

DOI: [10.7242/1999-6691/2012.5.4.49](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2012.5.4.49)

УДК 539.3

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В КОНЦЕВОЙ ОБЛАСТИ ТРЕЩИНЫ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА МАТЕРИАЛОВ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

М.Н. Перельмутер

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

В работе для анализа напряженного состояния и расчета модуля коэффициентов интенсивности напряжений для трещин на границе раздела материалов при учете взаимодействия берегов трещин используется метод граничных элементов. Взаимодействие берегов трещины моделируется распределенными усилиями, приложенными к берегам трещины в концевой области и зависящими от ее раскрытия. Полагается, что концевая область является частью трещины, а коэффициенты интенсивности напряжений определяются в вершине трещины, совпадающей с вершиной концевой области. При моделировании трещин на границе раздела материалов конструкция разделяется на подобласти. Результаты расчетов сопоставляются с результатами, полученными ранее методом сингулярных интегро-дифференциальных уравнений для трещины на границе раздела двух полуплоскостей с различными механическими свойствами. Выполнено параметрическое исследование влияния жесткости связей в концевой области трещины, физико-механических свойств материалов и размера концевой области трещины на величину модуля коэффициентов интенсивности напряжений. Рассмотрена также задача для криволинейной трещины с концевой областью, расположенной на границе раздела матрицы и цилиндрического включения в композиционном материале.

Ключевые слова: метод граничных элементов, трещины, концевая область, граница раздела, коэффициенты интенсивности напряжений

BOUNDARY ELEMENT ANALYSIS OF STRESS STATE AT THE BRIDGED ZONE OF AN INTERFACE CRACK

M.N. Perelmuter

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

The direct boundary element method has been applied to analyze stresses in a fracture process zone (a crack bridged zone) and to calculate the modulus of stress intensity factors for structures with bridged interface cracks under mechanical loading. The bridged zones of interface cracks are considered as parts of these cracks and it is assumed that distributed spring-like bonds with given bond deformation law link crack surfaces. Numerical analysis of the bridged interface cracks is based on the multi-domain formulation of the boundary integral equation method. The results are compared with those obtained previously for a straight crack at the interface between two different materials using singular integral-differential equations. Parametric analysis of the influence of the bridged zone bond stiffness, the physical-mechanical properties of jointed materials and the bridged zone length on the stress intensity factor modulus is performed. In addition, the problem for a curvilinear bridged crack at the interface between a matrix and a cylindrical inclusion in a composite material is considered.

Key words: boundary element method, cracks, bridged zone, material interface, stress intensity factors

1. Введение

Модели трещины с взаимодействием берегов позволяют объединить при исследовании развития трещин подходы механики и физики разрушения. Зона взаимодействия берегов трещины (или зона процесса разрушения) обычно примыкает к вершине трещины и рассматривается как часть трещины, в которой силы когезии (адгезии — в случае различных материалов) или подкрепляющие волокна (в композитах) препятствуют раскрытию трещины. Наиболее распространены два типа моделей зоны процесса разрушения: когезионные и мостиковые [1–6]. Выбор модели зависит от физико-механических свойств материала. Когезионные модели зоны процесса разрушения используются, как правило, для материалов с выраженными пластическими свойствами, а мостиковые — для квазихрупких однородных и структурно-неоднородных материалов, а также композитов в предположении, что коэффициент интенсивности напряжений (КИН) в вершине трещины не равен нулю. Для трещин в однородных материалах и композитах модель с мостиковыми связями рассмотрена в [4–10] и развита в [11–14] для трещин с концевой областью на границе раздела материалов с различными физико-механическими свойствами.

Приближенные методы оценки трещиностойкости, приемлемые для трещины с малой концевой областью (независимо от типа модели), неприменимы, если длина концевой области трещины не является малой по сравнению с размером трещины. В таких случаях требуется прямое моделирование напряженного состояния в концевой области трещины с учетом деформационных характеристик связей и последующим использованием критерия разрушения для анализа роста трещины [11–13]. Если напряжения в связях не зависят от раскрытия трещины, то задача сводится к определению перемещений

берегов трещины при заданных нагрузках. При напряжениях в связях, постоянных вдоль концевой области трещины, аналитические решения получены для однородных [2, 3] и кусочно-однородных [15] тел. При учете зависимости напряжений в связях от раскрытия трещины даже для безграничных областей возможно только численное решение задачи. Методами интегральных и интегро-дифференциальных уравнений анализ напряженного состояния вблизи прямолинейных трещин со связями для однородных безграничных областей выполнен в [7–9], и для прямолинейных трещин со связями на границе раздела двух полуплоскостей из различных материалов — в [11–14]. Указанные методы не позволяют решать задачи для трещин со связями в областях конечного размера, и наиболее эффективным в этом случае является метод граничных элементов (МГЭ), требующий при решении упругой задачи дискретизации только поверхности тела. В последние десятилетия значительное число работ было посвящено применению МГЭ для анализа напряженного состояния и КИН в вершине трещины на границе раздела материалов [16–23]. В этих работах взаимодействие берегов трещины, обусловленное присутствием связей, не учитывалось и не исследовалось. Приложение МГЭ (а также метода конечных элементов) к решению задач для трещин со связями ограничено анализом только прямолинейных трещин в композиционных материалах при действии растягивающих нагрузок [24–26]. В данной работе МГЭ используется для исследования напряженного состояния вблизи трещины со связями в концевой области (криволинейной в общем случае), расположенной на границе раздела материалов, а также для вычисления модуля КИН.

2. Трещина со связями в концевой области на границе раздела материалов

Рассмотрим двумерную область с трещиной, имеющей длину 2ℓ и расположенной на границе раздела различных материалов (Рис. 1). Выделим части трещины d_1 и d_2 , примыкающие к ее вершинам (концевые области трещины), в которых берега трещины взаимодействуют так, что сдерживается раскрытие трещины. Физическая природа взаимодействия берегов трещины зависит от структуры материала,

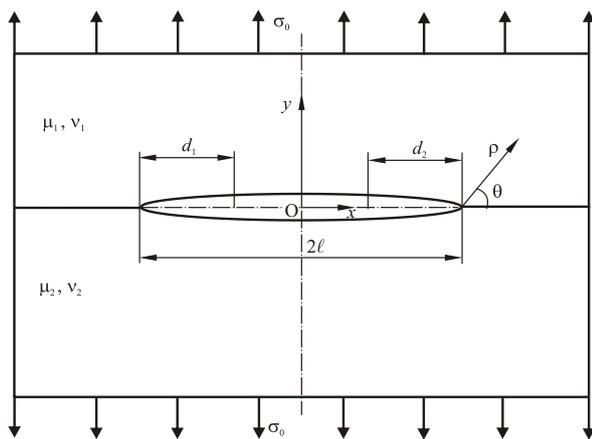


Рис. 1. Трещина со связями между берегами на границе раздела материалов

размеров трещины и концевой области. На малых расстояниях от края трещины преобладают межмолекулярные силы, а на относительно больших расстояниях от края трещины значителен вклад «механических связей». Например, в композиционных и наноконпозиционных материалах такие связи могут состоять из подкрепляющих волокон или пучков нанотрубок соответственно, а в адгезионных соединениях — из звеньев полимерных цепей, соединяющих поверхности трещины. Для математического описания взаимодействия берегов трещины полагаем, что в концевой области между берегами трещины имеются связи, закон деформирования которых (в общем случае нелинейный) задан.

При действии внешних нагрузок в связях, соединяющих берега трещины на границе раздела различных материалов, возникают усилия $Q(s)$, имеющие нормальную $t_y(s)$ и касательную $t_x(s)$ составляющие (s — локальная координата вдоль трещины; для случая, показанного на рисунке 1, $s \equiv x$):

$$Q(s) = t_y(s) - it_x(s), \quad i^2 = -1. \quad (1)$$

К берегам трещины приложены нормальные и касательные напряжения, численно равные $t_y(s)$ и $t_x(s)$ соответственно. Будем полагать, что при действии внешней растягивающей нагрузки в связях на всей протяженности концевой области трещины преобладающими являются растягивающие усилия. Следовательно, зоны быстрой осцилляции перемещений и напряжений вблизи вершины трещины (и, соответственно, зоны перехлеста берегов трещины) малы по сравнению с размерами как трещины, так и концевой области [27].

Раскрытие трещины на границе между двумя различными материалами, $\Delta u(s)$, можно представить в форме, аналогичной (1):

$$\Delta u(s) = \Delta u_y(s) - i\Delta u_x(s), \quad \Delta u_y(s) = u_y^+(s) - u_y^-(s), \quad \Delta u_x(s) = u_x^+(s) - u_x^-(s), \quad (2)$$

где $\Delta u_x(s)$ и $\Delta u_y(s)$ — проекции раскрытия трещины на оси координат Ox и Oy (Рис. 1), а u_x^+, u_y^+ и u_x^-, u_y^- — компоненты перемещений верхнего и нижнего берегов трещины.

Уравнения (1), (2) необходимо дополнить соотношением, связывающим раскрытие трещины и усилия в связях, которое примем в форме квазилинейной зависимости [11–14]:

$$\Delta u(s) = c_{y,x}(s, \sigma)t_y(s) - ic_x(s, \sigma)t_x(s). \quad (3)$$

Эффективные податливости квазилинейных связей $c_{y,x}(s, \sigma)$, обусловленные положением связи в концевой области и натяжением связи σ , можно записать как [11–14]

$$c_{y,x}(s, \sigma) = \phi_{1,2}(s, \sigma)(H/E_b), \quad \sigma = \sqrt{t_x^2 + t_y^2}, \quad (4)$$

где H — линейный размер, пропорциональный толщине зоны неоднородности на участке соединения материалов; E_b — эффективный модуль упругости связей; σ — модуль вектора усилий в связях; $\phi_{1,2}(s, \sigma)$ — безразмерные функции (связи являются линейно-упругими, если функции $\phi_{1,2}$ зависят только от координаты s ; в частности, податливости связей не изменяются вдоль концевой области трещины, если $\phi_{1,2}$ — постоянные величины).

Коэффициенты интенсивности напряжений для трещины на границе раздела материалов можно определить исходя из асимптотических представлений раскрытия трещины или напряжений за вершиной трещины на границе раздела материалов. В полярной системе координат с началом в вершине трещины (Рис. 1) асимптотика перемещений ($\theta = \pm\pi$) имеет вид [28]:

$$\Delta u_y(\rho) + i\Delta u_x(\rho) = \frac{A(K_I + iK_{II})}{2(1 + 2i\beta)\text{ch}(\pi\beta)} \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{i\beta}. \quad (5)$$

Здесь: K_I и K_{II} — компоненты КИН для трещины на границе раздела подобластей I и II; $\Delta u_{x,y}(\rho)$ — компоненты раскрытия берегов трещины (определяемые как разность перемещений верхнего ($\theta = +\pi$) и нижнего ($\theta = -\pi$) берегов, см. выражение (2)); R — характерный линейный размер расчетной области задачи;

$$A = \frac{\kappa_1 + 1}{\mu_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{\mu_2}; \quad \alpha = \frac{\mu_2 \kappa_1 + \mu_1}{\mu_1 \kappa_2 + \mu_2}; \quad \beta = \frac{\ln \alpha}{2\pi}, \quad (6)$$

где $\kappa_{1,2} = 3 - 4\nu_{1,2}$ (в случае плоской деформации) или $\kappa_{1,2} = (3 - \nu_{1,2})/(1 + \nu_{1,2})$ (при плоском напряженном состоянии); $\nu_{1,2}$ и $\mu_{1,2}$ — коэффициенты Пуассона и модули сдвига материалов подобластей I ($y > 0$) и II ($y < 0$) (Рис. 1).

Асимптотика напряжений за вершиной трещины на границе раздела материалов определяется (при $\theta = 0$) выражением [28]:

$$\sigma_{yy}(\rho) + i\sigma_{xy}(\rho) = \frac{K_I + iK_{II}}{\sqrt{2\pi\rho}} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{i\beta}. \quad (7)$$

Модуль КИН на границе раздела материалов

$$K = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2} \quad (8)$$

может быть найден как из выражения (5) по значениям раскрытия трещины

$$K_u = \frac{2\text{ch}(\pi\beta)\sqrt{1 + 4\beta^2}}{A} \sqrt{\frac{2\pi(\Delta u_x^2 + \Delta u_y^2)}{\rho}}, \quad (9)$$

так и из выражения (7) по напряжениям на границе раздела подобластей вблизи вершины трещины

$$K_{\sigma} = \sqrt{2\pi\rho} \sqrt{\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yy}^2}. \quad (10)$$

Формулы (9), (10) используются далее для вычисления модуля КИН по результатам численного решения задачи посредством МГЭ.

3. Граничные интегральные уравнения для кусочно-однородных областей

Для численного анализа напряженного состояния областей с трещинами используем прямой метод граничных интегральных уравнений [29]. Представим конструкцию в виде набора однородных подобластей с трещинами, расположенными на границах раздела между подобластями. Такой подход позволяет рассматривать трещины в однородных телах при несимметричном нагружении [30], а также трещины на границе раздела материалов.

При отсутствии массовых сил для каждой однородной подобласти конструкции граничное интегральное уравнение (ГИУ) имеет вид [29]:

$$c_{ij}(p)u_i(p) = \int_{\Gamma} [G_{ij}(q,p)t_i(q) - F_{ij}(q,p)u_i(q)]d\Gamma(q) \quad (i, j = 1, 2), \quad (11)$$

где точки p и q принадлежат границе подобласти Γ ; $G_{ij}(q,p)$ и $F_{ij}(q,p)$ — фундаментальные решения Кельвина для задачи упругости; $u_i(q)$, $t_i(q)$ — перемещения и усилия на границе подобласти; $c_{ij}(p)$ — функции, зависящие от локальной геометрии в точке p (для гладкой границы $c_{ij}(p) = 0,5\delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера).

На участках идеального контакта подобластей выполняются условия непрерывности для перемещений и равновесия — для усилий:

$$u_i^k(q) = u_i^f(q), \quad t_i^k(q) = -t_i^f(q). \quad (12)$$

Здесь k и f — номера соседних подобластей.

На участках границ подобластей, содержащих трещины со свободными от связей берегами, перемещения в каждой подобласти рассматриваются как независимые переменные. Дополнительные условия (заменяющие условия (12)) вводятся при наличии связей между берегами в концевой области трещины (обобщенный закон деформирования связей):

$$t_i(q) = \kappa_i(q, \sigma) \Delta u_i(q), \quad \Delta u_i(q) = u_i^k - u_i^f, \quad \kappa_i(q, \sigma) = \gamma_i(q, \sigma)(E_b/H). \quad (13)$$

Здесь: $i = 1, 2$ соответствует касательному и нормальному к плоскости трещины направлениям (двумерная задача); полагается, что система координат определяется в подобласти с меньшим номером M так, что $M = \min(f, k)$; $t_i(q)$ и $\Delta u_i(q)$ — компоненты вектора усилий и раскрытия трещины в локальной системе координат; $\kappa_i(q, \sigma)$ — жесткость связей, зависящая от положения точки q вдоль концевой области трещины и натяжения связей; $\gamma_i = \phi_i^{-1}$ — безразмерные функции (см. выражение (4)). Заметим, что при решении трехмерных задач к уравнениям (13) добавляется еще одно уравнение — уравнение для тангенциальной компоненты усилий в связях.

Для численного решения ГИУ в двумерной задаче используем трехузловые изопараметрические квадратичные граничные элементы и специальные граничные элементы вблизи вершины трещины, учитывающие асимптотическое поведение переменных (перемещений и поверхностных усилий).

Сингулярное поведение фундаментальных решений ГИУ (11) учитываем при дискретизации задачи. Фундаментальное решение для перемещений $G_{ij}(q,p)$ в двумерной задаче содержит слабую логарифмическую особенность, и интегралы в дискретном представлении ГИУ, включающие эту функцию, вычисляются по квадратурной формуле с логарифмической весовой функцией. Фундаментальное решение для поверхностных усилий $F_{ij}(q,p)$ является сильно сингулярным, и вычисление суммы соответствующих интегралов и параметров $c_{ij}(p)$ выполняется косвенным путем, исходя из рассмотрения смещения тела как жесткого целого (см. описание алгоритма численного интегрирования в [31]).

В каждой точке границы подобласти, не контактирующей с другими подобластями, имеется $2m$ переменных — m перемещений и m поверхностных усилий ($m = 2$ и 3 для двумерной и пространственной задач соответственно). В корректно поставленной задаче m переменных определяется из граничных условий, и решение ГИУ (11) позволяет найти остальные m неизвестных задачи. В каждой узловой точке на участках соединения двух подобластей имеем $4m$ переменных, из которых $2m$ могут быть найдены из решения ГИУ, а остальные $2m$ исключаются условиями непрерывности и равновесия (12) при идеальном контакте подобластей или путем использования закона деформирования связей (13) и условия равновесия — для участков со связями между подобластями. В последнем случае для трещин со связями, расположенных на границе подобластей, в качестве неизвестных при решении ГИУ выбираем перемещения берегов трещины. Дискретизация границ всех подобластей задачи, учет граничных условий и дополнительных условий (12), (13) позволяет получить систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных задачи в узлах дискретной модели. Усилия в связях вычисляются исходя из соотношений (13) после определения неизвестных перемещений в узловых точках на берегах трещины.

4. Моделирование асимптотических распределений вблизи трещины и вычисление КИН

Моделирование асимптотики перемещений вблизи вершины трещины при использовании изопараметрических элементов (для которых функции формы для описания переменных задачи и геометрии поверхности тела одинаковы) выполняется посредством расположения промежуточного узла квадратичного изопараметрического элемента, примыкающего к вершине трещины, на расстоянии от вершины трещины, равном $0,25$ длины этого элемента. Такой способ представления асимптотики перемещений вблизи вершины трещины предложен и первоначально использован в методе конечных элементов и распространен на задачи, решаемые МГЭ с учетом того, что перемещения и поверхностные усилия моделируются в МГЭ независимо [30, 32]. В данной работе изопараметрические граничные элементы со смещенным промежуточным узлом используются для моделирования асимптотик перемещений и поверхностных усилий для трещин со связями на границе раздела материалов.

В локальной системе координат с началом в вершине трещины и осью ρ , направленной вдоль граничных элементов, расположенных или на берегах трещины ($\theta = \pm\pi$) в зоне связей, или за вершиной трещины на границе раздела подобластей ($\theta = 0$) и примыкающих к вершине, можно записать:

$$\rho(\xi) = N_k(\xi)\rho_k, \quad \rho_1 = 0, \quad \rho_2 = 0,25L, \quad \rho_3 = L, \quad (14)$$

где ξ — параметрическая координата вдоль элемента, $|\xi| \leq 1$; $\rho_{1,2,3}$ — координаты узлов этого элемента, $\rho = 0$ соответствует положению вершины трещины; L — длина граничного элемента, примыкающего к вершине трещины (длины граничных элементов при $\theta = \pm\pi$ и $\theta = 0$ полагаем одинаковыми); N_k — функции формы трехузлового квадратичного элемента:

$$N_1(\xi) = -0,5\xi(1-\xi), \quad N_2(\xi) = 1-\xi^2, \quad N_3(\xi) = 0,5\xi(1+\xi). \quad (15)$$

Подставляя (15) в (14), получаем зависимость локальной координаты вдоль элемента от параметра ρ :

$$\xi(\rho) = -1 + 2\sqrt{\rho/L}. \quad (16)$$

Распределения перемещений и поверхностных усилий на изопараметрическом граничном элементе описываются выражениями, аналогичными (14):

$$u_i(\xi) = N_k(\xi)u_{ik}, \quad t_i(\xi) = N_k(\xi)t_{ik} \quad (i = 1, 2; k = 1, 2, 3). \quad (17)$$

С помощью (16) и первой формулы из (17) находим распределение перемещений на граничном элементе, примыкающем к вершине трещины, с учетом корневой асимптотики

$$u_i(\rho) = A_{1i} + A_{2i}\sqrt{\rho} + A_{3i}\rho \quad (i = 1, 2), \quad (18)$$

где коэффициенты A_{ki} являются функциями узловых перемещений и длины граничного элемента. При дискретизации поверхностей трещины в концевой области ($\theta = \pm\pi$) выполняется сдвиг

промежуточных узлов на квадратичных элементах, примыкающих к вершине трещины, что соответствует внесению в дискретную модель асимптотического представления (18).

Выражение, аналогичное (18), справедливо также и для описания поверхностных усилий на граничном элементе, расположенном за вершиной трещины на границе раздела подобластей, что отличается от известного асимптотического распределения напряжений на продолжении трещины вблизи ее вершины $t_i \sim \rho^{-0.5}$. Для внесения этой асимптотики в соотношения для описания усилий на граничном элементе при $\theta = 0$ умножаем правую часть уравнения для усилий, аналогичного (18), на специальный множитель (полагаем, что вершина трещины расположена в узле с параметрической координатой $\xi_1 = -1$)

$$\sqrt{L/\rho} = 2/(1 + \xi). \quad (19)$$

Тогда вторая формула в (17) принимает вид

$$t_i(\rho) = B_{1i}/\sqrt{\rho} + B_{2i} + B_{3i}\sqrt{\rho} \quad (i = 1, 2), \quad (20)$$

где коэффициенты B_{ki} зависят от значений узловых усилий и длины граничного элемента.

Преобразование для моделирования асимптотики поверхностных усилий (19), (20) эквивалентно использованию при описании поверхностных усилий на элементе, примыкающем к вершине трещины на границе раздела подобластей, модифицированных функций формы:

$$N_k^{(i)}(\xi) = 2N_k(\xi)/(1 + \xi\eta) \quad (k = 1, 2, 3), \quad (21)$$

где значение параметра η в знаменателе зависит от ориентации элемента относительно вершины трещины ($\eta = 1$, если вершина трещины располагается в узле с параметрической координатой $\xi_1 = -1$, и $\eta = -1$ — при $\xi_3 = +1$).

Отметим, что осциллирующие множители, присутствующие в асимптотических выражениях (5) и (7), не включены в представления для перемещений и усилий на специальных граничных элементах в вершине трещины, так как модуль КИН не зависит от этих параметров.

Модуль КИН на границе раздела материалов может быть найден по значениям раскрытия трещины в промежуточном узле квадратичного граничного элемента, примыкающего к вершине трещины. Полагая в (9) $\rho = 0,25L$, получаем

$$K_u(0,25L) = \left(4 \operatorname{ch}(\pi\beta) \sqrt{1 + 4\beta^2/A}\right) \sqrt{2\pi(\Delta u_x^2 + \Delta u_y^2)}/L, \quad (22)$$

где $\Delta u_{x,y}$ — компоненты раскрытия трещины в промежуточном узле элемента. По предложенной в [32] терминологии, (22) — это одноточечная формула для вычисления модуля КИН на основе перемещений.

Другое выражение модуля КИН на границе раздела материалов имеем в результате линейной экстраполяции в вершину трещины ($\rho = 0$) значений модуля КИН, вычисленных в промежуточном узле элемента ($\rho = 0,25L$) и на краю элемента ($\rho = L$):

$$K_u|_{\rho=0} = [4K_u(0,25L) - K_u(L)]/3, \quad (23)$$

где $K_u(L)$ определяется из выражения (9) при $\rho = L$.

При использовании за вершиной трещины на границе раздела подобластей специальных граничных элементов с учетом асимптотики напряжений модуль КИН также можно вычислить по значениям усилий на элементе, примыкающем к вершине трещины [32]. Из (19) и (21) следует, что усилия на таком элементе определяются как

$$t_i = N_k(\xi) t_{ik} \sqrt{L/\rho} \quad (i = 1, 2; \quad k = 1, 2, 3). \quad (24)$$

Аналогично можно записать и модуль вектора усилий (см. (10)):

$$K_\sigma = \lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{L/\rho} \sqrt{2\pi\rho} \sqrt{t_x^2 + t_y^2}, \quad (25)$$

откуда следует выражение для модуля КИН, вычисленного по значениям усилий в вершине трещины

$$K_t = \sqrt{2\pi L} \sqrt{t_x^2 + t_y^2}, \quad (26)$$

где $t_{x,y}$ — значения усилий в вершине трещины, полученные после решения задачи с учетом модификации (21) функций формы для поверхностных усилий.

Так же, как и при получении модуля КИН по перемещениям, можно вычислить модуль КИН по усилиям путем экстраполяции в вершину трещины:

$$K_t|_{\rho=0} = [4K_t(0, 25L) - K_t(L)] / 3. \quad (27)$$

Здесь $K_t(0, 25L)$ и $K_t(L)$ определяются из (10) при $\rho = 0, 25L$ и $\rho = L$ соответственно:

$$K_t(0, 25L) = 0,5\sqrt{2\pi L} \sqrt{\sigma_{xy,2}^2 + \sigma_{yy,2}^2}, \quad K_t(L) = \sqrt{2\pi L} \sqrt{\sigma_{xy,3}^2 + \sigma_{yy,3}^2}, \quad (28)$$

где $\sigma_{xy,2}, \sigma_{yy,2}$ и $\sigma_{xy,3}, \sigma_{yy,3}$ — компоненты напряжений во втором и третьем от вершины трещины узлах граничного элемента, примыкающего к вершине трещины. Переходя к поверхностным усилиям в узлах элемента, получаем

$$K_t(0, 25L) = 0,5T_2\sqrt{2\pi L}, \quad K_t(L) = T_3\sqrt{2\pi L}, \quad (29)$$

где $T_{2,3}$ — модули векторов усилий, вычисленные во втором и третьем от вершины трещины узлах граничного элемента.

Из выражения (24), записанного для второго узла элемента ($\xi = 0, N_1 = N_3 = 0, N_2 = 1, \rho = 0, 25L$), следует, что значение поверхностного усилия в этом узле t_i равно удвоенной величине узлового значения $t_{i,2}$, получаемого в результате численного решения. Для второго и третьего узлов элемента с учетом этого запишем ($i = 1, 2 \equiv x, y$):

$$t_i = 2t_{i,2}, \quad T_2 = \sqrt{t_x^2 + t_y^2} = 2\sqrt{t_{x,2}^2 + t_{y,2}^2}, \quad T_3 = \sqrt{t_{x,3}^2 + t_{y,3}^2}. \quad (30)$$

В итоге формула (27) для определения модуля КИН принимает вид

$$K_t|_{\rho=0} = \sqrt{2\pi L} (4T_2 - T_3) / 3. \quad (31)$$

Далее формулы для расчета модуля КИН по перемещениям (22) и (23) будем называть одноточечной (ОПФ) и двухточечной (ДПФ) формулой, а аналогичные одноточечные и двухточечные формулы при вычислениях модуля КИН по усилиям (26) и (31), соответственно, — ОУФ и ДУФ.

5. Численные результаты

Алгоритм численного решения системы ГИУ (11) для кусочно-однородного тела с учетом дополнительных условий (12) и (13) на стыках подобластей включен в разработанный ранее программный комплекс, предназначенный для решения двумерных, пространственных и осесимметричных задач упругости и термоупругости [31].

Оценка достоверности и точности результатов, получаемых на основе численного алгоритма, возможна путем их сравнения с известными аналитическими, численными и/или экспериментальными результатами. Для трещин со связями в концевой области, находящимся на границе раздела материалов, при учете зависимости напряжений в связях от раскрытия трещины как аналитические решения, так и экспериментальные результаты отсутствуют. Ввиду этого, выполнено сопоставление численных результатов, полученных ранее методом сингулярных интегро-дифференциальных уравнений (СИДУ) для трещины со связями, расположенной на границе раздела двух полуплоскостей из различных материалов, и результатов решения аналогичной задачи МГЭ. Неизвестными при использовании метода СИДУ являются

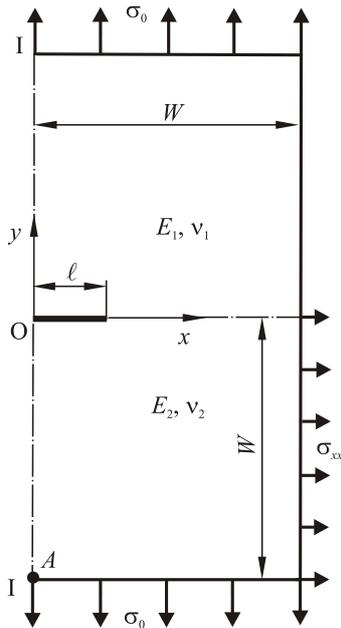


Рис. 2. Составная пластина с трещиной между подобластями; расчетная область с учетом симметрии задачи

функции, определяющие раскрытие трещины и напряжения в связях в концевой области трещины. При численном решении методом СИДУ дискретизация производится только вдоль концевой области трещины [11–14].

Для сравнения результатов, полученных методом СИДУ и МГЭ, решена задача об одноосном растяжении плоскости с центральной прямолинейной трещиной, расположенной на границе раздела полуплоскостей из различных материалов. При применении МГЭ рассматривалась квадратная пластина, состоящая из двух подобластей (Рис. 2). Для сравнения с решением методом СИДУ (для бесконечной пластины) при расчете принимались размеры модели: $W/\ell = 10$, где W — половина ширины составной пластины. Ввиду симметрии моделировалась только 1/2 часть пластины. Внешняя растягивающая нагрузка $\sigma_0 = \sigma_{0y}$ в направлении оси Oy прикладывалась на участках $0 \leq x \leq W$, $y = \pm W$. На линии I-I, ввиду симметрии задачи, нормальная составляющая перемещений и касательная составляющая усилий равны нулю. Для исключения движения тела как жесткого целого в точке A (Рис. 2) полагалось равным нулю перемещение в направлении оси Oy . Выполнение условий совместности деформаций на границе раздела материалов достигалось путём приложения дополнительных напряжений в направлении оси Ox (плоская деформация) [33]:

$$(\sigma_{xx}^\infty)_2 = \frac{E_2}{E_1} \left[\frac{1-\nu_1^2}{1-\nu_2^2} \right] (\sigma_{xx}^\infty)_1 + \left[\frac{\nu_2}{1-\nu_2} - \frac{E_2 \nu_1 (1+\nu_1)}{E_1 (1-\nu_2^2)} \right] \sigma_0. \quad (32)$$

В расчетах принималось, что $(\sigma_{xx}^\infty)_1 = 0$. Напряжение $(\sigma_{xx}^\infty)_2$ прикладывалось на границе второй подобласти при $x = W$, $0 \leq y \leq -W$ (см. Рис. 2)

Сопоставление результатов расчетов методом СИДУ и МГЭ проведено для состояния плоской деформации при коэффициентах Пуассона материалов подобластей $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ и модуле упругости связей $E_b = E_2$. Закон деформации связей принимался в форме (13) в предположении, что жесткости связей по направлениям осей координат одинаковы и $\gamma_{1,2} \equiv 1$. Для удобства сопоставления результатов относительная жесткость связей κ_0 определялась выражением

$$\kappa_0 = \kappa_{1,2}(q, \sigma) (E_2/\ell)^{-1} = E_b \ell / (E_2 H), \quad \kappa_{1,2}(q, \sigma) = E_b / H. \quad (33)$$

Здесь $\kappa_{1,2}(q, \sigma)$ — жесткости связей в концевой области трещины, одинаковые в нормальном и касательном направлениях и постоянные вдоль концевой области.

Расчеты выполнены при различных значениях относительной длины концевой области трещины d/ℓ , отношения модулей упругости материалов E_1/E_2 и относительной жесткости связей κ_0 . Так как полагалось, что $E_b = E_2$, то изменение параметра κ_0 осуществлялось (при заданной длине трещины) посредством изменения параметра H (см. (33)). При разбиении границы каждой подобласти число узлов изменялось от 80 до 100, (на линии трещины выбиралось по 40 узловых точек в каждой подобласти).

На рисунке 3 показаны касательная и нормальная составляющие раскрытия трещины, полученные методом СИДУ и МГЭ для различных размеров концевой области трещины ($E_1/E_2 = 5$; $(\sigma_{xx}^\infty)_2 \approx 0,343\sigma_0$; $\kappa_0 = 10$). Компоненты раскрытия трещины нормированы величиной раскрытия в центре трещины без связей, расположенной на границе раздела материалов: $u_0 = A \operatorname{ch}(\pi\beta) \sigma_0 \ell$. Результаты расчетов, которые дают оба

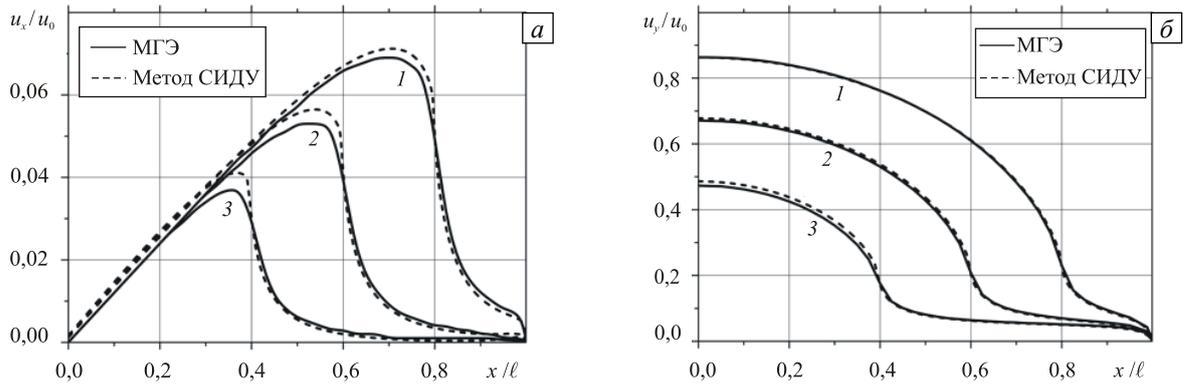


Рис. 3. Касательная (а) и нормальная (б) составляющие раскрытия трещины со связями в концевой области при различных значениях относительной длины концевой области трещины d/ℓ : 0,2 (кривые 1); 0,4 (2); 0,6 (3)

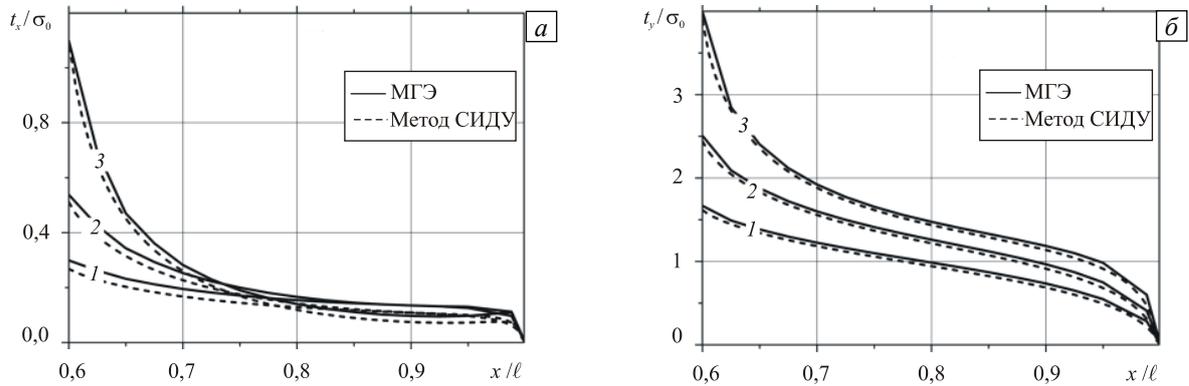


Рис. 4. Касательные (а) и нормальные (б) усилия в связях вдоль концевой области трещины при $d/\ell=0,4$, $E_1/E_2=50$ и различных значениях относительной жесткости связей κ_0 : 2 (кривые 1); 4 (2); 10 (3)

метода, практически совпадают. Незначительное отличие наблюдается для касательной составляющей раскрытия трещины. Это связано с тем, что максимальные значения нормальной и касательной составляющих раскрытия трещины отличаются почти на порядок, и погрешность при расчете малых величин в МГЭ возрастает. Отметим также, что компоненты раскрытия вдоль всей длины трещины при использовании МГЭ получаются непосредственно из решения ГИУ, тогда как при решении задачи на основе СИДУ для определения раскрытия трещины вне концевой области требуются дополнительные вычисления [12, 14].

Распределения вдоль концевой области трещины касательных и нормальных усилий в связях при различных значениях относительной жесткости связей κ_0 , $d/\ell=0,4$, $E_1/E_2=50$ и $(\sigma_{xx}^\infty)_2 \approx 0,420\sigma_0$ приведены на рисунке 4, из которого видно хорошее соответствие результатов расчетов двумя методами. При возрастании жесткости связей компоненты напряжений в связях также увеличиваются. Площади под кривыми на рисунке пропорциональны КИН от действия связей в концевой области трещины $K_{\text{нб}}$ и $K_{\text{тб}}$

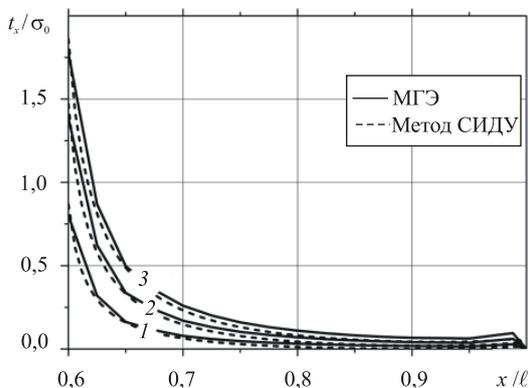


Рис. 5. Касательные усилия в связях при $\kappa_0=20$, $d/\ell=0,4$ и различных значениях отношения модулей упругости материалов E_1/E_2 : 2 (кривые 1); 5 (2); 50 (3)

[11, 12]. Изменение соотношения между модулями упругости материалов подобластей не приводит к заметному изменению нормальных усилий в связях, но сдвиговые усилия существенно зависят от этого параметра (Рис. 5).

Рассмотрим результаты вычисления модуля КИН для трещины со связями на границе раздела материалов. Все расчеты на основе МГЭ выполнены при выборе размера элемента, примыкающего к вершине трещины, равным $L=0,05\ell$. На рисунке 6, а приведены зависимости модуля КИН от относительной длины концевой области трещины, найденные по одноточечной (26) и двухточечной (31) формулам, использующим значения поверхностных усилий на продолжении трещины. В этом случае (для связей сравнительно большой жесткости, $\kappa_0=10$) различие между

результатами, полученными методом СИДУ и МГЭ, нарастает с увеличением длины концевой области, что связано с принципиально разными способами, применяемыми для определения модуля КИН [11, 12]. Так как для трещины, целиком заполненной связями, различие результатов на основе метода СИДУ и МГЭ проявляется наиболее сильно, то именно этот вариант заполнения концевой области трещины и был выбран для анализа зависимости модуля КИН от относительной жесткости связей. На рисунке 6, а, б представлены результаты расчета модуля КИН по перемещениям, а на рисунке 6, в — по усилиям. Различие между результатами, найденными с помощью МГЭ и метода СИДУ, нарастает с увеличением жесткости связей. Значения КИН, наиболее близкие к результатам метода СИДУ (если последние полагать как «точные»), дает расчет по формуле линейной экстраполяции усилий (31) (см. кривую МГЭ ДУФ).

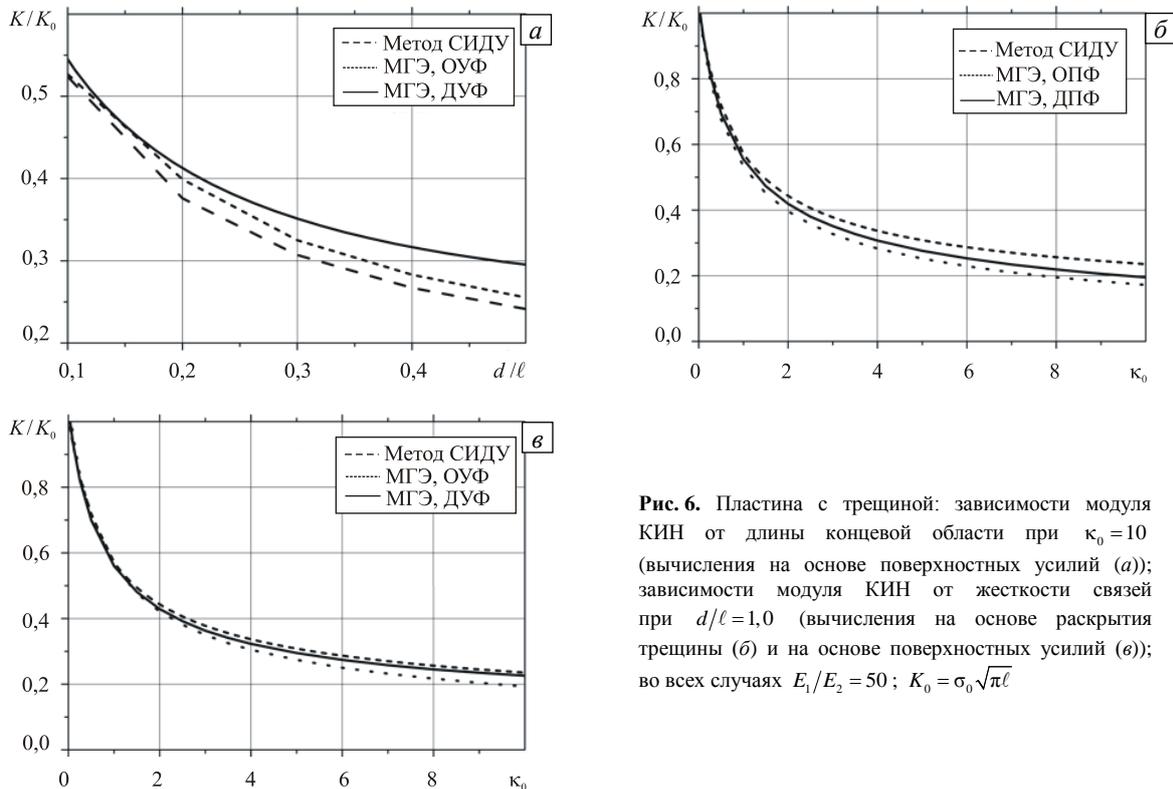


Рис. 6. Пластина с трещиной: зависимости модуля КИН от длины концевой области при $\kappa_0 = 10$ (вычисления на основе поверхностных усилий (а)); зависимости модуля КИН от жесткости связей при $d/l = 1,0$ (вычисления на основе раскрытия трещины (б) и на основе поверхностных усилий (в)); во всех случаях $E_1/E_2 = 50$; $K_0 = \sigma_0 \sqrt{\pi \ell}$

В заключение приведем результаты расчета КИН для трещины в пластине с цилиндрическим включением (волоком) при одноосном растяжении (Рис. 7). Полагаем, что между включением и пластиной (матрицей) существует зона ослабленных адгезионных связей в форме дуги окружности, которая в рамках расчетной схемы МГЭ рассматривается как трещина, целиком заполненная связями и расположенная симметрично относительно направления приложения растягивающей нагрузки. Задаче с дуговой трещиной на границе между включением и матрицей без учета связей в концевой области трещины посвящен ряд работ [34–37]. Решения аналогичной задачи с учётом взаимодействия берегов трещины в литературе отсутствуют.

Ввиду симметрии задачи при численном решении МГЭ расчёт выполняется для половины квадратной пластины ($W/R = 10$) с трещиной в форме дуги окружности ($\varphi_0 = 30^\circ$); пластина находится в состоянии плоской деформации. Вершине трещины соответствует точка B . Граничные условия в задаче аналогичны условиям для составной пластины с трещиной — вдоль линии I–I равняются нулю нормальные перемещения и касательные усилия. Для исключения движения тела как жесткого целого в точке P задается равным нулю перемещение в направлении оси Oy .

Зависимости модуля КИН от относительной жесткости связей, полученные при различных значениях модуля упругости включения и нормированные величиной КИН для трещины полудлиной $\ell = R \sin \varphi_0$ ($K_0 = \sigma_0 \sqrt{\pi R \sin \varphi_0}$), приведены на рисунке 8. Модуль КИН вычислялся по формуле (26). Случай $\kappa_0 = 0$ соответствует трещине с берегами, свободными от нагрузки. При возрастании относительной жесткости включения E_1/E_2 модуль КИН также увеличивается, и влияние жесткости связей на его величину проявляется сильнее. Задача для трещины со связями в концевой области на границе раздела цилиндрического включения и матрицы, будучи многопараметрической, является предметом отдельного исследования.

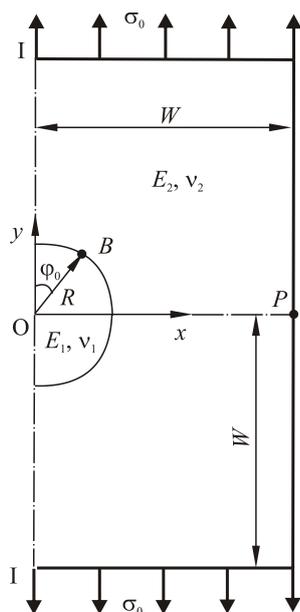


Рис. 7. Пластина с трещиной на границе раздела матрицы и включения с учетом симметрии задачи $W/R=10$, $\varphi_0=30^\circ$

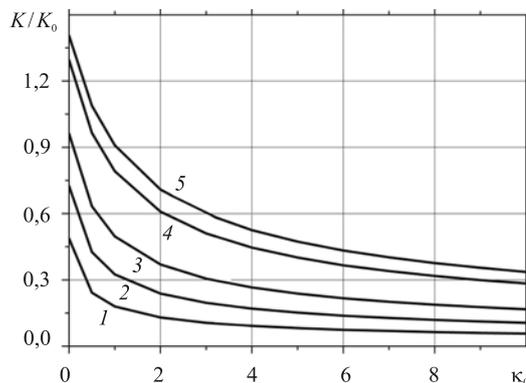


Рис. 8. Трещина на границе раздела включения и матрицы; зависимости модуля КИН от относительной жесткости связей κ_0 для различных значений отношения параметров материалов E_1/E_2 : 0,25 (кривая 1); 0,5 (2); 1,0 (3); 5,0 (4); $E_1/E_2=100$ (5) (вычисления на основе поверхностных усилий); $K_0 = \sigma_0 \sqrt{\pi R \sin \varphi_0}$

6. Заключение

В работе показана эффективность применения МГЭ для анализа напряженного состояния и определения модуля КИН при использовании модели трещины, расположенной на границе раздела материалов, со связями в концевой области. Выполнена сравнительная оценка точности результатов, полученных методом СИДУ и МГЭ. Хорошее соответствие результатов расчетов, полученных по двум принципиально различным методикам, подтверждает достоверность решений задач для трещин со связями в концевой области методом граничных интегральных уравнений, а также применимость локальных методов вычисления модуля КИН в задачах для трещин со связями в концевой области.

Разработанный комплекс программ на базе МГЭ может быть использован для решения широкого круга научных и прикладных задач с трещинами как при механической нагрузке, так и при стационарном и нестационарном тепловом нагружении [38]. Анализ напряженного состояния и вычисление КИН являются важнейшей частью процесса моделирования роста трещин, который может быть выполнен с использованием нелокального критерия роста трещин со связями в концевой области [11–13].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-08-01243).

Литература

1. Баренблатт Г.И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении // ПММ. – 1959. – Т. 23, Вып. 3. – С. 434-444; Вып. 4. – С. 706-721; Вып. 5. – С. 893-900.
2. Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. Phys. Solids. – 1960. – V. 8, N. 2. – P. 100-104. DOI
3. Леонов М.Я., Панасюк В.В. Развитие мельчайших трещин в твердом теле // Прикладная механика. – 1959. – Т. 5, № 4. – С. 391-401.
4. Nemat-Nasser S., Nori M. Toughening by partial or full bridging of cracks in ceramics and fiber reinforced composites // Mech. Mater. – 1987. – V. 6, N. 3. – P. 245-269. DOI
5. Bao G., Suo Z. Remarks on crack-bridging concepts // Appl. Mech. Rev. – 1992. – V. 45, N. 8. – P. 355-366. DOI
6. Cox B.N., Marshall D.B. Concepts for bridged cracks in fracture and fatigue // Acta Metall. Mater. – 1994. – V. 42, N. 2. – P. 341-363. DOI
7. Weitsman Y. Nonlinear analysis of crazes // J. Appl. Mech. – 1986. – V. 53, N. 1. – P. 97-102. DOI
8. Rose L.R.F. Crack reinforcement by distributed springs // J. Mech. Phys. Solids. – 1987. – V. 35, N. 4. – P. 383-405. DOI
9. Budiansky B., Cui Y.L. On the tensile strength of a fiber-reinforced ceramic composite containing a crack-like flaw // J. Mech. Phys. Solids. – 1994. – V. 42, N. 1. – P. 1-19. DOI
10. Греков М.А., Морозов Н.Ф. О равновесных трещинах в композитах, армированных однонаправленными волокнами // ПММ. – 2006. – Т. 70, № 6. – С. 1054-1066.

11. Goldstein R.V., Perelmuter M.N. Modeling of bonding at an interface crack // *Int. J. Fracture*. – 1999. – V. 99, N. 1-2. – P. 53-79. DOI
12. Гольдштейн Р.В., Перельмутер М.Н. Трещина на границе соединения материалов со связями между берегами // *МТТ*. – 2001. – № 1. – С. 94-112.
13. Гольдштейн Р.В., Перельмутер М.Н., Моделирование трещиностойкости композиционных материалов // *Вычисл. мех. сплош. сред*. – 2009. – Т. 2, № 2. – С. 22-39. DOI
14. Перельмутер М.Н. Трещина на границе раздела материалов с нелинейными связями в концевой области // *ПММ* – 2011. – Т. 75, № 1. – С. 152-173.
15. Бакиров В.Ф., Гольдштейн Р.В. Модель Леонова-Панасюка-Дагдейла для трещины на границе соединения материалов // *ПММ*. – 2004. – Т. 68, № 1. – С. 170-179.
16. Lee K.Y., Choi H.J. Boundary element analysis of stress intensity factors for bimaterial interface cracks // *Eng. Fract. Mech.* – 1988. – V. 29, N. 4. – P. 461-472. DOI
17. Yuuki R., Cho S.-B. Efficient boundary element analysis of stress intensity factors for interface cracks in dissimilar materials // *Eng. Fract. Mech.* – 1989. – V. 34, N. 1. – P. 179-188. DOI
18. Tan C.L., Gao Y.L. Treatment of bimaterial interface crack problems using the boundary element method // *Eng. Fract. Mech.* – 1990. – V. 36, N. 6. – P. 919-932. DOI
19. Raveendra S.T., Banerjee P.K. Computation of stress intensity factors for interfacial cracks // *Eng. Fract. Mech.* – 1991. – V. 40, N. 1. – P. 89-103. DOI
20. Dong Y., Wang Z., Wang B. On the computation of stress intensity factors for interfacial cracks using quarter-point boundary elements // *Eng. Fract. Mech.* – 1997. – V. 57, N. 4. – P. 335-342. DOI
21. Ikeda T., Sun C.T. Stress intensity factor analysis for an interface crack between dissimilar isotropic materials under thermal stress // *Int. J. Fracture*. – 2001. – V. 111, N. 3. – P. 229-249. DOI
22. Hadjesfandiari A.R., Dargush G.F. Analysis of bi-material interface cracks with complex weighting functions and non-standard quadrature // *Int. J. Solids Struct.* – 2011. – V. 48, N. 10. – P. 1499-1512. DOI
23. Liu Y.-F., Masuda C., Yuuki R. An efficient BEM to calculate weight functions and its application to bridging analysis in an orthotropic medium // *Comput. Mech.* – 1998. – V. 22, N. 5. – P. 418-424. DOI
24. Rauchs G., Thomason P.F., Withers P.J. Finite element modeling of frictional bridging during fatigue crack growth in fibre-reinforced metal matrix composites // *Comp. Mater. Sci.* – 2002. – V. 25, N. 1-2. – P. 166-173. DOI
25. Cudzilo B.E., Tan C.L. Numerical fracture mechanics analysis of cracked fibre-metal laminates with cut-outs // *Electronic Journal of Boundary Elements*. – 2003. – V. 1, N. 3. – P. 336-403.
26. Selvadurai A.P.S. Crack-bridging in a unidirectionally fibre-reinforced plate // *J. Eng. Math.* – 2010. – V. 68, N. 1. – P. 5-14. DOI
27. Салганик Р.Л. О хрупком разрушении склеенных тел // *ПММ*. – 1963. – Т. 27, № 5. – С. 957-962.
28. Rice J.R. Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks // *J. Appl. Mech.* – 1988. – V. 55. – P. 98-103. DOI
29. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
30. Balanford G.E., Ingraffea A.R., Liggett J.A. Two-dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* – 1981. – V. 17, N. 3. – P. 387-404. DOI
31. Перельмутер М.Н. Применение метода граничных элементов при исследовании пространственного напряженного состояния составных конструкций // *Проблемы прочности и динамики в авиадвигателестроении: Сб.* – 1989. – Вып. 4. – Тр. ЦИАМ № 1237. – С. 74-99.
32. Martinez J., Dominguez J. On the use of quarter-point boundary elements for stress intensity factor computations // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* – 1984. – V. 20, N. 10. – P. 1941-1950. DOI
33. Rice J.R., Sih G.C. Plane problems of cracks in dissimilar media // *J. Appl. Mech.* – 1965. – V. 32, N. 2. – P. 418-423. DOI
34. Черепанов Г.П. О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами // *Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение*. – 1962. – № 1. – С. 131-137.
35. England A.H. An arc crack around a circular elastic inclusion // *J. Appl. Mech.* – 1966. – V. 33, N. 3. – P. 637-640. DOI
36. Perlman A.B., Sih G.C. Elastostatic problems of curvilinear cracks in bonded dissimilar materials // *Int. J. Eng. Sci.* – 1967. – V. 5, N. 11. – P. 845-867. DOI
37. Toya M. Crack along interface of a circular inclusion embedded in an infinite solid // *J. Mech. Phys. Solids*. – 1974. – V. 22, N. 5. – P. 325-348. DOI
38. Perelmuter M. Bridged interface cracks under transient thermal loading // *PAMM*. – 2007. – V. 7, N. 1. – P. 4030033-4030034. DOI

Поступила в редакцию 17.05.12; опубликована в электронном виде 28.12.12