

DOI: [10.7242/1999-6691/2012.5.4.50](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2012.5.4.50)
УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

В.Г. Баженов, Е.В. Павлѐнкова, А.А. Артемьева

НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, Н.Новгород, Россия

Излагается методика численного решения нелинейных нестационарных задач осесимметричного упругопластического деформирования оболочек вращения с учетом кручения при заданных кинематических и силовых нагрузениях. Методика основывается на геометрически нелинейной теории оболочек типа Тимошенко и теории пластичности с изотропным упрочнением. Решение задачи осуществляется вариационно-разностным методом в сочетании с явной схемой интегрирования уравнений движения по времени. Приводятся оценки устойчивости и способ регуляризации разностной схемы, позволяющий увеличить шаг интегрирования по времени. Для иллюстрации эффективности методики проведены исследования устойчивости упругопластического процесса деформирования цилиндрической металлической оболочки при монотонном растяжении с кручением.

Ключевые слова: упругопластичность, большие деформации, осесимметричные оболочки, кручение, численное моделирование, вариационно-разностный метод

NUMERICAL SOLUTION OF GENERALIZED DYNAMIC AXISYMMETRIC PROBLEMS FOR ELASTOPLASTIC SHELLS OF REVOLUTION UNDER LARGE DEFORMATIONS

V.G. Bazhenov, E.V. Pavlyonkova and A.A. Artemyeva

Research Institute of Mechanics of Lobachevsky University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia

We present a technique for solving numerically the nonlinear nonstationary problems of axisymmetric elastoplastic deformation of shells of revolution taking into consideration torsion under the prescribed kinematics and loads. The method is based on the geometrically nonlinear Timoshenko theory of shells and the plasticity theory with isotropic hardening. A variational difference method in combination with a scheme for explicit time integration of the equations of motion is used for solving the problem of interest. Stability estimates and a regularization technique for difference schemes that can increase the integration time step are given. The efficiency of the proposed method is verified by studying the stability of the elastoplastic deformation of a cylindrical metal shell under monotonic tension and torsion.

Key words: elastoplasticity, large deformation, axisymmetric shells, torsion, numerical modeling, variational difference method

1. Введение

Обзор работ, посвященных численным решениям осесимметричных геометрически нелинейных задач упругопластического деформирования и устойчивости оболочек при статических нагрузениях, представлен в [1], а при динамических — в [2]. Эти публикации в основном посвящены решению задач с малыми деформациями и немалыми перемещениями металлических оболочек. Численный анализ больших безмоментных деформаций гиперупругих оболочек содержится в монографии [3]. Постановки и результаты решения обобщенных осесимметричных упругопластических задач с кручением в литературе отсутствуют. Подобные задачи возникают при действии внутреннего давления и /или растяжения с кручением и характерны для экспериментальных исследований поведения металлических трубчатых образцов при больших деформациях и неоднородном сложном напряженно-деформированном состоянии. Численное решение этих задач в трехмерной постановке малоэффективно, а подчас и невозможно при использовании коротационной производной Яуманна без выделения больших вращений оболочки как жесткого целого, характерных для задач кручения длинных оболочек даже при малых деформациях. Наиболее простым способом численной реализации нестационарных упругопластических задач с большими деформациями является применение метода конечных элементов и явной схемы интегрирования по времени. Последняя позволяет осуществлять пошаговое перестроение геометрии оболочки, причем на каждом шаге по времени фактически рассматриваются линеаризованные кинематические соотношения в метрике текущего состояния. Современные компьютеры дают возможность с приемлемыми вычислительными затратами осуществлять путем прямого интегрирования уравнений движения моделирование процессов деформирования в широком диапазоне скоростей нагружения (от квазистатических до динамических). Отметим, что обзор математических моделей, постановок задач и численных методов решения нелинейных задач динамики оболочек представлен в работах [4–6].

2. Кинематические соотношения

Обобщенную осесимметричную задачу (с кручением) сформулируем в цилиндрической системе эйлеровых координат Orz , где Oz — ось вращения. Для каждого оболочечного элемента введем местную сопутствующую (лагранжеву) систему координат $O's\xi$ [1]. Здесь: s — длина дуги меридиана оболочечного элемента ($0 \leq s \leq L$); ξ — координата, отсчитываемая от срединной поверхности оболочки и нормальная к ней ($-h/2 \leq \xi \leq h/2$); $h = h(s, t)$ — толщина оболочки; t — время. Общая и местная системы координат связаны соотношениями: $s = r\psi_z - z\psi_r$, $\xi = r\psi_r + z\psi_z$, где $\psi_z = -r_{,s}$, $\psi_r = z_{,s}$ — направляющие косинусы нормали к срединной поверхности, символ « $,s$ » означает дифференцирование по пространственной переменной s .

Оболочечные элементы полагаем тонкими, изменением метрики по толщине пренебрегаем. Деформации поперечного сдвига и изгиба считаем малыми, а деформации срединной поверхности — большими. Деформации сдвига $\varepsilon_{\beta\xi}$ не принимаем во внимание (β — окружная координата).

Распределение скоростей перемещений по толщине оболочки представим в виде:

$$\tilde{u}_s(s, \xi, t) = \dot{u}_s(s, t) + \xi \dot{u}_\varphi(s, t), \quad \tilde{u}_\xi(s, \xi, t) = \dot{u}_\xi(s, t), \quad \tilde{u}_\beta(s, \xi, t) = r\dot{\theta}(s, t).$$

Здесь: $\dot{u}_s(s, t)$, $\dot{u}_\xi(s, t)$ — скорости перемещений срединной поверхности в направлении касательной и нормали; $\dot{u}_\varphi(s, t)$ — угловая скорость поворота поперечных сечений в плоскости меридионального сечения; $\dot{\theta}(s, t)$ — угловая скорость поворота относительно оси вращения; точка над обозначением величины означает ее дифференцирование по времени.

Кинематические соотношения запишем в скоростях и построим в метрике текущего состояния, что позволяет учитывать большие деформации и формоизменения оболочки. Распределение компонент скоростей деформаций (симметричной части градиента скорости перемещений) по толщине примем в виде:

$$\dot{\varepsilon}_{ii} = \dot{\varepsilon}_{ii}^0 + \xi \dot{\varepsilon}_{ii}^I \quad (i = s, \beta), \quad \dot{\varepsilon}_{s\xi} = \dot{\varepsilon}_{s\xi}^0 (1 - (2\xi/h)^2), \quad \dot{\varepsilon}_{s\beta} = \dot{\varepsilon}_{s\beta}^0, \quad (1)$$

где $\dot{\varepsilon}_{ij}^0$ — компоненты скорости деформации срединной поверхности, $\xi \dot{\varepsilon}_{ii}^I$ — компоненты скорости деформации изгиба.

Компоненты тензора скоростей деформации и скорость вращения $\dot{\omega}_{s\beta}$ элемента выразим через компоненты обобщенных скоростей перемещений \dot{u}_r , \dot{u}_z , \dot{u}_φ , $\dot{\theta}$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ss}^0 &= \dot{u}_{r,s}\psi_z - \dot{u}_{z,s}\psi_r, \quad \dot{\varepsilon}_{\beta\beta}^0 = \dot{u}_r r^{-1}, \quad \dot{\varepsilon}_{ss}^I = \dot{u}_{\varphi,s}, \quad \dot{\varepsilon}_{\beta\beta}^I = \dot{u}_\varphi \psi_z r^{-1}, \quad \dot{\varepsilon}_{s\beta}^0 = r\dot{\theta}_{,s}/2, \\ \dot{\varepsilon}_{s\xi}^0 &= (\dot{u}_\varphi + \dot{u}_{r,s}\psi_r + \dot{u}_{z,s}\psi_z)/2, \quad \dot{\omega}_{s\beta} = -r\dot{\theta}_{,s}/2. \end{aligned} \quad (2)$$

3. Физические соотношения

Учет упругопластических свойств материала оболочки (металлы, сплавы) осуществляется в рамках теории течения с нелинейным изотропным упрочнением. Предполагается, что упругие деформации малы, а пластические деформации могут быть большими. Компоненты тензора скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ можно представить в виде суммы упругой $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$ и пластической $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ составляющих: $\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p$, $\dot{\varepsilon}_{ii}^p = 0$ ($i, j = s, \beta, \xi$).

Компоненты тензора напряжений Коши, нормальные к срединной поверхности оболочки, принимаются равными нулю ($\sigma_{\xi\xi} = 0$). Из этого условия и обобщенного закона Гука определяются компонента $\dot{\varepsilon}_{\xi\xi}^e$, компоненты скоростей напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$ и напряжений σ_{ij} :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{\xi\xi}^e &= \frac{\mu}{\mu-1}(\dot{\varepsilon}_{ss}^e + \dot{\varepsilon}_{\beta\beta}^e), \quad \dot{\sigma}_{ss} = \frac{E}{1-\mu^2}(\dot{\varepsilon}_{ss}^e + \mu\dot{\varepsilon}_{\beta\beta}^e), \quad \dot{\sigma}_{\beta\beta} = \frac{E}{1-\mu^2}(\dot{\varepsilon}_{\beta\beta}^e + \mu\dot{\varepsilon}_{ss}^e), \quad \dot{\sigma}_{s\beta} = \frac{E}{1+\mu}\dot{\varepsilon}_{s\beta}^e, \quad \dot{\sigma}_{s\xi} = \frac{E}{1+\mu}\dot{\varepsilon}_{s\xi}^e, \\ D_j \sigma_{ij} &= \dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{jk} \dot{\omega}_{ki} + \sigma_{ik} \dot{\omega}_{kj} \quad (i, j, k = s, \beta), \quad \sigma_{ij} = \int_0^t D_j \sigma_{ij} dt \quad (i, j = s, \beta), \quad \sigma_{s\xi} = \int_0^t \dot{\sigma}_{s\xi} dt, \end{aligned} \quad (3)$$

где E — модуль Юнга, μ — коэффициент Пуассона, символ D_j означает производную по Яуманну [7, 8], которая учитывает поворот элемента оболочки за счет сдвиговой деформации как квазижесткого целого

относительно нормали к её срединной поверхности при кручении. Причем местная сопутствующая система координат $O's\xi$ обуславливается формоизменениями оболочки без учета сдвиговых деформаций кручения, то есть она является лагранжевой только в случае осесимметричной деформации. Заметим, что деформации сдвига при кручении тонких оболочек ограничены из соображений устойчивости осесимметричного процесса деформирования. Металлические трубы при чистом кручении, как показывают эксперименты, теряют устойчивость при углах закручивания порядка $\pi/12$ с образованием неосесимметричных форм. Поэтому введение производной Яуманна для учета квазижесткого вращения при кручении вполне обосновано при использовании явной схемы интегрирования с малыми шагами по времени. В итоге существенно упрощается запись основных уравнений обобщенной осесимметричной задачи с кручением, так как за базовую берется лагранжева система координат осесимметричной задачи.

Скорости пластических составляющих деформации описываются ассоциированным законом течения:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \sigma'_{ij}, \quad \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = (2/3) \sigma_*^2(\kappa), \quad \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}, \quad \sigma = (\sigma_{ss} + \sigma_{\beta\beta})/3, \quad \kappa = \sqrt{2/3} \int_0^t \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p} dt. \quad (4)$$

Здесь параметр $\dot{\lambda}$, тождественно равный нулю при упругом деформировании, определяется при пластическом деформировании из условия прохождения мгновенной поверхности текучести через конец вектора догрузки; $\sigma_*(\kappa)$ — радиус поверхности текучести; κ — параметр Одвишта.

4. Уравнение движения

Рассмотрим элемент оболочки, ограниченный контурными сечениями $s = 0, L$. Пусть к контурам приложены внешние усилия $[P_r(t), P_z(t), P_\beta(t)]_{s=0,L}$ и изгибающий момент $[M^H(t)]_{s=0,L}$. Кроме контурных усилий на оболочечный элемент могут действовать нагрузки $p_r(s, t), p_z(s, t)$, распределенные по поверхности.

Уравнения движения оболочки следуют из уравнения баланса виртуальных мощностей работы, известного из механики сплошных сред. Учитывая принятые гипотезы теории оболочек, выполняя интегрирование по толщине и пренебрегая силами Кориолиса, получим вариационное уравнение

$$\int_0^L [N_s \delta \dot{\epsilon}_{ss}^{0H} + M_s \delta \dot{\epsilon}_{ss}^0 + 2Q \delta \dot{\epsilon}_{s\xi}^0 + N_\beta \delta \dot{\epsilon}_{\beta\beta}^H + M_\beta \delta \dot{\epsilon}_{\beta\beta}^0 + 2T \delta \dot{\epsilon}_{s\beta} + M_\rho ((\dot{u}_r - r\dot{\theta}^2) \delta \dot{u}_r + \ddot{u}_z \delta \dot{u}_z + r^2 \ddot{\theta} \delta \dot{\theta}) + J_\rho \ddot{u}_\phi \delta \dot{u}_\phi - p_r \delta \dot{u}_r - p_z \delta \dot{u}_z] r ds - [r(P_r \delta \dot{u}_r + P_z \delta \dot{u}_z + M^H \delta \dot{u}_\phi + P_\beta \delta \dot{\theta})]_{s=0,L} = 0, \quad (5)$$

где $N_s, N_\beta, T, Q, M_s, M_\beta$ — внутренние усилия и моменты; M_ρ, J_ρ — масса и момент инерции, представляемыми интегралами:

$$N_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ii} d\xi, \quad M_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ii} \xi d\xi \quad (i = s, \beta), \quad Q = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{s\xi} (1 - (2\xi/h)^2) d\xi, \quad (6)$$

$$T = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{s\beta} d\xi, \quad M_\rho = \int_{-h/2}^{h/2} \rho d\xi, \quad J_\rho = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \xi^2 d\xi.$$

Подставляя (1) и (2) в (5), получим уравнение мощностей работ относительно вариаций скоростей перемещений $\delta \dot{u}_r, \delta \dot{u}_z, \delta \dot{u}_\phi, \delta \dot{\theta}$:

$$\int_0^L \{ (Q \psi_r + N_s \psi_z) \delta \dot{u}_{r,s} + (Q \psi_z - N_s \psi_r) \delta \dot{u}_{z,s} + M_s \delta \dot{u}_{\phi,s} + r T \delta \dot{\theta}_s + (M_\rho \ddot{u}_z - p_z) \delta \dot{u}_z + [r^{-1} N_\beta + M_\rho (\ddot{u}_r - r \dot{\theta}^2) - p_r] \delta \dot{u}_r + (Q + r^{-1} M_\beta \psi_z + J_\rho \ddot{u}_\phi) \delta \dot{u}_\phi + r^2 M_\rho \ddot{\theta} \delta \dot{\theta} \} r ds - [r(P_r \delta \dot{u}_r + P_z \delta \dot{u}_z + M^H \delta \dot{u}_\phi + P_\beta \delta \dot{\theta})]_{s=0,L} = 0. \quad (7)$$

Отметим, что при больших деформациях напряженное состояние оболочек стремится к безмоментному, так как изгибные и сдвиговые деформации ограничены рамками применимости теории тонких оболочек и осесимметричной постановкой задачи.

5. Вариационно-разностный метод решения задачи

Для решения системы уравнений, описывающей динамическое упругопластическое деформирование оболочек при соответствующих граничных и начальных условиях, воспользуемся явной конечно-разностной схемой «крест». Срединную поверхность каждого оболочечного элемента заменим сеточным аналогом с T_1 узлами вдоль меридиана. Кроме этого, введем промежуточную сетку, смещенную на половину шага по отношению к основной. Значения компонент тензоров деформаций и напряжений вычисляются в узлах промежуточной сетки, а перемещения и скорости перемещений — в узлах основной разностной сетки. Определение напряжений и пластических деформаций оболочечного элемента осуществляем в узлах промежуточной сетки на T_2 слоях по толщине оболочки. Внутренние усилия и моменты найдем путем численного интегрирования напряжений по толщине.

Пространственные производные и функции аппроксимируем в виде:

$$f_{,s} = (f_{i+1} - f_i) / \Delta s_{i+1/2}, \quad \Delta s_{i+1/2} = \sqrt{(r_{i+1} - r_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2}, \quad f_{i+1/2} = (f_{i+1} + f_i) / 2. \quad (8)$$

Процесс деформирования во времени разбиваем на временные слои $t^0, t^1, \dots, t^k, \dots$ с шагом $\Delta t^{k+1} = t^{k+1} - t^k$. Интегрирование уравнения (7) при дискретизации заменяем суммированием величин виртуальных работ по всем ячейкам сетки, покрывающей оболочку. Собирая коэффициенты при вариациях скоростей перемещений $(\delta \dot{u}_r)_j, (\delta \dot{u}_z)_j, (\delta \dot{u}_\varphi)_j, (\delta \dot{\theta})_j$ и учитывая произвольность и независимость вариаций, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую движение дискретной модели оболочки:

$$(\Phi_M \ddot{u}_r)_j = (\Phi_r)_j, \quad (\Phi_M \ddot{u}_z)_j = (\Phi_z)_j, \quad (\Phi_J \ddot{u}_\varphi)_j = (\Phi_\varphi)_j, \quad (\Phi_Y \ddot{\theta})_j = (\Phi_\theta)_j. \quad (9)$$

Здесь $\Phi_r, \Phi_z, \Phi_\varphi, \Phi_\theta$ — обобщенные силы, действующие на расчетный узел j ; Φ_M, Φ_J, Φ_Y — узловое масса и моменты инерции.

Коэффициенты уравнений движения (9) определяем в виде:

– для внутренних узлов $(\Phi_\alpha)_j = (A_\alpha)_{j+1/2} + (A_\alpha)_{j-1/2}$ ($\alpha = r, z, \varphi, \theta, M, J, Y$);

– для контурных узлов $(\Phi_\alpha)_j = (A_\alpha)_{j\pm 1/2} + (A_\alpha^*)_j$ ($\alpha = r, z, \varphi, \theta, M, J, Y$).

Здесь A_α представляют собой односторонние вклады обобщенных сил от ячеек, примыкающих к расчетному узлу разностной сетки:

$$\begin{aligned} (A_r)_{j\pm 1/2} &= \pm [r(Q\psi_r + N_s\psi_z)]_{j\pm 1/2} + \frac{1}{2} [\Delta s (r(p_r + rM_\rho \dot{\theta}^2) - N_\beta)]_{j\pm 1/2}, \\ (A_z)_{j\pm 1/2} &= \pm [r(Q\psi_z - N_s\psi_r)]_{j\pm 1/2} + \frac{1}{2} [\Delta s r p_z]_{j\pm 1/2}, \quad (A_M)_{j\pm 1/2} = \frac{1}{2} [\Delta s r M_\rho]_{j\pm 1/2}, \\ (A_\varphi)_{j\pm 1/2} &= \pm [rM_s]_{j\pm 1/2} - \frac{1}{2} [\Delta s (rQ + M_\beta\psi_z)]_{j\pm 1/2}, \quad (A_\theta)_{j\pm 1/2} = \pm [r^2 T]_{j\pm 1/2}, \quad (A_J)_{j\pm 1/2} = \frac{1}{2} [\Delta s r J_\rho]_{j\pm 1/2}, \\ (A_Y)_{j\pm 1/2} &= \frac{1}{2} [\Delta s r^3 M_\rho]_{j\pm 1/2}, \quad A_r^* = rP_r, \quad A_z^* = rP_z, \quad A_\varphi^* = rM^I, \quad A_\theta^* = rP_\beta, \quad A_M^* = A_J^* = A_Y^* = 0. \end{aligned}$$

Решение полученной системы уравнений строим по явной конечно-разностной схеме второго порядка точности. Скорости и перемещения вычисляем по рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} \dot{f}_j^{k+1/2} &= \dot{f}_j^{k-1/2} + (\Phi_\alpha)_j^k \frac{\Delta t^{k+1/2}}{(\Phi_\zeta)_j^k}, \quad f_j^{k+1} = f_j^k + \dot{f}_j^{k+1/2} \Delta t^{k+1}, \quad \Delta t^{k+1/2} = \frac{1}{2} (\Delta t^{k+1} + \Delta t^k) \\ (f &= u_r, u_z, u_\varphi, \theta; \quad \alpha = r, z, \varphi, \theta; \quad \zeta = M, J, Y; \quad j = \overline{1, T_1}). \end{aligned} \quad (10)$$

6. Алгоритм решения задачи

При решении задачи расчетная область разбивается на конические конечные элементы. Узлы сопряжения конечных элементов с толщинами $h_{i+1/2}(s)$ определяются координатами $r_i(s), z_i(s)$,

$i = \overline{0, T_1 - 1}$. Задаются начальные, граничные условия и поверхностные нагрузки. Начальный временной шаг Δt^1 выбирается согласно критерию устойчивости разностной схемы [9].

По известному на момент времени $t = t^k$ распределению параметров напряженно-деформированного состояния из уравнения движения при помощи соотношений (10) находятся компоненты скоростей перемещений $(\dot{u}_r, \dot{u}_z, \dot{u}_\varphi, \dot{\theta})_j^{k+1/2}$, перемещений $(u_r, u_z, u_\varphi, \theta)_j^{k+1}$ и новая геометрия оболочки: $m_j^{k+1} = m_j^0 + f_j^{k+1}$ ($m = r, z, \beta$, $f = u_r, u_z, \theta$, $j = \overline{1, T_1}$).

Следующим этапом расчета на текущем временном слое является вычисление компонент тензора скоростей деформаций по формулам (1), (2) и конечно-разностным соотношениям (8).

При $\sqrt{\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}} > \sqrt{2/3}\sigma_*$ для нахождения приращений пластических деформаций $(\Delta\varepsilon_{ij}^p)_{i+1/2}^{k+1/2}$ организуется итерационный процесс «посадки» девиатора напряжений σ'_{ij} на поверхность текучести (4). Для этого выполняются следующие операции:

1. Вычисляются параметр $\Delta\lambda = (1 - \sqrt{2/3}\sigma_* / \sqrt{\bar{\sigma}'_{ij}\bar{\sigma}'_{ij}}) / (2(G + q/3))$, где $\bar{\sigma}'_{ij} = \sigma'_{ij} + 2G\Delta\varepsilon_{ij}^p$ (в первом приближении $\Delta\varepsilon_{ij}^p = 0$, $\bar{\sigma}'_{ij} = \sigma'_{ij}$), приращения пластических деформаций $(\Delta\varepsilon_{ij}^p)^k = \Delta\lambda \cdot \bar{\sigma}'_{ij}$, приращение параметра Одвишта $\Delta\kappa = \sqrt{2/3} \cdot \sqrt{\Delta\varepsilon_{ij}^p \Delta\varepsilon_{ij}^p}$; по диаграмме деформирования $\sigma_*(\kappa)$ находится $q = [\sigma_*(\kappa^k + \Delta\kappa) - \sigma_*(\kappa^k)] / \Delta\kappa$; определяются упругие составляющие приращений деформаций $\Delta\varepsilon_{ij}^e = \Delta\varepsilon_{ij}^{k+1} - (\Delta\varepsilon_{ij}^p)^k$, напряжения σ_{ij} по формулам (3), шаровая составляющая тензора напряжений $\sigma = (\sigma_{ss} + \sigma_{\beta\beta}) / 3$, компоненты девиатора напряжений $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$.

2. Проверяется условие текучести $|1 - \sqrt{\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}} / (\sqrt{2/3}\sigma_*)| \leq e = 10^{-3}$, где $\sigma_* = \sigma_*(\kappa^{k+1})$. При невыполнении условия текучести осуществляется переход к пункту 1.

3. Находится приращение деформации $\Delta\varepsilon_{\xi\xi}$ и изменение толщины элементов оболочки:

$$(\Delta\varepsilon_{\xi\xi})_{i+1/2}^{k+1/2} = -\frac{\mu}{1-\mu} (\Delta\varepsilon_{ss}^e + \Delta\varepsilon_{\beta\beta}^e)_{i+1/2}^{k+1/2} - (\Delta\varepsilon_{ss}^p + \Delta\varepsilon_{\beta\beta}^p)_{i+1/2}^{k+1/2}, \quad h_{j+1/2}^{k+1} = h_{j+1/2}^k [1 + (\Delta\varepsilon_{\xi\xi})_{i+1/2}^{k+1/2}].$$

Далее по формулам численного интегрирования рассчитываются усилия и моменты (6) и формируются коэффициенты уравнений движения для следующего временного слоя, где процесс вычислений повторяется.

7. Регуляризация разностной схемы

Изложенная выше явная разностная схема на гладких решениях имеет второй порядок точности от шагов сетки по пространству и времени при задании кинематических граничных условий. Оценки устойчивости схемы получены в [6, 9] в виде $\begin{cases} \Delta t \leq \Delta s / c, & h \geq \Delta s, \\ \Delta t \leq h / c, & \Delta s > h, \end{cases}$ где h — толщина оболочки,

c — скорость звука. При решении большинства задач достаточная точность достигается при использовании пространственного шага сетки вдоль срединной поверхности порядка толщины оболочки. Но с точки зрения эффективности вне зоны краевых эффектов целесообразно применять сетки с большими размерами ячеек. В этом случае ограничение на временной шаг $\Delta t \leq h/c$ становится весьма обременительным. Поскольку оно определяется длинноволновыми высокочастотными сдвиговыми колебаниями, то целесообразной становится регуляризация разностной схемы, позволяющая понижать частоты этих форм колебаний.

В работах [6, 9] предложен и обоснован метод повышения эффективности явных численных схем интегрирования уравнений теории оболочек типа Тимошенко путем введения регуляризирующего множителя к инерции вращения. В результате при $\Delta s/h = n \gg 1$ удается без понижения точности существенно (в n раз) увеличить шаг интегрирования по времени.

8. Численный эксперимент

Рассмотрим поведение цилиндрической оболочки при монотонном кинематическом нагружении кручением–растяжением [10]. Оболочка имеет геометрические параметры: средний радиус

$R_0 = 1,45 \cdot 10^{-2}$ м, длину $L_0 = 9,2 \cdot 10^{-2}$ м, толщину $h = 1 \cdot 10^{-3}$ м и изготовлена из стали 12X18H10T с модулем упругости $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа и коэффициентом Пуассона $\mu = 0,3$. В качестве диаграммы деформирования $\sigma_*(\kappa)$ возьмем экспериментально-расчетную диаграмму, построенную в работе [10]. Один край оболочки ($s = L_0$) жестко зашпелен, $\dot{u}_r = \dot{u}_z = \dot{u}_\varphi = 0$, другой ($s = 0$) может перемещаться и / или закручиваться относительно оси с постоянными осевой (\dot{u}_z) и угловой ($\dot{\theta}$) скоростями. В расчетах скорости растяжения и кручения примем такими, чтобы скорость деформации составляла 10 с^{-1} , а начальное распределение скоростей перемещений по длине будем считать линейным. Это обеспечит пренебрежимо малый вклад сил инерции в решение квазистатической задачи.

Для оценки взаимного влияния двух видов нагружения на процесс деформирования введем параметры:

$$q = \frac{R_0 \theta}{\sqrt{3} u_z}, \quad \bar{\varepsilon}_l = \sqrt{\bar{\varepsilon}_{zz}^2 + 4/3 \bar{\varepsilon}_{\beta z}^2} = \frac{2u_z}{L_0} \sqrt{1+q^2}, \quad \bar{\varepsilon}_{zz} = \frac{u_z}{L_0}, \quad \bar{\varepsilon}_{\beta z} = \frac{R_0 \theta}{L_0}, \quad F = 2\pi R_0 \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{zz} d\xi, \quad M = 2\pi R_0^2 \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\beta z} d\xi.$$

Здесь: кинематический параметр q характеризует «соотношение кручения и растяжения» (при чистом кручении $q = \infty$, при одноосном растяжении $q = 0$, при комбинированном нагружении $0 < q < \infty$); $\bar{\varepsilon}_l$, $\bar{\varepsilon}_{zz}$, $\bar{\varepsilon}_{\beta z}$ — условные интенсивность деформации, осевая и сдвиговая деформации соответственно; u_z и θ — осевое перемещение и угол закручивания между краями; F — осевая сила; M — крутящий момент. Компоненты σ_{zz} и $\sigma_{\beta z}$ определяются преобразованием компонент тензора напряжений Коши из местного базиса $O's\xi$ в общий Oxz . В предположении $q = \text{const}$ общую работу осевой силы и крутящего момента можно выразить через обобщенную силу W :

$$A = \int_0^{u_z} F du_z + \int_0^{\theta} M d\theta = \int_0^{\bar{\varepsilon}_l} W d\bar{\varepsilon}_l.$$

В качестве критерия потери устойчивости процесса однородного пластического деформирования длинной оболочки с локализацией деформаций в виде шейки принимается условие $dW/d\bar{\varepsilon}_l = 0$, характеризующее момент достижения обобщенной силой W максимальных значений. Данное условие является обобщением известного условия А. Консидера $dF/d\varepsilon_l = 0$, полученного при растяжении стержней [11].

На рисунке 1 приведены зависимости от условной осевой деформации $\bar{\varepsilon}_{zz}$ и условной интенсивности деформаций $\bar{\varepsilon}_l$ следующих безразмерных силовых параметров: осевой силы $F^* = F/F_T$, где $F_T = 2\pi R_0 h \sigma_T$, $\sigma_T = \sigma_*(\kappa = 0)$; крутящего момента $M^* = M/M_T$, где $M_T = 2\pi h R_0^2 \sigma_T / \sqrt{3}$; обобщенной силы $W^* = W/W_T$, где $W_T = L_0 F_T$, при пяти значениях параметра $q = 0; 0,5; 1; 4; 8$. Точками на кривых отмечены моменты достижения обобщенной силой W максимальных значений, после прохождения через которые наблюдается потеря устойчивости оболочки. Резкое изменение интегральных силовых характеристик после потери устойчивости объясняется тем, что условная интенсивность деформаций $\bar{\varepsilon}_l$ не учитывает локального изменения геометрических параметров оболочки. Рост осевой силы F^* в зависимости от параметра Одквиста κ в шейке происходит плавно и после момента потери устойчивости.

На рисунке 2 показаны распределения относительного изменения радиуса u_r/R_0 вдоль оси оболочки z/L_0 при $q = 0, 1, 4, 8$ (пунктирными линиями отмечены формы в моменты потери устойчивости оболочек, штрихпунктирными — формы оболочек при дальнейшем нагружении). Здесь же для сравнения приводятся формы оболочек при чистом растяжении ($q = 0$) в моменты времени, соответствующие моментам потери устойчивости оболочек при $q = 1, 4, 8$ (сплошные линии). До момента потери устойчивости форма оболочки определяется только ее относительным удлинением $\bar{\varepsilon}_{zz}$ и не зависит от доли кручения.

При одноосном растяжении потеря устойчивости происходит при $\bar{\varepsilon}_{zz} = 0,5$. Увеличение доли кручения вызывает потерю устойчивости на более ранней стадии растяжения, при этом условная интенсивность деформации возрастает, что видно из рисунка 3, на котором по оси абсцисс отложен параметр q , по оси ординат — $\bar{\varepsilon}_{zz}$ и $\bar{\varepsilon}_l$ в момент потери устойчивости.

Сравнение результатов расчета и эксперимента [10] по остаточной форме при растяжении ($q = 0$, $\bar{\varepsilon}_l = 0,56$) показало, что различие составляет 2,5% как в изменении диаметра, так и толщины оболочки в шейке.

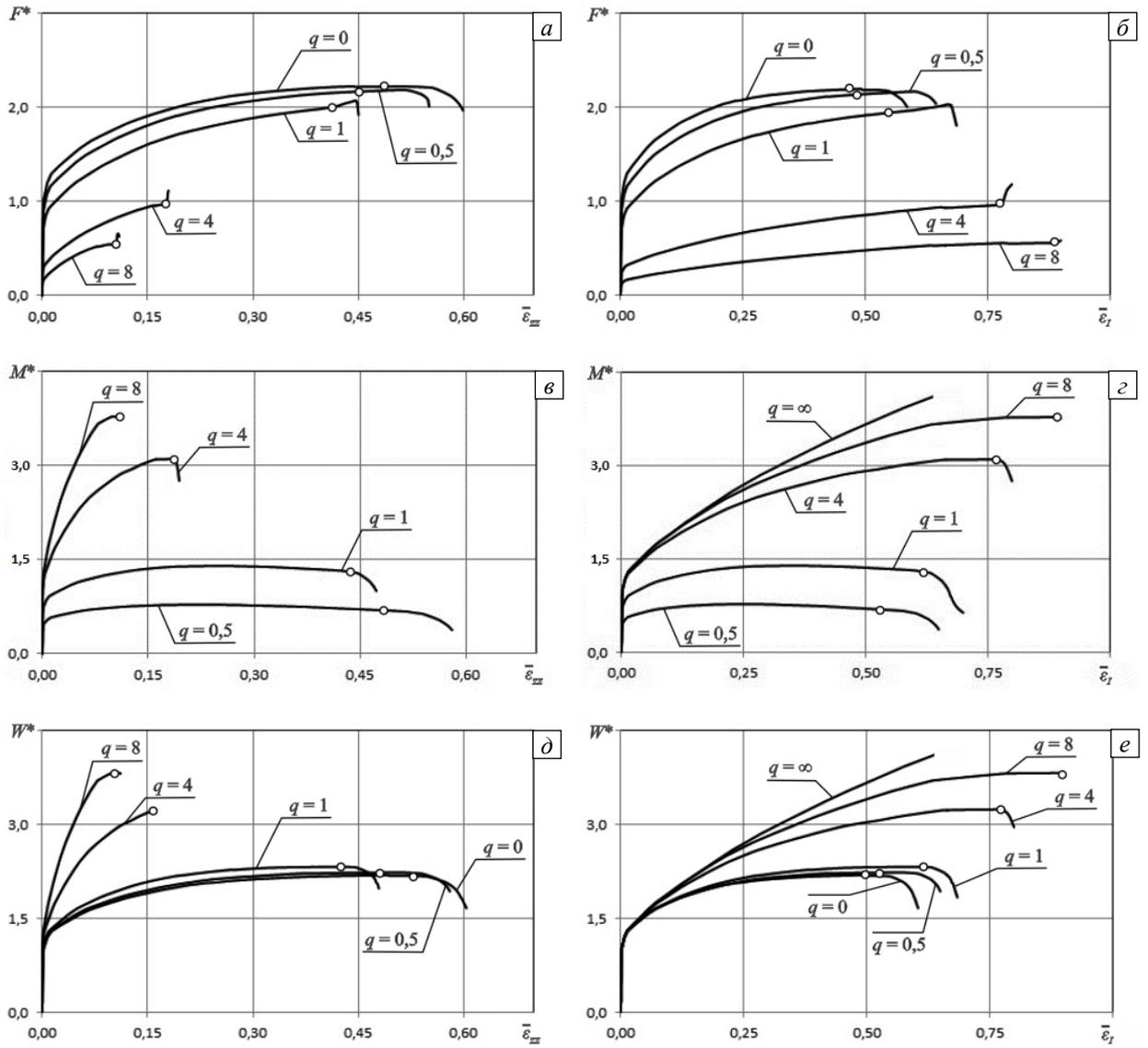


Рис. 1. Зависимости от условной осевой деформации (а, в, д) и условной интенсивности деформаций (б, з, е) безразмерных силовых параметров: осевой силы (а, б); крутящего момента (в, з); обобщенной силы (д, е)

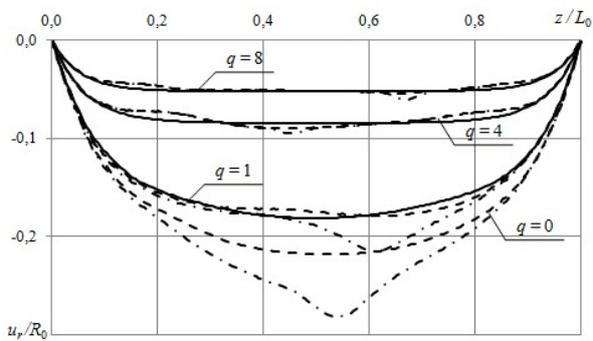


Рис. 2. Относительное изменение радиуса по оси оболочки в зависимости от параметра q

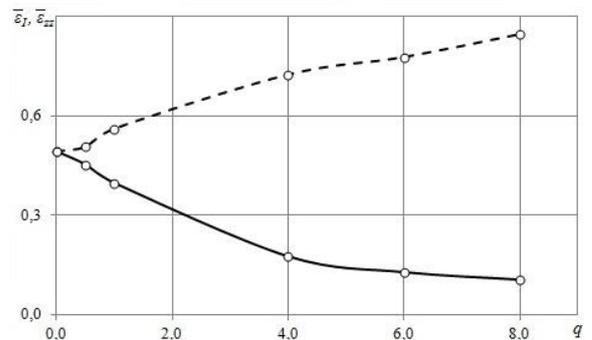


Рис. 3. Зависимость условной осевой деформации (сплошная линия) и условной интенсивности деформаций (пунктирная линия) от q

9. Заключение

Разработанная методика и программа позволяют проводить численное моделирование осесимметричных упругопластических процессов деформирования и предельных состояний оболочек вращения в широком диапазоне скоростей нагружения (от квазистатических до динамических). За базовую взята вариационно-разностная методика решения осесимметричных задач при больших деформациях оболочек вращения путем пошаговой перестройки геометрии оболочки. Вращение элементов как жесткого целого при кручении учитывается введением коротационной производной Яуманна при умеренных сдвиговых деформациях.

Методика проста в численной реализации и предоставляет возможность рассчитывать оболочки с любым очертанием меридиана. Приведенный выше пример решения задачи с образованием шейки при растяжении с кручением цилиндрической оболочки демонстрирует работоспособность методики и эффективность при больших деформациях.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (соглашение 14.132.21.1812), Совета по грантам Президента РФ для ведущих научных школ (грант НШ-2843.2012.8), а также при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 11-08-00565а, 12-08-31190-мол_а, 12-08-33106-мол_а_вед, 12-08-12044-офи_м).

Литература

1. Коробейников С.Н. Численное решение уравнений с особенностями деформирования упругопластических оболочек вращения // Вычисл. технологии. – 2001. – Т. 6, № 5. – С. 39-59.
2. Баженов В.Г., Баранова М.С., Кибец А.И., Ломунов В.К., Павленкова Е.В. Выпучивание упругопластических цилиндрических и конических оболочек при осевом ударном нагружении // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2010. – Т. 152, № 4. – С. 86-105.
3. Колтак Е.П. Устойчивость безмоментных оболочек при больших деформациях. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 2000. – 248 с.
4. Баженов В.Г., Ломунов В.К. Устойчивость и закритическое состояние оболочек вращения при осевом ударе // Прикладная механика. – 1986. – Т. 22, № 9. – С. 28-33.
5. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. – 400 с.
6. Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т. Численные методы решения задач нестационарной динамики тонкостенных конструкций // МТТ. – 2001. – № 5. – С. 156-173.
7. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. – М.: Наука, 1986. – 232 с.
8. Аннин Б.Д., Коробейников С.Н. Допустимые формы упругих законов деформирования в определяющих соотношениях упруго-пластичности // Сиб. журн. индустр. матем. – 1998. – Т. 1, № 1. – С. 21-34.
9. Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т. Решение задач нестационарной динамики пластин и оболочек вариационно-разностным методом: Учеб. пособие. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2000. – 107 с.
10. Баженов В.Г., Ломунов В.К. Экспериментально-теоретическое исследование процесса образования шейки при растяжении стального трубчатого образца до разрыва // Проблемы прочности и пластичности. Межвуз. сб. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2001. – С. 35-41.
11. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. – 420 с.

Поступила в редакцию 07.06.12; опубликована в электронном виде 28.12.12

Сведения об авторах

Баженов Валентин Георгиевич, дфмн, проф, завлаб., Научно-исследовательский институт механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (НИИ механики ННГУ), 603950, Н. Новгород, ГСП-1000, пр. Гагарина, д. 23, корп. 6; E-mail: bazhenov@mech.unn.ru

Павленкова Елена Владимировна, кфмн, снс, НИИ механики ННГУ; E-mail: pavlyonkova@mech.unn.ru

Артемяева Анастасия Анатольевна, мнс, НИИ механики ННГУ; E-mail: aranan@mail.ru