DOI: 10.7242/1999-6691/2012.5.4.46
УДК 532.546:519.63

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ УПРУГОВОДОНАПОРНОГО РЕЖИМА РАЗРАБОТКИ НЕФТЯНОГО ПЛАСТА

Х.М. Гамзаев

Азербайджанская государственная нефтяная академия, Баку, Азербайджан

Рассматривается обратная задача определения граничного режима в эксплуатационной галерее нефтяных скважин по заданному закону движения границы раздела жидкостей при упруговодонапорном режиме разработки пласта. На основе применения методов выпрямления фронтов и разностной аппроксимации построен вычислительный алгоритм.

Ключевые слова: разностный метод, метод выпрямления фронтов, граничная обратная задача, упруговодонапорный режим, нефтяной пласт

NUMERICAL METHOD FOR SOLVING THE INVERSE PROBLEM OF OIL RESERVOIR DEVELOPMENT UNDER ELASTIC WATER DRIVE CONDITIONS

Kh.M. Gamzaev

Azerbaijan State Oil Academy, Baku, Azerbaijan

The inverse problem of determining boundary conditions in the oil well gallery from the prescribed law of motion for liquid-liquid interface under elastic water drive conditions is considered. The algorithm for solving the obtained system of equations is based on the method of rectifying the fronts and the difference method.

Key words: difference method, method of rectifying the fronts, inverse boundary value problem, elastic water drive mode, oil reservoir

1. Введение

Известно, что в нефтяных месторождениях с начальным пластовым давлением выше давления насыщения нефти газом в начальном периоде разработки развивается упругий режим. В условиях этого режима движение нефти к скважинам происходит за счет использования потенциальной энергии упругой деформации пласта и нефти [1]. Если нефтяная залежь связана с окружающей пластовой водонапорной системой, то в процессе разработки развивается упруговодонапорный режим. В присутствии этого режима движение нефти к скважинам происходит не только за счет потенциальной энергии упругой деформации пласта и нефти, но и в силу давления краевой (подошвенной или верхней) воды, находящейся ниже или выше контура нефтеносности. При упруговодонапорном режиме разработка залежи прекращается, когда краевая вода доходит до нефтяных скважин и из пласта вместо нефти начинает извлекаться в основном вода.

Экспериментальные исследования различных процессов, возникающих при разработке нефтяных месторождений в упруговодонапорном режиме, показывают, что в большинстве случаев происходит полное вытеснение нефти краевой водой, и в пласте образуется четкая граница раздела двух жидкостей, движущаяся друг за другом по не известному заранее закону.

Необходимо отметить, что эффективность разработки нефтяных месторождений при упруговодонапорном режиме во многом определяется комплексом условий, при которых осуществляется добыча нефти и которые влияют на динамику изменения границы раздела жидкостей. А от темпа продвижения границы раздела зависят сроки эксплуатации и заводнения нефтеносного пласта, коэффициент нефтеотдачи месторождения и другие показатели. В связи с этим при разработке нефтяных, а также газовых месторождений с упруговодонапорным режимом, при создании и эксплуатации подземных хранилищ газа в водоносных пластах и истощенных обводненных месторождениях очень важным для практики является вопрос регулирования движения границы раздела двух жидкостей в пласте.

В данной работе проблема регулирования движения границы раздела двух жидкостей рассматривается как граничная обратная задача для упруговодонапорного режима разработки нефтеносного пласта с активным продвижением контурных вод.

2. Постановка задачи

Предположим, что рассматривается недеформируемый однородный горизонтально расположенный нефтеносный пласт протяженностью L постоянной толщины и ширины, ограниченный сверху и снизу непроницаемыми плоскостями. В сечении пласта $x=0$ расположена галерея эксплуатационных скважин, а внешняя граница пласта окружена краевой водой, находящейся под давлением $p_s(t)$. Пусть в момент времени $t = 0$ галерея скважин вводится в действие и в пласте возникает упруговодонапорный режим. За счет потенциальной энергии упругой деформации нефти и вследствие давления краевой воды происходит прямолинейно-параллельное течение нефти к скважинам. По мере отбора нефти через галерею краевая вода поступает в пласт, полностью заполняя поры, прежде занимаемые нефтью, и образуется четкая граница раздела вода – нефть. Предполагается, что нефть является слабосжимаемой жидкостью, и ее движение в пласте подчиняется закону Дарси. Тогда в качестве математической модели нестационарного прямолинейно-параллельного течения в пласте можно использовать систему уравнений, включающую дифференциальное уравнение неразрывности фильтрационного потока

$$\frac{\partial(m\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(u\rho)}{\partial x} = 0, \qquad (1)$$

уравнение движения (закон Дарси)

$$u = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}, \qquad (2)$$

уравнение состояния нефти

$$\rho = \rho_0 e^{\beta(P - P_0)}, \qquad (3)$$

и пористой среды

$$m = \text{const}, \qquad (4)$$

где ρ — плотность нефти; m — коэффициент пористости пласта; u — скорость фильтрации нефти; k — абсолютная проницаемость пласта; μ — вязкость нефти, $P(x,t)$ — давление в пласте; β — коэффициент объемного сжатия нефти; ρ_0 — плотность нефти при фиксированном давлении P_0.

Следует отметить, что путем некоторых преобразований систему (1)–(4) можно свести к одному дифференциальному уравнению относительно одной неизвестной функции. Для вывода такого уравнения подставим закон Дарси (2) в уравнение неразрывности фильтрационного потока (1) и учтём (3), (4). В результате получим следующее дифференциальное уравнение относительно одной функции — давления $P(x,t)$:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{k}{\mu m\beta}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{k}{\mu m}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2.$$

Очевидно [1], что при небольших перепадах давления можно пренебречь вторым слагаемым в правой части этого уравнения и представить математическую модель нестационарного прямолинейно-параллельного течения нефти в пласте с учетом активного продвижения краевой воды в виде:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \chi\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \quad (x,t) \in \Omega_s = \{0 < x < s(t),\ 0 < t \le T\}, \qquad (5)$$

где $\chi = \dfrac{k}{\mu m\beta}$; $s(t)$ — функция, описывающая положение границы раздела вода – нефть с течением времени.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ распределение давления в нефтеносном пласте и положение границы раздела жидкостей известны, то есть для уравнения (5) имеем начальные условия:

$$s(0) = L, \qquad (6)$$

$$P\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \le x \le s(0). \qquad (7)$$

Предположим, что изменение давления во времени в галерее эксплуатационных скважин описывается функцией $f(t)$. Тогда на границе пласта $x = 0$

$$P\big|_{x=0} = f(t), \tag{8}$$

а на границе раздела вода – нефть $x = s(t)$ давление нефти должно равняться давлению краевой воды

$$P\big|_{x=s(t)} = p_s(t), \tag{9}$$

и должно выполняться условие материального баланса

$$m\frac{ds}{dt} = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\bigg|_{x=s(t)}. \tag{10}$$

Следует отметить, что прямая задача нестационарного прямолинейно-параллельного течения нефти в пласте в условиях упруговодонапорного режима состоит в нахождении функций $P(x,t)$, $s(t)$, удовлетворяющих уравнениям (5), (10) с заданными коэффициентами k, μ, β, m и условиям (6)–(9). Существенной особенностью прямой задачи является наличие границы раздела жидкостей, закон перемещения которой определяется в ходе решения задачи. Прямая задача при упруговодонапорном режиме разработки пласта относится к задачам, рассмотренным в [2].

Однако для нефтеносных пластов, разрабатываемых в упруговодонапорном режиме, важное практическое значение имеют задачи, в которых по заранее заданному закону движения границы раздела жидкостей определяются те условия эксплуатации галереи скважин, при которых такое движение возможно. Считая давление краевой воды известным, ставим следующую обратную задачу: найти такой режим функционирования эксплуатационной галереи, который обеспечивал бы перемещения границы раздела жидкостей по заданному закону, то есть требуется определить функции $f(t)$, $P(x,t)$ из уравнения (5) и дополнительных условий (6)–(10).

3. Метод решения

Преобразуем задачу (5)–(10), используя метод выпрямления фронтов. Для этого путем замены переменных $y = x/s(t)$, $t = t$, $P(x,t) = P(y,t)$ отобразим область Ω_s на область $\Omega = \{0 < y < 1,\ 0 < t \le T\}$, где T — фиксированный момент времени. Тогда уравнение (5) и дополнительные условия примут вид:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = r(t)\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + u(y,t)\frac{\partial P}{\partial y}, \quad (y,t) \in \Omega = \{0 < y < 1,\ 0 < t \le T\}, \tag{11}$$

$$P\big|_{t=0} = \varphi(y), \quad 0 \le y \le 1, \tag{12}$$

$$P\big|_{y=1} = p_s(t), \tag{13}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}\bigg|_{y=1} = w(t), \tag{14}$$

$$P\big|_{y=0} = f(t), \tag{15}$$

где $r(t) = \dfrac{\chi}{s^2(t)}$; $u(y,t) = \dfrac{y}{s(t)}\dfrac{ds}{dt}$; $w(t) = -\dfrac{\mu s(t) m}{k}\dfrac{ds}{dt}$. Преимущество такого преобразования заключается в том, расчетной областью становится прямоугольная область Ω с фиксированными границами. Так как неизвестными задачи являются теперь функции $P(y,t)$ и $f(t)$, следовательно, задача (11)–(15) относится к классу граничных обратных задач [3, 4].

Для численного решения задачи (11)–(15) используем подход, предложенный в [5]. Для перехода к разностной задаче введем в области $\overline{\Omega} = [0 \le y \le 1,\ 0 \le t \le T]$ равномерную разностную сетку $\varpi_{h\tau} = \{(y_i, t_j):\ y_i = ih,\ t_j = j\tau,\quad i = 0,1,2,...,N,\ j = 0,1,2,...,M\}$ с шагами $h = 1/N$ по переменной y и $\tau = T/M$ по времени t. Разностный аналог уравнения (11) на сетке $\varpi_{h\tau}$ запишем с применением неявной схемы:

$$\frac{P_i^{j+1} - P_i^j}{\tau} = r^{j+1}\frac{P_{i+1}^{j+1} - 2P_i^{j+1} + P_{i-1}^{j+1}}{h^2} + u_i^{j+1}\frac{P_i^{j+1} - P_{i-1}^{j+1}}{h} \qquad (i = \overline{1, N-1},\quad j = \overline{0, M-1}).$$

Разностные аналоги начального условия (12) и граничных условий (13)–(15) представим в виде: $P_i^0 = \varphi_i$, $i = \overline{0, N}$; $\dfrac{P_N^{j+1} - P_{N-1}^{j+1}}{h} = w^{j+1}$; $P_N^{j+1} = p_s^{j+1}$; $P_0^{j+1} = f^{j+1}$.

Преобразуем полученную систему разностных уравнений:

$$a_i P_{i-1}^{j+1} - c_i P_i^{j+1} + b_i P_{i+1}^{j+1} = -d_i \quad (i = \overline{1, N-1},\ \ j = \overline{0, M-1}), \tag{16}$$

$$P_i^0 = \varphi_i \quad (i = \overline{0, N}), \tag{17}$$

$$P_N^{j+1} = P_{N-1}^{j+1} + hw^{j+1}, \tag{18}$$

$$P_N^{j+1} = p_s^{j+1}, \tag{19}$$

$$P_0^{j+1} = f^{j+1}, \tag{20}$$

где $a_i = r^{j+1}$; $b_i = r^{j+1} - hu_i^{j+1}$; $c_i = a_i + b_i + h^2/\tau$; $d_i = P_i^j h^2/\tau$.

Представим решение задачи (16)–(20) в виде

$$P_{i+1}^{j+1} = \alpha_{i+1} P_i^{j+1} + \beta_{i+1} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, N-1), \tag{21}$$

где α_{i+1}, β_{i+1} — не известные пока коэффициенты. Запишем аналогичное выражение для P_i^{j+1}: $P_i^{j+1} = \alpha_i P_{i-1}^{j+1} + \beta_i$. Подставляя P_i^{j+1}, P_{i-1}^{j+1} в уравнение (16), получим следующие формулы для определения коэффициентов α_i, β_i: $\alpha_i = a_i / (c_i - \alpha_{i+1} b_i)$, $\beta_i = \left(b_i \beta_{i+1} + d_i^{j+1}\right) / \left(c_i - \alpha_{i+1} b_i\right)$ $(i = N-1,\ N-2,\ \ldots, 1)$, $\alpha_N = 1$, $\beta_N = hw^{j+1}$.

После того, как коэффициенты α_i, β_i найдены для всех $i = \overline{1, N}$, можно найти зависимость между P_N^{j+1} и P_0^{j+1} в явном виде. Для этого соотношение (21) запишем при $i = N-1$: $P_N^{j+1} = \alpha_N P_{N-1}^{j+1} + \beta_N$. С учетом P_{N-1}^{j+1}, то есть $P_{N-1}^{j+1} = \alpha_{N-1} P_{N-2}^{j+1} + \beta_{N-1}$, будем иметь: $P_N^{j+1} = \alpha_N \alpha_{N-1} P_{N-2}^{j+1} + \alpha_N \beta_{N-1} + \beta_N$. Далее, используя выражения для P_{N-2}^{j+1}, P_{N-3}^{j+1}, …, P_1^{j+1}, получим формулу, в которой P_N^{j+1} выражается через P_0^{j+1}: $P_N^{j+1} = P_0^{j+1} \prod\limits_{i=1}^{N} \alpha_i + \sum\limits_{i=1}^{N-1} \beta_i \prod\limits_{n=i+1}^{N} \alpha_n + \beta_N$.

Отсюда, учитывая (19), (20), имеем $f^{j+1} = \left(p_s^{j+1} - \sum\limits_{i=1}^{N-1} \beta_i \prod\limits_{n=i+1}^{N} \alpha_n - \beta_N \right) \Big/ \prod\limits_{i=1}^{N} \alpha_i$. Зная f^{j+1}, можно далее последовательно найти $P_1^{j+1}, P_2^{j+1}, \ldots, P_{N-1}^{j+1}$ по рекуррентной формуле (21). При переходе на следующий временной слой описанная процедура вычислений повторяется. Построенный таким образом численный алгоритм позволяет на каждом временном слое определить режим пользования эксплуатационной галереей и распределение давления в нефтеносном пласте.

4. Результаты численных расчетов

Для выяснения эффективности практического применения предложенного вычислительного алгоритма проведены численные эксперименты на модельных задачах. Схема численного эксперимента была следующей. Для заданных функций $f(t)$, $s(t)$ решалась прямая задача (11), (12), (14), (15). Найденная зависимость $p_s(t) = P(1, t)$ принималась за точные данные для численного решения обратной задачи по восстановлению $f(t)$. Первая серия расчетов выполнялась с использованием этих невозмущенных данных. Вторая серия расчетов осуществлялась при наложении на $p_s(t)$ некоторой функции, моделирующей погрешность входных данных: $\tilde{p}_s(t) = p_s(t) + \delta(\sigma(t) - 0{,}5)$, где $\sigma(t)$ — случайный процесс, организуемый с помощью датчика случайных чисел, δ — задаваемый уровень погрешности.

Расчеты выполнялись на пространственно-временной разностной сетке с шагами $h = 0{,}04$, $\tau = 0{,}2$; 1; 5 суток. Результаты численного эксперимента при значениях: $\beta = 10^{-8}$ Па$^{-1}$; $k = 2 \cdot 10^{-12}$ м^2; $\mu = 0{,}003$ Па·с; L =200 м; $s(t) = L - vt$, где $v = 0{,}5$ м/сутки; $m = 0{,}35$; $f(t) = 250 - 50\sin(t/12)$ и использовании невозмущенных и возмущенных входных данных представлены в таблице. Здесь: t — время; f^t — точные значения функции $f(t)$; $\overline{f}$ и $\tilde{f}$ — вычисленные значения $f(t)$ при невозмущенных и возмущенных данных. Для возмущения входных данных задавались погрешности $\delta = 0{,}5$ и 2 атм.

Таблица. Результаты вычислительных экспериментов

t, сут	f^t, атм	$\overline{f}$, атм	$\tilde{f}$, атм (при $\delta = 0,5$ атм)			$\tilde{f}$, атм (при $\delta = 2$ атм)		
			Шаг разностной сетки по времени τ, сут					
			0,2	1	5	0,2	1	5
5	229,76	229,76	230,59	229,79	229,46	233,08	229,86	228,53
10	212,99	212,99	211,64	212,96	212,76	207,60	212,88	212,08
15	202,55	202,55	198,74	201,74	202,82	187,30	199,30	203,64
20	200,23	200,23	198,98	199,82	200,01	195,23	198,58	199,34
25	206,42	206,42	208,81	206,21	206,32	215,98	205,56	206,01
30	220,08	220,08	218,91	219,59	220,20	215,42	218,13	220,58
35	238,85	238,85	232,58	239,32	238,72	213,79	240,72	238,34
40	259,53	259,53	257,18	258,85	259,35	250,13	256,82	258,80
45	278,58	278,58	277,12	278,97	278,53	272,73	280,14	278,40
50	292,74	292,74	293,90	292,80	292,70	297,40	292,99	292,61
55	299,58	299,58	301,80	300,00	299,34	305,56	301,25	298,63
60	297,95	297,95	297,80	297,63	297,97	297,36	296,68	298,04
65	288,10	288,10	289,65	287,91	287,85	294,29	287,33	287,11
70	271,74	271,74	276,92	271,37	271,98	292,46	270,24	272,68
75	251,66	251,66	247,87	251,27	251,38	236,51	250,09	250,53
80	231,29	231,29	230,91	231,60	231,21	229,77	232,52	230,96
85	214,13	214,13	213,82	213,85	214,38	212,89	213,01	215,14
90	203,10	203,10	202,56	203,48	202,99	200,93	204,63	202,67
95	200,10	200,10	198,34	200,29	200,26	193,06	200,87	200,76
100	205,64	205,64	208,06	205,64	205,52	215,35	206,23	205,17

Проведенные численные эксперименты показывают, что при использовании невозмущенных входных данных искомая функция $f(t)$ восстанавливается точно при всех расчетных сетках по времени (см. 2-й и 3-й столбцы таблицы). В случае возмущенных входных данных, при которых погрешность имеет флуктуационный характер, искомая функция $f(t)$ восстанавливается с погрешностью, проявляющейся сильнее при уменьшении шага по времени. Однако результаты, полученные при больших шагах по времени ($\tau = 1$; 5 суток), свидетельствуют о том, что увеличение шага по времени обеспечивает устойчивость алгоритма к погрешностям входных данных. Таким образом, в предложенном вычислительном алгоритме эффект регуляризации обеспечивается за счет выбора шага разностной сетки по времени.

5. Заключение

Проблема регулирования продвижения границы раздела жидкостей является весьма актуальной при эксплуатации нефтяных месторождений в условиях упруговодонапорного режима. Её формулировка в виде граничной обратной задачи заключается в определении давления в эксплуатационной галерее, обеспечивающего перемещения границы раздела жидкостей по заданному закону. Для численного решения обратной задачи предложен вычислительный алгоритм, основанный на использовании метода выпрямления фронта и разностной аппроксимации.

Литература

1. *Басниев К.С., Дмитриев Н.М., Розенберг Г.Д.* Нефтегазовая гидромеханика. – М.: Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. – 544 с.
2. *Рубинштейн Л.И.* Проблема Стефана. – Рига: Звайгзне,1967. – 457 с.
3. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: ЛКИ, 2009. – 478 с.
4. *Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1988. – 288 с.
5. *Гамзаев Х.М.* Численное решение некорректной задачи однофазного течения в двумерном пласте // Проблемы управления и информатики. – 2008. – № 5. – С. 74-84.

Поступила в редакцию 26.03.12; опубликована в электронном виде 28.12.12

Сведения об авторе

Гамзаев Ханлар Мехвали оглы, ктн, доц., Азербайджанская государственная нефтяная академия, AZ 1010, Баку, проспект Азадлыг, д. 20; E-mail: xan.h@rambler.ru