

DOI: [10.7242/1999-6691/2012.5.4.47](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2012.5.4.47)
УДК 534.1; 534.26

ЛОКАЛЬНЫЕ ПОТОКИ ЭНЕРГИИ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ТОНКОЙ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ

Д.П. Коузов, Н.А. Миролюбова

Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия

Рассматриваются вынужденные колебания тонкой упругой полосы в результате действия сосредоточенного источника. Вибрационный процесс описывается уравнениями тонкой пластины. Получено как интегральное представление, так и разложение по нормальным волнам для поля смещений. Показано, что наличие обратной волны существенно меняет характер поведения потока энергии.

Ключевые слова: тонкая упругая пластина, упругая полоса, продольные и сдвиговые колебания, вектор потока энергии

LOCAL ENERGY FLUXES OF FORCED VIBRATIONS OF A THIN ELASTIC BAND

D.P. Kouzov and N.A. Mirolubova

Institute for Problems in Mechanical Engineering, Saint-Petersburg, Russia

The forced vibrations of a thin elastic band excited by a point source have been considered. The vibration processes are described by the equations of thin plate theory. An integral representation of the displacement field is derived. A normal wave expansion of the displacement field is carried out. It is shown that the inverse wave exerts a strong influence on the character of the energy flux behavior.

Key words: thin elastic plate, elastic band, longitudinal and shear vibrations, energy-flux vector

1. Введение

При описании процесса распространения волн в тонких конструкциях важной физической величиной является энергия. Характер поведения потоков энергии в некоторых случаях может полнее отражать особенности формирования вибрационного процесса, чем другие физические величины. Это обстоятельство вызвало в последнее время значительный интерес к изучению каналов распространения энергии в колеблющихся объектах. Назовём для иллюстрации лишь некоторые последние публикации [1–4]. Упомянем также работу [5], авторы которой рассмотрели плотности потоков энергии поверхностных волн Релея в многослойной среде, включающей «медленный» слой, и исследовали процесс затухания волн и поведение энергии в зависимости от приближения или удаления от «медленного» слоя.

Как известно [6–14], в тонких слоях и пластинах существует особый тип волн, у которых фазовая и групповая скорости противоположны. Такие волны принято называть обратными. В названных работах для ряда конкретных моделей проведено исследование условий, при которых такие волны существуют и, в частности, показано, что в упругих волноводах возможны как поперечные, так и продольные обратные волны. При этом возникновение поперечных обратных волн в пьезокристаллах связывается с взаимодействием упругого и электромагнитного полей. В изолированных изотропных пластинах, о которых пойдет речь в настоящей статье, возможны только продольные обратные волны.

Поскольку групповая скорость отвечает за перенос энергии колебаний, то при образовании обратных волн в поведении потоков энергии возможно появление необычных эффектов. Одной из немногих работ, посвященных потокам энергии колебаний в средах, где наблюдаются обратные волны, является статья [15], в которой рассматриваются глобальные потоки энергии поперечных волн в пьезокристаллах.

Изучение локальных потоков энергии обратных волн в упругих тонких пластинах (зависимость плотностей потоков энергии от поперечной координаты слоя), по-видимому, впервые проведено в [16]. В этой работе для нормальной волны в упругой полосе обнаружены локальные потоки энергии встречного направления, причём это явление, характерное для обратной волны, может иметь место и в обычной нормальной волне.

В работе [17] показано, что при распространении нормальной волны в составной конструкции (балки крестового сечения) возможно также встречное распространение глобальных потоков энергии по различным элементам конструкции.

Настоящая работа продолжает исследование локальных потоков энергии, начатое в [16], и нацелена на изучение структуры потоков энергии, возбуждаемых в упругом волноводе сосредоточенным источником (в том числе на частотах существования обратных волн). Потоки энергии, как и в [16], изучаются на примере упругой полосы (продольно колеблющейся бесконечной пластины постоянной ширины) — простейшей механической модели, в которой возможны обратные волны. Показано,

что на частоте возникновения обратной волны происходит принципиальная перестройка поля вектора потока энергии.

Заметим, что формальной заменой коэффициентов $E \rightarrow E/(1-\sigma^2)$, $\sigma \rightarrow \sigma/(1-\sigma)$ уравнения колебаний упругой полосы переводятся в уравнения плоской теории упругости. Таким образом, все аналитические зависимости сохраняют силу и для плоских колебаний упругого слоя постоянной толщины.

2. Постановка задачи о вынужденных колебаниях упругой полосы

Введем в рассмотрение упругую полосу (бесконечно протяжённую пластину постоянной ширины $2a$, малой толщины h , боковые кромки которой будем предполагать свободными). Координатные оси направим следующим образом: ось Oy — вдоль полосы ($-\infty < y < \infty$), а ось Ox — ортогонально к ней ($-a < x < a$).

Считаем, что источником поля служит сосредоточенная сила $\mathbf{F} = F\mathbf{e}_x$, гармонически зависящая от времени. Она приложена в начале координат и направлена вдоль оси Ox . Здесь \mathbf{e}_x — соответствующий координатный орг (в дальнейшем будет использоваться также единичный вектор \mathbf{e}_y , направленный по ординате). Приложенная сила возбуждает в полосе продольно-сдвиговые гармонические колебания с круговой частотой ω . Множитель $e^{-i\omega t}$, задающий временную зависимость, в дальнейшем всюду опускается. С учетом сказанного уравнения колебаний и граничные условия данной задачи будут иметь следующий вид:

$$\frac{1}{1-\sigma^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2(1-\sigma)} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\rho\omega^2}{E} u = -\frac{F}{Eh} \delta(x)\delta(y), \quad (1)$$

$$\frac{1}{1-\sigma^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1-\sigma)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\rho\omega^2}{E} v = 0,$$

$$\frac{Eh}{1-\sigma^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Big|_{x=\pm a} = 0, \quad \frac{Eh}{2(1+\sigma)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{x=\pm a} = 0, \quad (2)$$

где u и v — смещения в направлениях осей Ox и Oy соответственно; ρ — плотность материала; E — модуль Юнга; σ — коэффициент Пуассона; $\delta(x)$, $\delta(y)$ — дельта-функции Дирака. Уравнения (1) представляют собой уравнения Файлона теории тонких пластин. Другое название этих уравнений — уравнения обобщённой динамической плоской теории упругости — отражает приведённую выше формальную связь этих уравнений с двумерными уравнениями теории упругости. Граничные условия (2) выражают отсутствие на кромках полосы нормальной и тангенциальной сил.

3. Интегральное представление для поля вынужденных колебаний упругой полосы

Для решения краевой задачи (1), (2) воспользуемся преобразованием Фурье: $u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mu y} U(x, \mu) d\mu$, $v(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mu y} V(x, \mu) d\mu$, где μ — волновое число нормальных волн, распространяющихся вдоль волновода. Для компактности записи введем три дифференциальных оператора:

$$\begin{cases} L_{11} = \frac{1}{1-\sigma^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\mu^2}{2(1+\sigma)} + \frac{\rho\omega^2}{E}, \\ L_{12} = L_{21} = \frac{i\mu}{2(1-\sigma)} \frac{\partial}{\partial x}, \\ L_{22} = -\frac{\mu^2}{1-\sigma^2} + \frac{1}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\rho\omega^2}{E}. \end{cases} \quad (3)$$

Тогда уравнения (1) примут следующий вид:

$$L_{11}U + L_{12}V = -\frac{F}{2\pi Eh} \delta(x), \quad L_{21}U + L_{22}V = 0. \quad (4)$$

Выразим теперь функции U и V через одну функцию W : $U = L_{22}W$, $V = -L_{21}W$, удовлетворив тем самым второму из уравнений (4). В результате система (4) сводится к одному уравнению:

$$LW = -\frac{F}{2\pi Eh}\delta(x), \tag{5}$$

где $L = L_{11}L_{22} - L_{12}^2$. При этом граничные условия (2) для функции W имеют вид:

$$M_1W|_{x=\pm a} = 0, \quad M_2W|_{x=\pm a} = 0. \tag{6}$$

Здесь $M_1 = 2\left[\left(\mu^2 - \frac{\lambda_2^2}{1+\sigma}\right)\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right]$, $M_2 = \lambda_1^2 - \sigma\frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

Рассматриваемая двумерная модель обладает симметрией относительно средней линии упругой полосы (или оси ординат в выбранной декартовой системе координат). В таких моделях процессы, симметричные и антисимметричные относительно линии симметрии модели, возбуждаются и развиваются независимо друг от друга. В обсуждаемом случае им соответствуют чётные и нечётные по переменной x значения функции W . При используемом гармонически зависящем от времени возбуждении $\mathbf{F} = F\mathbf{e}_x$ функция W должна быть чётной. Этому соответствует чётность (симметрия) смещения U и нечётность (антисимметрия) смещения V . При возбуждении силой $\mathbf{F} = F\mathbf{e}_y$ функция W была бы нечётной.

Функция W должна удовлетворять граничным условиям (6), а ее поведение в нуле (точке приложения источника) определяется равенствами:

$$[W]|_{x=0} = 0, \quad [W']|_{x=0} = 0, \quad [W'']|_{x=0} = 0, \quad [W''']|_{x=0} = F/(2\pi Eh), \tag{7}$$

где $[\varphi]|_{x=x_0}$ означает скачок функции $\varphi(x)$ при прохождении точки $x = x_0$.

Решение уравнения (5) с точностью до амплитудного множителя $F/(2\pi Eh)$ при граничных условиях (6) и фиксированном положении источника представляют собой резольвенту обобщённой (в операторе участвуют производные четвёртого порядка) задачи Штурма–Лиувилля. Будем искать эту резольвенту в виде суммы общего решения однородной задачи W_0 и частного решения неоднородной задачи W_1 :

$$W = W_0 + W_1. \tag{8}$$

С учётом чётности функции W имеем представления

$$W_0 = A_1 \cos \lambda_1 x + A_2 \cos \lambda_2 x, \quad W_1 = B_1 \sin \lambda_1 |x| + B_2 \sin \lambda_2 |x|. \tag{9}$$

Здесь $\lambda_1^2 = k_1^2 - \mu^2$, $\lambda_2^2 = k_2^2 - \mu^2$; A_i и B_i — некоторые константы, подлежащие определению. Величины k_1 и k_2 , представляют собой, соответственно, волновые числа продольных и сдвиговых волн

в бесконечной пластине: $k_{1,2} = \frac{\omega}{c_{1,2}}$, $c_1^2 = \frac{E}{\rho(1-\sigma^2)}$, $c_2^2 = \frac{E}{2\rho(1+\sigma)}$; $c_{1,2}$ — скорости этих волн. Тогда

функция W_0 при любых значениях констант $A_{1,2}$ удовлетворяет однородному уравнению (5), а функция W_1 , при надлежащих значениях констант $B_{1,2}$, — неоднородному уравнению (5).

Коэффициенты $B_{1,2}$, входящие в задание функции W_1 , однозначно находятся из требований (7).

В результате имеем: $W_1 = B\left(\frac{\sin \lambda_2 x}{\lambda_2} - \frac{\sin \lambda_1 x}{\lambda_1}\right)$, где $B = \frac{F}{2\pi(1+\sigma)Ehk_2^2}$.

Удовлетворяя граничным условиям (6), получим систему линейных алгебраических уравнений для нахождения констант A_i :

$$\begin{aligned} A_1 \lambda_1 (\lambda_1^2 - \mu^2) \sin \lambda_1 a - 2A_2 \lambda_2 \mu^2 \sin \lambda_2 a &= -B [(\lambda_2^2 - \mu^2) \cos \lambda_1 a + 2\mu^2 \cos \lambda_1 a], \\ A_1 \lambda_1^2 (1 + \sigma) \cos \lambda_1 a + A_2 (\lambda_1^2 + \sigma \lambda_2^2) \cos \lambda_2 a &= B \left(\frac{\lambda_1^2 + \sigma \lambda_2^2}{\lambda_2} \sin \lambda_2 a - (1 + \sigma) \lambda_1 \sin \lambda_1 a \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Согласно теореме Крамера $A_{1,2} = \frac{\Delta_{1,2}}{\Delta}$, где Δ — главный определитель системы (10), а $\Delta_{1,2}$ — соответствующие замещённые определители. Таким образом, для функции W_0 справедливо выражение $W_0 = (\Delta_1 \cos \lambda_1 x + \Delta_2 \cos \lambda_2 x) / \Delta$. В результате общее решение неоднородной задачи W имеет следующий вид:

$$W = \frac{\Delta_1}{\Delta} \cos \lambda_1 x + \frac{\Delta_2}{\Delta} \cos \lambda_2 x + B \left(\frac{\sin \lambda_2 |x|}{\lambda_2} - \frac{\sin \lambda_1 |x|}{\lambda_1} \right).$$

Вычислив с помощью W функции U , V и перейдя к исходным компонентам вектора смещений u и v , получаем для них интегральные представления:

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty} L_{22} W e^{i\mu y} d\mu, \quad v = - \int_{-\infty}^{+\infty} L_{21} W e^{i\mu y} d\mu. \quad (11)$$

Расписывать подробно выражения для смещений не будем, поскольку их получение элементарно, а итоговые формулы весьма громоздки. Заметим, что все коэффициенты системы (10), а также её правые части являются целыми функциями переменной интегрирования μ . В результате под знаками интегралов в представлениях (11) находятся дробные функции этого аргумента, не имеющие, соответственно, точек ветвления. Поэтому выбор знаков для радикалов $\lambda_{1,2}$ не играет роли. Эта ситуация характерна для регулярных волноводов и связана с тем фактом, что резольвента задачи Штурма–Лиувилля является дробной функцией спектрального параметра.

Некоторые из полюсов подынтегрального выражения (они соответствуют распространяющимся нормальным волнам волновода) находятся на действительной оси комплексного аргумента μ . Взаимное расположение этих полюсов и контура интегрирования уточним ниже (в разделе 5), после того как в разделе 4 будут изучены корни знаменателя подынтегрального выражения.

4. Локальные потоки энергии нормальных волн

В данном разделе рассматриваются свободные нормальные волны в полосе, обладающие описанными выше свойствами симметрии. Для них вспомогательная функция W° является чётным решением однородного уравнения $LW^\circ = 0$, удовлетворяющим граничным условиям (6). Имеем $W = A_1 \cos \lambda_1 x + A_2 \cos \lambda_2 x$. Воспользовавшись граничными условиями, получим для коэффициентов $A_{1,2}$ однородный аналог системы (10). Для существования её нетривиального решения следует положить равным нулю её определитель $\Delta = \Delta(\mu)$:

$$\Delta = \lambda_1 (\lambda_2^2 - \mu^2) (\lambda_1^2 + \sigma \lambda_2^2) \sin(\lambda_1 a) \cos(\lambda_2 a) + 2(1 + \sigma) \mu^2 \lambda_1^2 \lambda_2 \sin(\lambda_2 a) \cos(\lambda_1 a) = 0. \quad (12)$$

Уравнение (12) представляет собой дисперсионное уравнение для нахождения волновых чисел μ нормальных волн с описанными свойствами симметрии.

Аналитически решить данное трансцендентное дисперсионное уравнение невозможно, поэтому все дальнейшие вычисления следует проводить численно при заданных геометрических размерах и параметрах материала выбранной модели. Такие расчеты, а также экспериментальные измерения для различных значений механических параметров проводились многими авторами. Для удобства дальнейших рассмотрений приведем результаты расчетов — дисперсионные зависимости волнового числа μ от частоты f (Рис. 1) для следующих значений параметров полосы: полуширина полосы $a = 0,5$ м; толщина $h = 0,01$ м; материал полосы — сталь с характеристиками $E = 2,6 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\sigma = 0,3$.

Среди дисперсионных кривых можно выделить кривую a_3 , которая имеет участок, отвечающий обратной волне (участок с отрицательным тангенсом угла наклона касательной).

Эта волна представляет особый интерес с точки зрения переноса энергии. По найденным волновым числам можно (с точностью до амплитудного множителя, который остаётся произвольным) найти сначала вспомогательную функцию W , а затем и искомые смещения: $u = e^{i\omega y} L_{22} W$, $v = -e^{i\omega y} L_{12} W$.

Аналитическое представление усреднённой по времени локальной плотности потока энергии для симметричных колебаний пластины имеет вид:

$$\Pi = \frac{\omega E h}{2(1-\sigma^2)} \mathbf{e}_x \operatorname{Im} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma \frac{\partial v}{\partial y} \right) \bar{u} + \frac{1-\sigma}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \bar{v} \right] + \frac{\omega E h}{2(1-\sigma^2)} \mathbf{e}_y \operatorname{Im} \left[\frac{1-\sigma}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \bar{u} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \sigma \frac{\partial u}{\partial x} \right) \bar{v} \right]$$

Здесь черта сверху над смещениями u и v — символ комплексного сопряжения.

На рисунке 2 изображены зависимости безразмерных плотностей потоков энергии от поперечной координаты полосы на частоте $f = 4750$ Гц для обратной волны (точка A кривой a_3 , Рис. 1) и для двух прямых волн (точка B кривой a_3 , и точка C кривой a_2). Значения плотностей потоков энергии приведены на рисунке условно в том смысле, что помимо данной нормировки для плотностей потоков энергии этих волн с целью компактности изображения проведено варьирование масштаба для каждой кривой по ординате. Фазовые скорости всех волн считаются положительными.

Из представленных графиков видно, что поведение плотностей потоков энергии Π_A и Π_B для волн, которым соответствует дисперсионная кривая a_3 , носят знакопеременный характер. Поток энергии колебаний несколько раз меняет свое направление в зависимости от поперечной координаты полосы. Причем это явление характерно как для обратной (Π_A), так и для прямой (Π_B) волн. Основное принципиальное отличие кривых Π_A и Π_B заключается в знаке интегральных потоков энергии. Результирующая энергия этих волн при заданной фазовой скорости переносится в противоположных направлениях.

Для дисперсионной кривой, на которой нет участка, соответствующего обратной волне, изменений знака плотности потока энергии Π_C не наблюдается. Правда, следует отметить, что в составной модели [17] известны случаи, когда плотность потоков энергии носит знакопеременный характер также и для прямых волн, не связанных с обратными волнами одной дисперсионной кривой.

5. Представление поля вынужденных колебаний пластины в виде разложения по нормальным волнам

Для получения численных значений поля изгибных смещений при вынужденных колебаниях упругой полосы удобнее использовать представление этого поля в виде разложения по нормальным волнам. Разложение достигается преобразованием интеграла в сумму вычетов подынтегральной функции. Но прежде реализации соответствующих выкладок следует уточнить взаимное расположение контура интегрирования и особенностей (полюсов) подынтегральной функции, расположенных на действительной оси. Этими полюсами являются волновые числа распространяющихся нормальных волн, среди которых могут быть и обратные волны. Поэтому возникают вопросы: как строить контур интегрирования на частотах, где существует обратная волна; с какой стороны этот контур должен обходить такие аномальные полюса? Для выяснения этого воспользуемся принципом предельного поглощения, положив $E = E - i\varepsilon$, и исследуем поведение корней дисперсионного уравнения при $\varepsilon > 0$.

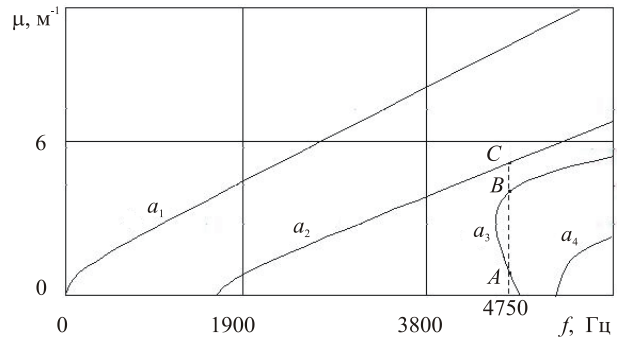


Рис. 1. Зависимость волнового числа от частоты для нормальных волн в упругой полосе

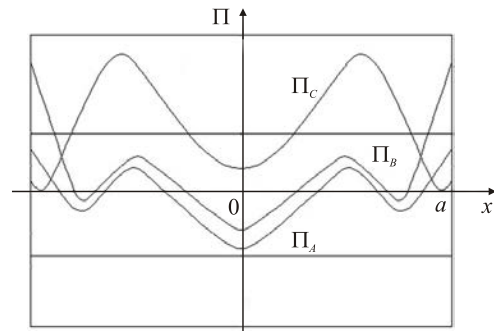


Рис. 2. Зависимости локальной плотности потока энергии в упругой полосе шириной $2a$ от поперечной координаты на частоте $f = 4750$ Гц для обратной (Π_A) и прямых (Π_B, Π_C) нормальных волн

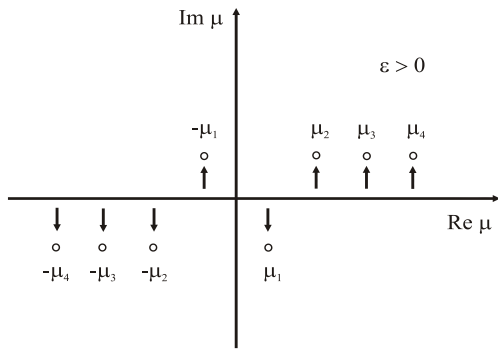


Рис. 3. Схема смещения вещественных корней дисперсионного уравнения с действительной оси при наличии потерь энергии в материале пластины

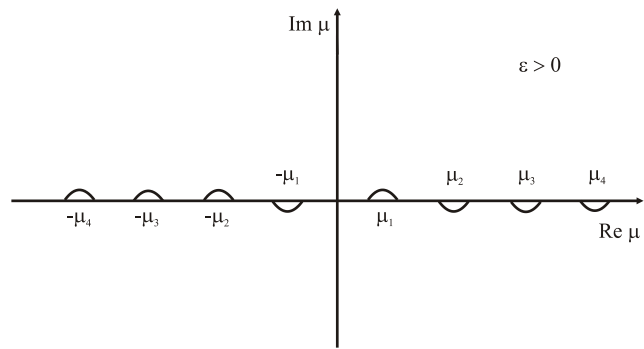


Рис. 4. Расположение контура интегрирования при отсутствии потерь энергии в материале пластины

Учёт в среде потерь энергии приводит к тому, что вещественные корни дисперсионного уравнения сдвигаются с действительной оси и становятся комплексными. Поэтому интегрирование в (7) может быть непосредственно осуществлено по действительной оси. При этом, как численно, так и аналитически, можно показать, что смещение полюсов, соответствующих обыкновенным ($\pm\mu_{2,3,4}$) и обратным ($\pm\mu_1$) волнам происходит в противоположных направлениях. Это смещение схематически показано на рисунке 3.

Устремим теперь поглощение к нулю ($\varepsilon = +0$). Поскольку при таком предельном переходе взаимное расположение контура интегрирования и особых точек подынтегральной функции должно сохраниться, контур интегрирования следует теперь сместить с действительной оси так, как это показано на рисунке 4.

Вычислив интеграл с помощью теоремы о вычетах, приходим к представлению поля смещений в виде следующего разложения по нормальным волнам: $u = 2\pi i \sum_s [\text{Res}(L_{22}W e^{i\mu y}), \mu_s]$, $v = -2\pi i \sum_s [\text{Res}(L_{12}W e^{i\mu y}), \mu_s]$.

Отметим, что в таком выражении поля выше точки местоположения источника ($y > 0$) участвуют волны, затухающие вверх, а также волны, групповая скорость которых направлена вверх. Традиционное же представление состоит в том, что источник в волноводе возбуждает волны, распространяющиеся и затухающие в направлениях от источника. Если исходить из такого суждения об ориентации распространения нормальной волны, то при истолковании направления движения волны в волноводе определяющим фактором является групповая, а не фазовая скорость. Для используемой зависимости процессов от времени ($e^{-i\omega t}$) прямая волна, аналитическое выражение которой содержит фактор $e^{i\mu y}$ ($\mu > 0$), является распространяющейся в сторону роста ординаты. Для обратной волны фактор $e^{i\mu y}$ свидетельствует о движении волны в противоположную сторону (в направлении убывания ординаты, или иными словами, в сторону, куда направлена её групповая скорость), хотя её фазовая скорость (ω/μ) положительна.

6. Вектор плотности потока энергии

Обратим еще раз внимание на рисунок 1 и вычислим вектор плотности потока энергии на двух сравнительно близких по величине характерных частотах f_1 и f_2 . Соответствующие векторные поля изображены на рисунках 5 и 6: рисунок 5 отвечает случаю отсутствия обратной волны ($f_1 = 4700$ Гц), а рисунок 6 — случаю, когда обратная волна уже существует ($f_2 = 4710$ Гц). По оси абсцисс отложен поперечный размер полосы в метрах, по оси ординат — длина в метрах. Источник колебаний располагается в начале координат.

На рисунках стрелками показано направление вектора плотности потока энергии. Длина стрелки на рисунке 6 (а также на последующем рисунке 7) обозначает относительную величину плотности потока энергии. Изображение направлений потоков энергии показано лишь в первом квадранте декартовой системы координат, поскольку полная картина обладает зеркальной симметрией относительно координатных осей. Составляющие поля потока энергии в направлении оси ординат одинаковы в точках, симметричных относительно оси ординат, а при отражении относительно оси абсцисс их знак меняется на обратный. Таким же образом происходит изменение знака составляющей вектора потока энергии в направлении оси абсцисс. Эта составляющая нечётно зависит от абсциссы и чётна по ординате.

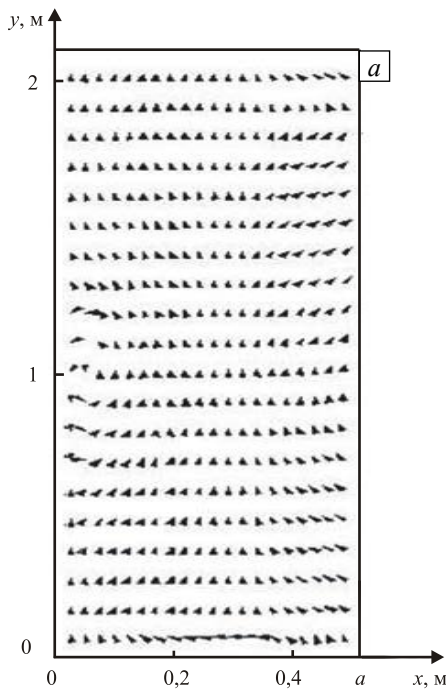


Рис. 5. Направления потоков энергии, возбуждаемых сосредоточенным источником на частоте 4700 Гц (обратная волна ещё не зародилась)

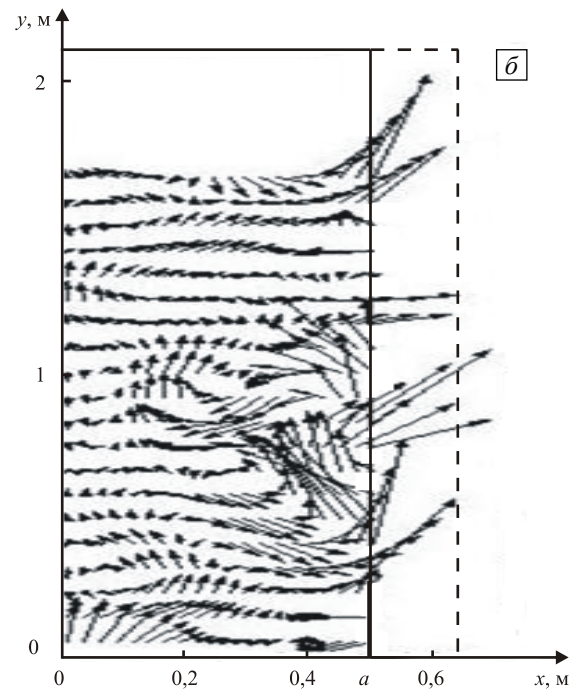


Рис. 6. Направления потоков энергии возбуждаемых сосредоточенным источником на частоте 4710 Гц (обратная волна уже существует)

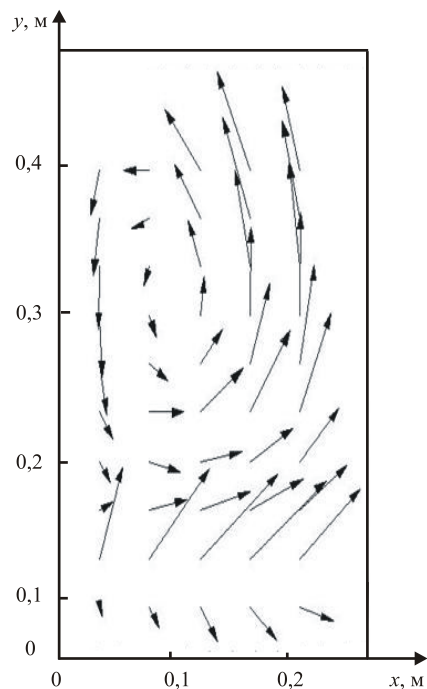


Рис. 7. Фрагмент рисунка 6 вблизи точки приложения источника возбуждения колебаний

волна своим появлением существенно изменяет картину переноса энергии в упругом волноводе. Для возможности подробного анализа характера вихрей вектора плотности потока энергии один из участков полосы представлен на рисунке 7 в увеличенном масштабе. На рисунке хорошо виден вихрь, образующийся в первом квадранте около точки приложения источника.

7. Заключение

Перечислим основные результаты работы:

1. Плотность потока энергии в нормальной волне может неоднократно менять направление в пределах поперечного сечения волновода. Это явление, типичное для обратной волны, может иметь место и в обычной нормальной волне.

Полезно также сравнить поля смещений и потоков энергии. При этом надо помнить, что вектор плотности потока энергии является квадратичной характеристикой поля смещений. Его направление определяется сдвигом фазы между усилием и смещением, но непосредственно от фазы смещения оно не зависит. Поэтому нечётность по координате x какой-либо компоненты вектора смещения не противоречит чётности по этой координате соответствующей компоненты вектора потока энергии.

Даже при поверхностном сравнении векторных полей, приведенных на рисунках 5 и 6, заметна существенная разница в их характере. Поле вектора плотности потока энергии на рисунке 5 содержит небольшие возмущения около источника. Встречаются и слабые вихревые образования вблизи средней линии волновода на некотором удалении от источника, но в основном по всей площади рассматриваемого участка пластины направление потоков энергии имеет устойчивое («ламинарное») поведение. Поле вектора плотности потока энергии, показанное на рисунке 6, обладает характером более сложным и нерегулярным. Обращают на себя внимание многочисленные вихревые образования и участки с обратным направлением распространения энергии. Таким образом, обратная

2. В интегральном представлении поля смещений в полосе при ее вынужденных колебаниях обход полюса, соответствующего обратной волне, осуществляется в направлении, противоположном по отношению к обходу полюсов, отвечающих прямым волнам.

3. При описании поля смещений в виде разложения по нормальным волнам справа (слева) от источника участвуют волны, затухающие в соответствующем направлении, а также волны, групповая скорость которых направлена в ту же сторону. Иными словами, при наличии обратной волны главное внимание следует обращать на групповую, а не на фазовую скорость. Таким образом, при $\mu > 0$ прямую волну с фактором $e^{i(\mu y - \omega t)}$ следует считать распространяющейся в сторону возрастания ординаты, а обратную волну с тем же фактором — распространяющейся в сторону убывания ординаты.

4. Возникновение в процессе колебаний обратной волны влечет за собой ощутимое изменение характера локальных потоков энергии. Наличие участков со встречным характером потока энергии в обратной волне, при ее достаточно сильном возбуждении, порождает многочисленные вихревые образования по всей длине волновода.

Таким образом, в упругих волноводах на частотах существования обратной волны происходит значительная перестройка локальных потоков распространения энергии. Она затрагивает как свободные, так и вынужденные волновые процессы. Этот результат получен на примере простейшей модели (тонкой упругой полосы), однако выявленные эффекты, по представлению авторов данной статьи, должны существовать и в других волноводах, в том числе и в волноводах более сложных конфигураций. Возможность кардинальной перестройки потоков распространения энергии, связанной с зарождением обратной волны, следует учитывать при изучении каналов распространения энергии (в частности, с целью подавления вредных вибраций), при исследовании возможности возникновения локализованных форм колебаний и в ряде других случаев. Описанное явление должно иметь место также и в волноводах другой физической природы, если в них возможно существование обратной волны.

Литература

1. Kim J.-D., Hong S.-Y., Kwon H.-W., Song J.-H. Energy flow model considering near field energy for predictions of acoustic energy in low damping medium // *Sound Vib.* – 2011. – V. 330, N. 2. – P. 271-286. DOI
2. Guasch O., Aragonès À. Finding the dominant energy transmission paths in statistical energy analysis // *Sound Vib.* – 2011. – V. 330, N. 10. – P. 2325-2338. DOI
3. Wu D., Qiu Zhi P. Comparison of two non-probabilistic approaches for the energy flow uncertainty in structural vibrating system // *Sound Vib.* – 2011. – V. 330, N. 11. – P. 2520-2535. DOI
4. Guyomar D., Lallart M., Petit L., Wang X.-J. Impact localization and energy quantification based on the power flow: A low-power requirement approach // *Sound Vib.* – 2011. – V. 330, N. 13. – P. 3270-3283. DOI
5. Zhang B., Xiong W., Yu M., Lan C.Q., Li L. Study of energy distribution of guided waves in multilayered media // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1998. – V. 103, N. 1. – P. 125-135. DOI
6. Meitzler A.H. Backward-wave transmission of stress pulses in elastic cylinders and plates // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1965. – V. 38, N. 5. – P. 835-842.
7. Викторов И.А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. – М.: Наука, 1966. – 168 с.
8. Меркулов Л.Г., Рохлин С.И. Дифракция волн Лэмба в пластине на полубесконечном разрезе // *Дефектоскопия.* – 1969. – Т. 4. – С. 24-36.
9. Бурлий П.В., Кучеров И.Я. Обратные упругие волны в пластинах // *Письма в ЖЭТФ.* – 1977. – Т. 26, № 9. – С. 644-647.
10. Бурлий П.В., Ильин П.П., Кучеров И.Я. Обратные упругие волны в изотропных пластинах // *ЖТФ.* – 1981. – Т. 51, № 10. – С. 2196-2198.
11. Бурлий П.В., Ильин П.П., Кучеров И.Я. О возможности существования поперечных обратных волн в пластинах // *Письма в ЖТФ.* – 1982. – Т. 8, № 9. – С. 568-571.
12. Абрамова О.П., Сторожев В.И., Шнак В.А. Дисперсия нормальных волн в ортотропном слое с закрепленными границами // *Акустический журнал.* – 1996. – Т. 42, № 1. – С. 5-9.
13. Бурлий П.В., Ильин П.П., Кучеров И.Я. Обратные поперечные акустические волны в пластинах кубических кристаллов // *Акустический журнал.* – 1997. – Т. 43, № 3. – С. 310-314.
14. Toda K., Motegi K. Propagation characteristics of leaky Lamb waves in a liquid-loaded double-layered substrate consisting of a thin piezoelectric ceramic plate and thin glass plate // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1999. – V. 105, N. 6. – P. 3290-3294. DOI
15. Кучеров И.Я., Маляренко Е.В. Потоки энергии обратных и прямых нормальных поперечных акустических волн в пьезоэлектрических пластинах // *Акустический журнал.* – 1998. – Т. 44, № 4. С. 492-497.
16. Veshev V.A., Kouzov D.P., Mirolybova N.A. On opposite directions of the energy's flux of normal wave propagation in thin-wall waveguide // *Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем: Тр. XXIV летней школы-семинара.* – СПб: Изд-во ИПМаш РАН, 1997. – С. 71-78.
17. Вешев В.А., Коузов Д.П., Миролюбова Н.А. Потоки энергии и дисперсия нормальных волн изгибного типа в балке крестообразного профиля // *Акустический журнал.* – 1999. – Т. 45, № 3. – С. 331-336.

Поступила в редакцию 05.03.12; опубликована в электронном виде 28.12.12

Сведения об авторах

Коузов Даниил Петрович, дфмн, проф., Институт проблем машиноведения РАН (ИПМаш РАН), 199178, Санкт-Петербург, В.О., Большой проспект, д. 61; E-mail: EDK291179@yandex.ru
 Миролюбова Наталья Александровна, кфмн, ген.дир., ООО «Уранус», Санкт-Петербург, Свердловская наб., д.44/Щ, офис 725; E-mail: info@uranus-sdp.com