем переписать в виде $L_m \varphi_1 = f_m(x, y)$.

Заметим, граничные условия (4) переводят задачу в класс смешанных, с линиями раздела граничных условий. Входящие в (4) параметры являются функциями скоростей нижнего слоя, то есть $\alpha_{10m}(u_1, v_1)$, $\alpha_{20m}(u_1, v_1)$. Тем самым принимается модель, при которой в зависимости от величин скоростей в нижнем, приповерхностном слое будет происходить частичное или полное отражение оседающего вещества: при $\alpha_{10m} = 0$ — полное отражение, при $\alpha_{20m} = 0$ — вещество аккумулируется. На бесконечности решения граничной задачи должны стремиться к нулю. В связи с тем, что краевая задача (1), (3)–(5) является смешанной, сведем ее к системе интегральных уравнений.

Решим вспомогательную задачу. Для этого заменим два граничных условия (4) одним и предположим, что оно задано на всей подстилающей поверхности. В качестве такого условия также может выступать произвольное граничное условие, не заданное ни в одной из областей Σ_m . В частности можно принять граничное условие вида: $\varphi_1 = q(x, y)$, $z = 0$, $x, y \in \mathbb{R}^2$. В этом случае функция $q(x, y)$ характеризует распределение субстанций на нижней границе первого слоя. Эта функция $q(x, y)$ имеет проекции $q_m(x, y)$ на области Σ_m , является неизвестной и нуждается в определении.

Для решения вспомогательной задачи воспользуемся дифференциальным методом факторизации, согласно которому решение в каждом слое можно представить в форме интегралов Фурье вида:

$$\varphi_{k+1}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbb{R}^2} \Phi_{k+1}(\alpha_1, \alpha_2, z) e^{-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} d\alpha_1 d\alpha_2 \equiv \mathbf{V}^{-1} \Phi_{k+1},$$

где $\Phi_{k+1}(\alpha_1, \alpha_2, z) = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_{k+1}(x, y, z) e^{i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} dx dy \equiv \mathbf{V} \varphi_{k+1}$ — Фурье-образ функции концентрации субстанции,

$$\begin{aligned} \Phi_{k+1}(\alpha_1, \alpha_2, z) = & \left[a_{k+1} \operatorname{ch} \theta_{k+1}(z - h_k) + b_{k+1} \operatorname{sh} \theta_{k+1}(z - h_k) \right] e^{\sigma_k(z - h_k)} + \\ & + \theta_{k+1}^{-1} \mathbf{v}_{k+1}^{-1} e^{\sigma_{k+1}(z - z_{C_{k+1}})} \left[\operatorname{sh} \theta_{k+1}(z - z_{C_{k+1}}) \right] \psi(z_{C_{k+1}} - z), \end{aligned} \quad (7)$$

$$h_k \leq z_{C_{k+1}} \leq h_{k+1}, \quad \psi(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

Элементы вектора $\mathbf{Y}_{k+1} = \{a_{k+1}, b_{k+1}\}$ находятся из легко обрабатываемой системы матричных уравнений. Наиболее важный для дальнейшего вектор \mathbf{Y}_1 имеет вид (для случая $C_n \neq 0$):

$$\mathbf{Y}_1 = (\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 \mathbf{K}_{N-1})^{-1} (\mathbf{Q} - \mathbf{G}_2 \mathbf{B}_{N1}). \quad (8)$$

Если известны компоненты вектора \mathbf{Y}_1 , то компоненты векторов $\mathbf{Y}_{k+1} = \{a_{k+1}, b_{k+1}\}$ вычисляются по следующим формулам: $\mathbf{Y}_{k+1} = \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{S}_k \dots \mathbf{S}_2 \mathbf{Y}_1 \equiv \mathbf{K}_k \mathbf{Y}$.

В (7), (8) приняты обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_1 = & \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{G}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{K}_{n-1} = \mathbf{S}_n \mathbf{S}_{n-1} \dots \mathbf{S}_2; \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{V} \mathbf{q} + T \\ \mathbf{V} \mathbf{g} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}_{nl} = \mathbf{S}_n \mathbf{S}_{n-1} \dots \mathbf{S}_l \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \mathbf{N}_{l-1}; \\ T = & \theta_1^{-1} \mathbf{v}_1^{-1} e^{-\sigma_1 z_{C_1}} \left[(\alpha_{10z} \sigma_1 - \alpha_{20z}) \operatorname{sh} \theta_1 z_{C_1} - \alpha_{10z} \theta_1 \operatorname{ch} \theta_1 z_{C_1} \right]; \quad \mathbf{S}_n = \frac{e^{\sigma_{n-1}(h_{n-1} - h_{n-2})}}{\mathbf{v}_n \theta_n} (s_{mk}); \quad s_{11} = \mathbf{v}_n \theta_n C(h_{n-1} - h_{n-2}); \\ s_{12} = & \mathbf{v}_n \theta_n S(h_{n-1} - h_{n-2}); \quad s_{21} = (\mathbf{v}_{n-1} \sigma_{n-1} - \mathbf{v}_n \sigma_n) C(h_{n-1} - h_{n-2}) + \mathbf{v}_{n-1} \theta_{n-1} S(h_{n-1} - h_{n-2}); \quad s_{22} = (\mathbf{v}_{n-1} \sigma_{n-1} - \mathbf{v}_n \sigma_n); \\ C(h_{n-1} - & h_{n-2}) = \operatorname{ch} \theta_{n-1}(h_{n-1} - h_{n-2}); \quad S(h_{n-1} - h_{n-2}) = \mathbf{v}_{n-1} \theta_{n-1} C(h_{n-1} - h_{n-2}); \quad \operatorname{sh} \theta_{n-1}(h_{n-1} - h_{n-2}); \\ \mathbf{M}_{l-1} = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{v}_{l-1} \sigma_{l-1} & \mathbf{v}_{l-1} \theta_{l-1} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{N}_l = \begin{pmatrix} N_{l1} \\ N_{l2} \end{pmatrix}; \quad N_{l1} = C_l e^{\sigma_l(h_{l-1} - z_{C_{l-1}})} S(h_{l-1} - z_{C_{l-1}}); \\ N_{l2} = & C_l e^{\sigma_l(h_{l-1} - z_{C_{l-1}})} \left[\sigma_l S(h_{l-1} - z_{C_{l-1}}) + \theta_l C(h_{l-1} - z_{C_{l-1}}) \right]; \quad g_{11} = \alpha_{10z} \sigma_1 \mathbf{v}_1 - \alpha_{20z}; \quad g_{12} = \alpha_{10z} \mathbf{v}_1 \theta_1; \\ g_{21} = & \left[\alpha_{1N} s_N - \alpha_{2N} C(h_{N-1} - h_{N-2}) \right] e^{\sigma_N(h_N - h_{N-1})}; \quad g_{22} = \left[\alpha_{1N} \tau_N - \alpha_{2N} S(h_{N-1} - h_{N-2}) \right] e^{\sigma_N(h_N - h_{N-1})}; \\ s_N = & \mathbf{v}_N \left[\sigma_N C(h_{N-1} - h_{N-2}) + \theta_N S(h_{N-1} - h_{N-2}) \right]; \quad \tau_N = \mathbf{v}_N \left[\sigma_N C(h_{N-1} - h_{N-2}) + \theta_N C(h_{N-1} - h_{N-2}) \right]; \\ \theta_n = & 0,5 \mathbf{v}_n^{-1} \left\{ (w_n - w_{ng})^2 + 4 \mathbf{v}_n \left[\mu_n (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \right] - i(\alpha_1 u_n + \alpha_2 v_n) + \sigma_0 \right\}^{0,5}; \quad \operatorname{Im} \theta_n > 0; \quad \sigma_n = 0,5 \mathbf{v}_n^{-1} \left\{ w_n - w_{ng} \right\}. \end{aligned}$$

Если в (8) обозначить $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 \mathbf{K}_{N-1}$ и $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{N-1}$, тогда $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} K_{11} + g_{22} K_{21} & g_{21} K_{21} + g_{22} K_{22} \end{pmatrix}$,

$$\det \mathbf{G} = g_{11}(g_{21} K_{21} + g_{22} K_{22}) - g_{12}(g_{21} K_{11} + g_{22} K_{21}), \quad \mathbf{G}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{G}} \begin{pmatrix} g_{21} K_{21} + g_{22} K_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} K_{11} - g_{22} K_{21} & g_{11} \end{pmatrix},$$

$\mathbf{Q} - \mathbf{G}_2 \mathbf{B}_{N1} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 - g_{11} B_{N1,1} - g_{22} B_{N1,2} \end{pmatrix}$. Окончательно для элементов вектора \mathbf{Y}_1 получим:

$$a_1 = \frac{1}{\det \mathbf{G}} \left[Q_1 (g_{21} K_{21} + g_{22} K_{22}) - g_{12} (Q_2 - g_{21} B_{N1,1} - g_{22} B_{N1,2}) \right],$$

$$b_1 = \frac{1}{\det \mathbf{G}} \left[Q_1 (-g_{21} K_{11} - g_{22} K_{21}) + g_{12} (Q_2 - g_{21} B_{N1,1} - g_{22} B_{N1,2}) \right].$$

Как видно из выражения (7), сшивание решений на границах слоев осуществляется с использованием лишь одной функции скачка $\psi(z)$, что в значительной степени упрощает формулы и позволяет, решив лишь одну граничную задачу, строить решения ряда смежных граничных задач для этой же системы дифференциальных уравнений.

Внося построенное решение задачи в граничные условия (6), получаем систему интегральных уравнений вида:

$$\sum_{n=1}^M \iint_{\Sigma_n} k_m(x - \xi_1, y - \xi_2) q_n(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \bar{f}_m(x, y), \quad x, y \in \Sigma_m;$$

$$k_m(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{K}_m(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (m = 1, 2, \dots, M).$$

Здесь $\mathbf{K}_m(\alpha_1, \alpha_2)$ есть результат воздействия дифференциального оператора (6) на построенное решение задачи (7) для первого слоя. Функции $\bar{f}_m(x, y)$ имеют сложное строение, зависят от параметров точечного источника, физико-механических характеристик среды и здесь не приводятся.

Систему (9) можно записать в матричном виде: $\mathbf{K}\Theta = \mathbf{F}$, где $\Theta = \Theta(q_1, \dots, q_N)$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_N)$; элементами квадратной матрицы $\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2)$, содержащей одинаковые строки, являются мероморфные функции двух комплексных переменных α_1 и α_2 . Решение системы интегральных уравнений (9) зависит от m . Так, если $m = 1$, система интегральных уравнений вырождается в одно уравнение свертки на всей плоскости, решаемое путем применения преобразования Фурье; если $m = 2$ и области Ω_m занимают полуплоскости, система сводится к функциональному уравнению Винера–Хопфа и решается в замкнутом виде; если $m \geq 2$ и области не являются полуплоскостями, то для исследования интегральных уравнений нужно применять метод факторизации, предварительно осуществив переход к новым неизвестным, а именно представив систему в виде

$$\mathbf{V}^{-1} \sum_{n=2}^M K_n^{-1} K_m F_n^- = \mathbf{V}^{-1} F_m - \mathbf{V}^{-1} K_1^{-1} K_m F_1, \quad \mathbf{x} \in \Sigma_m \quad (m = 2, \dots, M),$$

где $\mathbf{x} = (x, y)$.

Функции $\sum_{n=2}^M \mathbf{V}^{-1} F_n^-$ являются неизвестным продолжением правой части первого уравнения в системе (9)

вне области Σ_1 во всей плоскости: $f_n^- = \mathbf{V}^{-1} F_n^- = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \notin \Sigma_n, \\ \neq 0, & \mathbf{x} \in \Sigma_n. \end{cases}$

Для областей сложной конфигурации дальнейшее исследование этой системы требует применения методов геометрии многообразий. Принимая во внимание, что мероморфные функции $K_m(\alpha)$ имеют лишь комплексные нули и полюса, можно представить приближенное вырожденное решение задачи, которое устанавливается из системы (9) и имеет вид:

$$q_m(\mathbf{x}) = \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{x}) \sum_{n=1}^M K_n^{-1} F_n + O(e^{-\xi|\mathbf{x}-\tau|}), \quad \mathbf{x} \in \Sigma_m, \quad \tau \in \partial\Sigma_m. \quad (10)$$

Здесь ξ — минимальное значение модуля мнимой части ближайшего к вещественной оси нулевого множества функций $K_m(\alpha_p)$ ($p = 1, 2$). Эти функции приближенно описывают решение во внутренних точках областей Σ_m .

Получение приближенного решения вида (10) для систем интегральных уравнений вида (9) обосновано в работе [19]. Рассматриваемые системы интегральных уравнений обладают специфическими свойствами локальности их ядер. Ядра систем интегральных уравнений экспоненциально затухают при увеличении аргументов. Это обстоятельство позволяет строить приближенные решения интегральных уравнений специальным методом, развитым в [20] для решения смешанных задач теории упругости.

Особенность метода состоит в том, что построенное на его основе решение имеет две составляющие. Первая из них описывает поведение решения во внутренних точках области и называется вырожденной, другая — погранслоиная, наиболее значительна у границы области и убывает по мере удаления от границы вглубь области. Построение вырожденной составляющей осуществляется путем решения уравнения свертки в соответствующей области; для построения погранслоиной составляющей применяется метод спрямления границ. Ранее проведенные тестовые расчеты [20] показали, что вырожденная составляющая решения превосходит погранслоиновую на 2–3 порядка. Вклад погранслоиной составляющей незначительный, и при проведении расчетов можно ограничиться вычислением только вырожденной составляющей.

4. Результаты численных расчетов

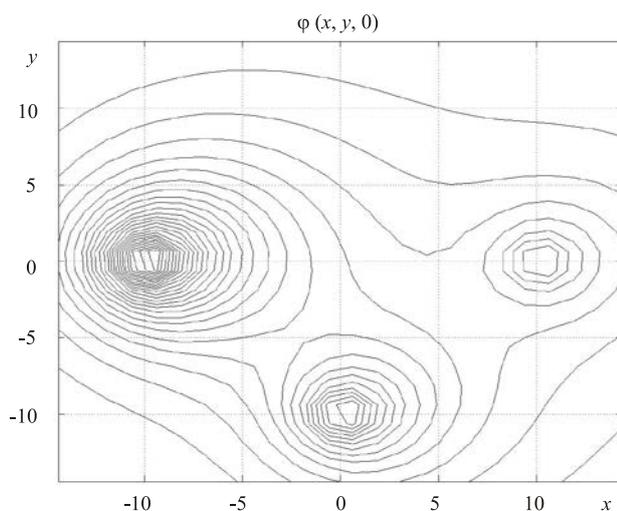
В описанной выше задаче многослойная среда исследуется как простейшая блочная структура. Применение дифференциального метода факторизации позволило решить задачу аналитически в трансформантах Фурье и получить интегральное представление решения исходной задачи:

$$\varphi_{k+1}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbb{R}^2} \Phi_{k+1}(\alpha_1, \alpha_2, z) e^{-i(\alpha x)} d\alpha_1 d\alpha_2 \equiv \mathbf{V}^{-1} \Phi_{k+1}.$$

Обращение интегрального представления требует численного подхода к вычислению двойного интеграла, что является крайне сложной задачей из-за наличия сингулярностей и сильной осцилляции подынтегральных выражений при больших расстояниях между источником и точкой наблюдения. При обращении внутренний интеграл находится с использованием разработанных программ интегрирования быстро осциллирующих функций, внешний интеграл можно посчитать обычными квадратурами [21, 22].

Приведем результаты решения модельной задачи. Исследуемая область представлялась блочной структурой из четырех слоев. Во 2-м, 3-м и 4-м слоях имелись источники поступления субстанций. В безразмерных единицах задавались следующие значения величин: высоты слоев $h_1 = 10$, $h_2 = 20$, $h_3 = 30$, $h_4 = 40$; интенсивность для всех источников принималась равной 1; координаты источников $(-10; 0; 15)$, $(0; -10; 25)$, $(10; 0; 35)$; значения скоростей по слоям $(0,5; 0,5)$, $(1; 1)$, $(-0,5; -0,5)$, $(0; 0)$; значения коэффициентов диффузии во всех слоях $\mu = 10^{-3}$, $\nu = 10^{-2}$; коэффициент поглощения σ_0 обнулялся.

Для модельной задачи получены максимальные значения концентраций: в области каждого источника: первого — $5,33 \cdot 10^{-4}$; второго — $2,21 \cdot 10^{-4}$; третьего — $1,01 \cdot 10^{-4}$. Шаг между изолиниями концентрации составлял $2,4 \cdot 10^{-5}$.



Области оседания субстанций на подстилающем основании для 4-слойной блочной структуры при наличии трех источников

На рисунке представлены области концентрации оседающей субстанции на подстилающем основании. Форма и размеры этих областей существенно зависят от основных физико-механических параметров среды, в первую очередь от скоростей движения в каждом слое.

Разработанная математическая модель и полученные результаты могут быть использованы при исследовании процессов, описываемых однотипными смешанными краевыми задачами. К ним относятся оценка экологических последствий выбросов загрязняющих веществ в атмосферу или водную среду для различных источников выбросов, свойств среды и разнотипных подстилающих поверхностей, исследование оседания субстанции горячих мантийных неоднородностей на нижнее основание литосферной плиты, создание новых материалов путем напыления вещества.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (соглашение 14.В37.21.0646).

Литература

1. Родионов В.Н. Сейсмический режим и блочное строение земной коры // Геозкология. – 1994. – № 3. – С. 76-81.
2. Родионов В.Н., Сизов И.А., Цветков В.М. Основы геомеханики. – М.: Недра, 1986. – 301 с.
3. Бабешко В.А., Бабешко О.М. Метод факторизации в теории вирусов вибропрочности // ДАН. – 2003. – Т. 393, № 4. – С. 473-477.
4. Бабешко В.А., Бабешко О.М. Об одной модели расчета концентрации напряжений в литосферных плитах // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2005. – № 2. – С. 16-22.
5. Пуцаровский Ю.М., Соколов С.Д. Нелинейная тектоника // Фундаментальные проблемы общей тектоники / Под ред. Ю.М. Пуцаровского. – М.: Научный мир, 2001. – С. 476-508.
6. Садовский М.А., Писаренко В.Ф. Сейсмический процесс в блоковой среде. – М.: Наука, 1991. – 91 с.
7. Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В. О решении проблемы блочных структур академика М.А. Садовского // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2009. – № 1. – С. 18-23.
8. Жарков В.Н. Внутреннее строение Земли и планет. – М.: Наука, 1978. – 192 с.
9. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Зарецкая М.В., Павлова А.В., Мухин А.С., Лозовой В.В., Федоренко А.Г. О приложениях теории блочных структур в науках о Земле, сейсмологии, строительстве, материаловедении // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2008. – № 4. – С. 27-34.
10. Монин А.С., Федоров К.Н., Шевцов В.П. О вертикальной мезо- и микроструктуре океанических течений // ДАН СССР. – 1973. – Т. 208, № 4. – С. 833-836.
11. Алоян А.Е. Моделирование динамики и кинетики газовых примесей и аэрозолей в атмосфере. – М.: Наука, 2008. – 415 с.
12. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. – М.: Наука, 1982. – 320 с.
13. Пономарев В.М., Чхетиани О.Г., Шестакова Л.В. Численное моделирование развитой горизонтальной циркуляции в атмосферном пограничном слое // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2009. – № 1. – С. 68-80. DOI
14. Шатров А.В., Шварц К.Г. Численное моделирование атмосферных мезомасштабных процессов переноса примесей в окрестности города Кирова // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2010. – № 3. – С. 117-125. DOI
15. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. – М.: Мир, 1987. – 312 с.
16. Сеницкий Ю.Э. Метод конечных интегральных преобразований – обобщение классической процедуры разложения по собственным вектор-функциям // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2011. Т. 11, № 3. – С. 61-89.
17. Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В. Об интегральном и дифференциальном методах факторизации // ДАН. – 2006. – Т. 410, № 2. – С. 168-172.
18. Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В., Зарецкая М.В., Павлова А.В. Дифференциальный метод факторизации для блочной структуры // ДАН. – 2009. – Т. 424, № 1. – С. 36-39. DOI
19. Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В., Зарецкая М.В., Павлова А.В., Федоренко А.Г. О дифференциальном методе факторизации в приложениях // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2008. – № 2. – С. 5-12.
20. Бабешко В.А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. – М.: Наука, 1984. – 256 с.
21. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. – М.: Наука, 1974. – 456 с.
22. Бабешко В.А., Зарецкая М.В., Рядчиков И.В. К вопросу моделирования процессов переноса в экологии, сейсмологии и их приложения // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2008. – № 3. – С. 20-25.
23. Зарецкая М.В., Рядчиков И.В. Разработка программно-аппаратурного комплекса оценки техногенного воздействия предприятия на состояния окружающей среды // Защита окружающей среды в нефтегазовом комплексе. – 2007. – № 10. – С. 14-16.

Поступила в редакцию 02.03.12; опубликована в электронном виде 25.04.13

Сведения об авторах

Бабешко Владимир Андреевич, дфмн, акад., дир., Научно-исследовательский центр прогнозирования и предупреждения геозкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета (НИЦ ПГК КубГУ), 350040, Краснодар, ул. Ставропольская, д. 149; E-mail: babeshko@kubsu.ru

Бабешко Ольга Мефодьевна, дфмн, снс, гнс, НИЦ ПГК КубГУ; E-mail: infocenter@kubsu.ru

Зарецкая Марина Валерьевна, дфмн, внс, НИЦ ПГК КубГУ; E-mail: zarmv@mail.ru

Капустин Михаил Сергеевич, кфмн, доц., КубГУ; E-mail: kapustin@mail.kubsu.ru

Шестопалов Валерий Леонидович, ктн, зав.лаб., Южный научный центр РАН (ЮНЦ РАН), 344006, Ростов-на-Дону, пр. Чехова, д. 41; E-mail: bsec@kubsu.ru