

DOI: 10.7242/1999-6691/2012.5.4.45

УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНО-ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОГО ПОВЕДЕНИЯ РЕБРИСТО-АРМИРОВАННЫХ ПЕНОПЛАСТМАСС. СТРУКТУРНАЯ МОДЕЛЬ

А.П. Янковский

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия

Разработана численно-аналитическая методика моделирования термовязкоупругого поведения ребристо-армированных пенопластмасс, позволяющая в дискретные моменты времени рассматривать такую композицию как термоупругий с приведенными упругими и температурными эффективными жесткостями эквивалентный материал при наличии начальных напряжений.

Ключевые слова: пенопластмассы, армирование, определяющие соотношения, структурная теория, легкий наполнитель, ребристые конструкции, термовязкоупругость

MODELING OF THE LINEAR THERMOVISCOELASTIC BEHAVIOR OF RIB-REINFORCED POLYFOAMS. THE STRUCTURAL MODEL

A.P. Yankovskii

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russia

The paper presents a numerical-analytical technique for modeling the thermoviscoelastic behavior of rib-reinforced polyfoams. The proposed approach allows us to consider, at discrete moments of time, such composition as an initially stressed thermoelastic material with reduced effective elastic and temperature stiffness.

Key words: polyfoam, reinforcement, constitutive relations, structural theory, lightweight filler, ribbed designs, thermoviscoelasticity

1. Введение

В самолётостроении и некоторых других областях техники в последние десятилетия широко применяются слоистые конструкции с наполнителем. В качестве наполнителей используются пенопластические массы, как неармированные, так и армированные пластинками или проволокой, а также разного рода ребристые конструкции (сотовые, складчатые, типа гофра и другие).

Возможности пенопластмасс как легких наполнителей значительно расширяются, если им придается вид армированных слоистых структур. Такие пенопласты содержат прослойки конструкционных материалов (металла, фанеры и других) чаще всего в виде полос [1]. При приложении нагрузки вдоль усиливающего материала армированные пенопласты демонстрируют прочность и жесткость, значительно превосходящие прочность и жесткость неармированного материала с такой же плотностью.

Применение современных пенопластмасс (например, вспенивающихся) позволяет создавать такие типы наполнителей, которые легко проникают в полости ребристых конструкций (сотовых, складчатых и других). Подобные композитные материалы, благодаря наличию в них пенопластмассы, обладают хорошими вибрационными характеристиками, так как пенопластическая масса работает в них как демпфер и обеспечивает высокий градиент затухания колебаний. Кроме того, пенопластмасса, заняв полости ребристой конструкции, обеспечивает лучшую совместную работу силовых элементов этой конструкции, поддерживает их и препятствует потере ими устойчивости при сжатии и сдвиге, что во многом определяет жесткостные и прочностные характеристики наполнителей типа сотовых, складчатых и тому подобных [2]. Такие конструкции наполнителей можно рассматривать как пенопластмассы со сложными (ребристо-пространственными) структурами армирования, позволяющими локализовать в пределах одной ячейки распространение трещин в пенопластической массе. За счет этого резко повышается несущая способность армированного материала наполнителя в слоистых конструкциях, особенно в зонах приложения локализованных нагрузок и в окрестностях концентраторов напряжений при нестационарных термосиловых воздействиях, характерных для современных технических устройств [3].

В силу актуальности проблемы определения эффективных характеристик неоднородных и композитных вязкоупругих сред развитию структурных теорий для таких материалов был посвящен ряд публикаций. Так, в работах [4, 5] исследованы реологические свойства зернистых (наполненных) композитов; в [6, 7] моделируется вязкоупругое поведение однонаправленно армированных композитов (однако такой вид армирования на практике встречается редко, разве что в стержневых элементах конструкций); в [8, 9] построены структурные модели вязкоупругого поведения пространственно-армированных волокнистых композитов. К недостатку двух последних публикаций относится то, что монолитная в реальности композитная среда представляется в виде отдельных однонаправленно армированных стержней, ориентация которых

соответствует заданным направлениям армирования; при этом указанные армированные стержни получаются не связанными между собой в единое целое (в монолитный материал).

Эффективные характеристики заполнителей, входящих в состав трехслойных панелей и представляющих собой ребристо-пространственные конструкции (типа сотовых, гофрированных и других), вследствие важности их знания для практики, определялись многими авторами на основе различных структурных подходов [10, 11 и других], детальный анализ которых содержится, в частности, в обзорной статье [12].

Моделирование же механического поведения криволинейно-армированных ребристыми элементами композитных сред в настоящее время находится в зачаточном состоянии. Так, в [13] найдены эффективные упругие характеристики грунтов, армированных пространственной георешеткой, а в [14] — эффективные термоупругие характеристики ребристо-армированных пенопластмасс (в [13] и других работах тех же авторов, в отличие от [14], не учитываются все условия механического контакта армирующих элементов со связующим, роль которого играет грунт).

Целью настоящего исследования является построение линейной модели термовязкоупругого поведения пенопластмассы со сложным (криволинейным) ребристо-пространственным армированием.

2. Построение структурной модели

Пусть имеется термовязкоупругий слой единичной толщины h , в плоскости (Ox_1x_2) армированный регулярно объемной решеткой (элементы объемной решетки — ребристой конструкции — представляют собой цилиндрические оболочечные элементы, образующие которых параллельны оси Ox_3 декартовой системы координат $(Ox_1x_2x_3)$; ось Ox_3 направлена по толщине слоя). Выделим из этого композитного материала простейший представительный элемент (ячейку) объемом $V = a \times b \times h$ (Рис. 1, *a*) так, чтобы любой другой элемент композита можно было получить параллельным переносом ячейки по направлению оси Ox_1 на расстояние an , по направлению Ox_2 — на расстояние bm , а по направлению Ox_3 — на расстояние hl ($n, m, l = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$).

Изображенная на рисунке 1, *a* ячейка имеет достаточно общий тип армирования. Из подобной структуры путем задания геометрии армирующих элементов можно получить ребристые конструкции многих видов, используемых на сегодняшний день в практике [10, 12, 13, 15]: сотовые (Рис. 1, *б*), складчатые, типа гофра и другие. Ячейка на рисунке 1, *a* усилена четырьмя армирующими элементами, два из которых криволинейные (1 и 2) и два плоские (3 и 4); сотовая структура на рисунке 1, *б* состоит из двух кусочно-плоских армирующих элементов 1 и 2. С каждым k -м ($1 \leq k \leq K = 4$) армирующим элементом свяжем свою локальную прямоугольную систему координат $(Ox_1^{(k)}x_2^{(k)}x_3^{(k)})$, в которой $x_3^{(k)} \equiv x_3$ (см. Рис. 1, *a*). Локальная система получается поворотом глобальной системы координат $(Ox_1x_2x_3)$ на угол $\varphi_k(\zeta)$ вокруг вертикальной оси Ox_3 , причем $\varphi_3 \equiv \varphi_4 \equiv \pi/2$, а φ_1 и φ_2 являются функциями естественной координаты ζ , откладываемой вдоль направляющих линий криволинейных элементов 1 и 2 (оси $Ox_1^{(k)}$ являются касательными к направляющим линиям, а оси $Ox_2^{(k)}$ — перпендикулярными этим линиям).

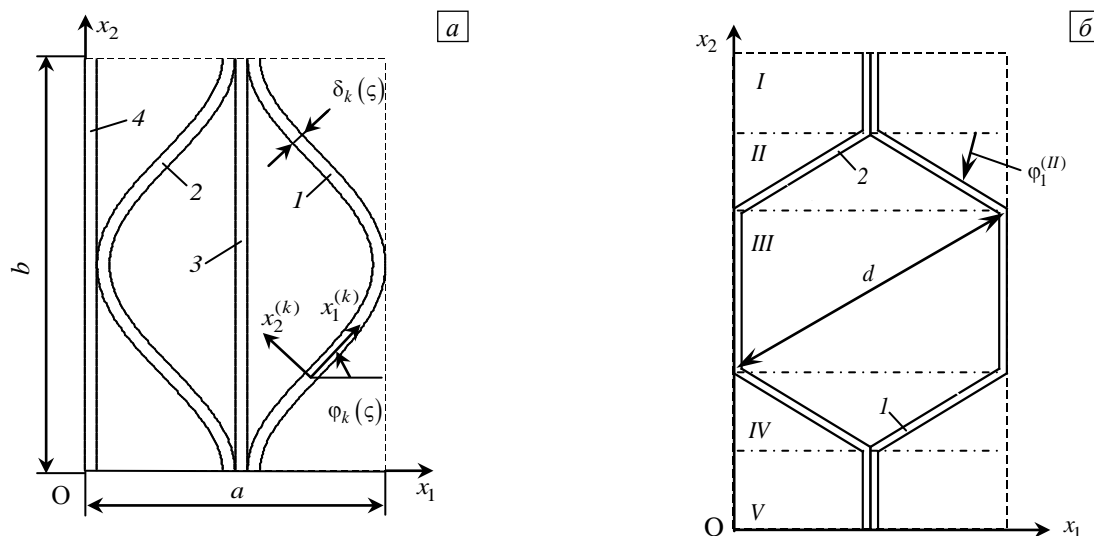


Рис. 1. Представительный элемент (ячейка) композита, армированного пространственной ребристой конструкцией (вид сверху): ячейка общего вида (*a*) и сотовая (*б*)

Все компоненты композиции считаются анизотропными стабильными материалами [16–18], причем определяющие соотношения для материала связующего (пенопластмассы) задаются в глобальной системе координат $(Ox_1x_2x_3)$, а для материала k -го армирующего элемента — в локальной системе $(Ox_1^{(k)}x_2^{(k)}x_3^{(k)})$. Кроме того, для удобства дальнейшего изложения, как и в [17, 18], напряженно-деформированное состояние компонентов композиции и эквивалентного материала будем описывать не тензорами напряжений и деформаций, а шестикомпонентными векторами напряжений и деформаций, что позволяет представить определяющие соотношения в компактной матричной форме.

Предполагается, что термовязкоупругое поведение стабильных в отношении фазовых превращений материалов компонентов композиции (в дальнейшем фазовых материалов) не выходит за рамки модели обобщенного тела Максвелла–Томсона, согласно которой на наследственно-упругую деформацию накладывается вязкое течение [19, 20]. Определяющие уравнения этой модели для материалов компонентов композиции можно записать так [16–20]:

$$\sigma_i^{(k)}(t) = a_{ij}^{(k)}(\varepsilon_j^{(k)}(t) - \alpha_j^{(k)}T_k(t)) + \int_0^t \left[\sum_{m=1}^{M_k} B_{ij,m}^{(k)} \exp\left(-\frac{t-\tau}{n_m^{(k)}}\right) \dot{\varepsilon}_j^{(k)}(\tau) - \sum_{s=1}^{N_k} \beta_{i,s}^{(k)} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta_s^{(k)}}\right) \dot{T}_k(\tau) \right] d\tau + c_{ij}^{(k)} \dot{\varepsilon}_j^{(k)}(t) - d_i^{(k)} \dot{T}_k(t) \quad (i = 1, 2, \dots, 6, k = 0, 1, 2, \dots, K), \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_k^* &= \{\sigma_{11}^{(k)}, \sigma_{22}^{(k)}, \sigma_{33}^{(k)}, \sigma_{12}^{(k)}, \sigma_{23}^{(k)}, \sigma_{31}^{(k)}\} = \{\sigma_1^{(k)}, \sigma_2^{(k)}, \sigma_3^{(k)}, \sigma_4^{(k)}, \sigma_5^{(k)}, \sigma_6^{(k)}\}; \\ \varepsilon_k^* &= \{\varepsilon_{11}^{(k)}, \varepsilon_{22}^{(k)}, \varepsilon_{33}^{(k)}, \varepsilon_{12}^{(k)}, \varepsilon_{23}^{(k)}, \varepsilon_{31}^{(k)}\} = \{\varepsilon_1^{(k)}, \varepsilon_2^{(k)}, \varepsilon_3^{(k)}, \varepsilon_4^{(k)}, \varepsilon_5^{(k)}, \varepsilon_6^{(k)}\}; \\ \alpha_k^* &= \{\alpha_{11}^{(k)}, \alpha_{22}^{(k)}, \alpha_{33}^{(k)}, \alpha_{12}^{(k)}, \alpha_{23}^{(k)}, \alpha_{31}^{(k)}\} = \{\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, \alpha_3^{(k)}, \alpha_4^{(k)}, \alpha_5^{(k)}, \alpha_6^{(k)}\}; \end{aligned} \quad (2)$$

$\sigma_i^{(k)}$ — компоненты вектора напряжений σ_k ; $\varepsilon_i^{(k)}$ — компоненты вектора деформаций ε_k ; $\alpha_i^{(k)}$ — компоненты вектора коэффициентов теплового расширения α_k ; T_k — отклонение температуры материала от температуры естественного состояния; $a_{ij}^{(k)}$ — компоненты матрицы жесткости; $c_{ij}^{(k)}$ — компоненты матрицы линейных вязкостей материала; $d_i^{(k)}$ — элементы шестикомпонентного вектора линейных температурных вязкостей; $B_{ij,m}^{(k)}$, $n_m^{(k)}$, M_k и $\beta_{i,s}^{(k)}$, $\theta_s^{(k)}$, N_k — механические и тепловые линейно-наследственные характеристики материала (постоянные $n_m^{(k)}$, $\theta_s^{(k)}$ имеют смысл времени релаксации); K — количество армирующих элементов в представительной ячейке; k — номер фазового материала композиции (при $k=0$ соответствующие соотношения относятся к связующему — пенопластмассе, при $1 \leq k \leq K$ соотношения относятся к k -му армирующему элементу ячейки); символ «*» означает операцию транспонирования, точка над функцией — производную по времени t . В соотношениях (1) и далее по нижнему повторяющемуся индексу « j » производится суммирование от 1 до 6. Величины, определенные в локальной системе координат $(x_1^{(k)}x_2^{(k)}x_3^{(k)})$, связанной с k -м армирующим элементом, будем обозначать символами с чертой (например, $\overline{\varepsilon}_i^{(k)}$), а символами без черты — те же величины, имеющие привязку к глобальной системе (например, $\varepsilon_i^{(k)}$). Соотношения (1), согласно этому, записаны в глобальной системе координат для всех k . Равенства (2) задают соответствия между шестью компонентами f_i ($i = \overline{1, 6}$) некоторого вектора \mathbf{f} и компонентами согласующегося с ним симметричного тензора второго ранга f_{il} ($i, l = \overline{1, 2, 3}$).

Соотношения (1) отвечают самому общему случаю, когда предполагается, что и армирующие элементы обладают линейно-наследственными и вязкими свойствами (например, изготовлены из жестких или армированных волокнами полимеров [13, 15]); если же армирующие элементы при заданных уровнях температуры не обладают этими свойствами (например, изготовлены из металла и не подвержены ползучести [19, 21]), то в (1) следует формально принять $B_{ij,m}^{(k)} = 0$, $\beta_{i,s}^{(k)} = 0$, $\theta_s^{(k)} = 0$, $d_i^{(k)} = 0$ ($k \neq 0$).

Постоянные $B_{ij,m}^{(k)}$, $n_m^{(k)}$, $\beta_{i,s}^{(k)}$, $\theta_s^{(k)}$, характеризующие в (1) экспоненциальные ядра релаксации, могут быть найдены из экспериментов на релаксацию, после чего постоянные $c_{ij}^{(k)}$, $d_i^{(k)}$ идентифицируются из экспериментов на ползучесть для k -го фазового материала. Заметим, что экспериментальному определению вязкоупругих характеристик полимерных материалов посвящены многочисленные публикации [16, 18–20, 22–25 и другие], поэтому здесь не будем останавливаться на обсуждении этого вопроса, так как это не является целью настоящего исследования. Далее предполагаем, что все характеристики материалов компонентов композиции, входящие в (1), известны из ранее проведенных экспериментов.

Представление в виде линейных комбинаций экспоненциальных функций с числом слагаемых M_k и N_k позволяет аппроксимировать ядра интегральных операторов и более сложной структуры, чем в (1), в том числе

слабосингулярные ядра [26, 27]. В частности, с помощью суммы достаточно большого количества экспонент можно с желаемой степенью точности изобразить любую экспериментально измеренную монотонно убывающую кривую релаксации (см. стр. 62 в [16]). Продемонстрируем это на примере модуля релаксации $E(t)$ полистирола, используемого в качестве заполнителя в реальных трехслойных панелях [1]. В таблице приведены экспериментальные значения $\lg E(t_m)$ для полистирола, определенные в фиксированные моменты времени $\lg t_m$, $1 \leq m \leq 26$ (см. стр. 517 в [16]), и вычисленные по этим данным характеристики экспоненциальных ядер релаксации B_m , n_m . При этом использовалось следующее соотношение, являющееся частным случаем (1) при отсутствии вязкого течения [17]:

$$\sigma(t) = \tilde{E}_0 \varepsilon(t) + \int_0^t \sum_{m=1}^M B_m \exp\left(-\frac{t-\tau}{n_m}\right) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau = \left(\tilde{E}_0 + \sum_{m=1}^M B_m\right) \varepsilon(t) - \sum_{m=1}^M \frac{B_m}{n_m} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{n_m}\right) \varepsilon(\tau) d\tau, \quad \varepsilon(0) = 0, \quad M = 25. \quad (3)$$

Характеристики модуля релаксации полистирола [16]

Номер момента времени в эксперименте или номер слагаемого в (3) m	Экспериментальные данные		Результаты вычислений	
	$\lg t_m$, с	$\lg E(t_m)$, Па	n_m , с	B_m , Па
1	-8,0	9,22	$1,0727 \cdot 10^4$	$1,1383 \cdot 10^4$
2	-7,5	9,17	$1,2897 \cdot 10^3$	$3,9639 \cdot 10^4$
3	-7,0	9,05	$6,1873 \cdot 10^2$	$1,1137 \cdot 10^4$
4	-6,5	8,89	$1,5129 \cdot 10^2$	$6,6304 \cdot 10^4$
5	-6,0	8,64	$5,4249 \cdot 10^1$	$5,2480 \cdot 10^4$
6	-5,5	8,26	$1,7956 \cdot 10^1$	$6,3068 \cdot 10^4$
7	-5,0	7,82	5,9757	$5,8111 \cdot 10^4$
8	-4,5	7,43	1,8528	$6,5883 \cdot 10^4$
9	-4,0	7,12	$5,8462 \cdot 10^{-1}$	$6,8140 \cdot 10^4$
10	-3,5	6,85	$1,2863 \cdot 10^{-1}$	$5,2931 \cdot 10^5$
11	-3,0	6,59	$6,5704 \cdot 10^{-2}$	$-1,1852 \cdot 10^5$
12	-2,5	6,33	$1,6908 \cdot 10^{-2}$	$3,2507 \cdot 10^5$
13	-2,0	6,10	$3,9204 \cdot 10^{-3}$	$2,0607 \cdot 10^6$
14	-1,5	5,91	$1,8911 \cdot 10^{-3}$	$6,3918 \cdot 10^5$
15	-1,0	5,84	$4,4308 \cdot 10^{-4}$	$5,5695 \cdot 10^6$
16	-0,5	5,65	$1,6218 \cdot 10^{-4}$	$4,7392 \cdot 10^6$
17	0	5,54	$4,4732 \cdot 10^{-5}$	$1,8442 \cdot 10^7$
18	0,5	5,45	$1,3763 \cdot 10^{-5}$	$4,3980 \cdot 10^7$
19	1,0	5,34	$4,0976 \cdot 10^{-6}$	$1,6316 \cdot 10^8$
20	1,5	5,20	$1,3641 \cdot 10^{-6}$	$3,5418 \cdot 10^8$
21	2,0	5,01	$5,0937 \cdot 10^{-7}$	$3,7506 \cdot 10^8$
22	2,5	4,77	$2,0003 \cdot 10^{-7}$	$2,4615 \cdot 10^8$
23	3,0	4,49	$5,6171 \cdot 10^{-8}$	$4,4245 \cdot 10^8$
24	3,5	4,11	$2,4200 \cdot 10^{-8}$	$1,4113 \cdot 10^8$
25	4,0	3,62	$1,0363 \cdot 10^{-8}$	$-5,6082 \cdot 10^7$
26	4,5	2,95	—	—

Задавая $\varepsilon(t)$ в (3) в виде функции класса Хевисайда [20] $\varepsilon(t) = \varepsilon \times \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0, \\ 1 & \text{при } t > 0, \end{cases} \varepsilon = \text{const}$, получим

$$\sigma(t) = E_0 \varepsilon - \varepsilon \sum_{m=1}^M B_m (1 - \exp(-t/n_m)), \quad (4)$$

где $E_0 = \tilde{E}_0 + \sum_{m=1}^M B_m = \text{const}$. Из (4) следует выражение для модуля релаксации

$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon} = E_0 - \sum_{m=1}^M B_m (1 - \exp(-t/n_m)). \quad (5)$$

На рисунке 2 для двух последовательных интервалов времени и при разных масштабах по оси ординат изображена зависимость (5) при значениях B_m , n_m , приведенных в таблице, и значении $E_0 = 1,7426$ ГПа (см. (4)), полученном экстраполяцией экспериментальных данных $E(t_m)$ на момент времени $t = 0$. Точками на рисунке отмечены экспериментальные значения $E(t_m)$ из таблицы. Из рисунка видно, что аналитическая зависимость (5) при $M = 25$ хорошо аппроксимирует экспериментальные данные. Такая же хорошая аппроксимация наблюдается и на всем временном интервале, приведенном в таблице для экспериментальных данных.

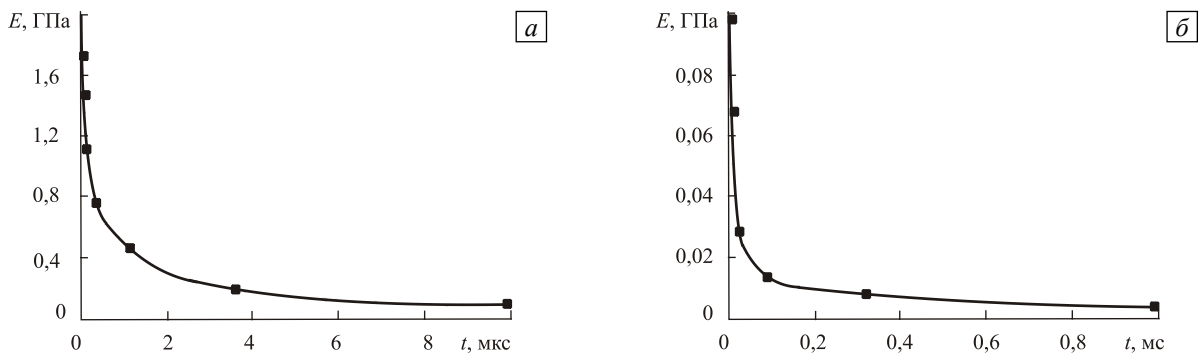


Рис. 2. Вычисленный модуль релаксации полистирола в интервалах времени $0 < t \leq 0$ (а) и $10 \text{ мкс} < t \leq 1 \text{ мс}$ (б); точками отмечены экспериментальные значения

Так как установить фактическое распределение напряжений и деформаций в композите, где основной материал (пенопластмасса) имеет многочисленные более жесткие включения сложной формы, весьма затруднительно [17], то для нахождения пригодных для практического применения зависимостей, характеризующих определяющие соотношения эквивалентного материала, необходимо принять некоторые исходные допущения:

1. Количество представительных ячеек во всех направлениях x_i достаточно велико, что позволяет рассматривать эквивалентный композиту материал как квазиоднородный анизотропный.

2. Плоскостями, параллельными отсчетной плоскости (Ox_1x_3), представительную ячейку можно разбить на субэлементы, в пределах каждого из которых армирующие элементы приближенно можно считать плоскими (на рисунке 1, б ячейка с армированием в виде соты разбита на пять субэлементов I–V.)

3. Между пенопластмассой и каждым армирующим элементом существует полное термомеханическое сцепление.

4. В пределах каждого субэлемента ячейки возникающие деформации, напряжения и температуры во всех компонентах и в композиции кусочно-постоянны. Эффектами высших порядков, связанными с изменением полей деформаций, напряжений и температур в малых окрестностях границ контакта пенопластмассы и армирующих элементов, пренебрегаем.

5. Осредненные поля напряжений, деформаций и температуры в композиции каждого субэлемента вычисляются по правилу простой смеси — пропорционально объемному содержанию каждого компонента.

6. Осредненные поля напряжений, деформаций и температуры в представительной ячейке находятся по правилу простой смеси — пропорционально объемному содержанию каждого субэлемента.

7. Все фазовые материалы линейно-термовязкоупруги, анизотропны и однородны; связь между напряжениями, деформациями и температурой в них задается определяющими уравнениями (1).

Традиционно для решения задач, предметом исследования которых является линейно-термовязкоупругое поведение конструкций из материалов с определяющими соотношениями типа (1), применяется преобразование Лапласа [17, 18, 20]. Однако это преобразование оказывается эффективным лишь в тех случаях, для которых известны аналитические решения соответствующих линейно-упругих задач [18]. В связи с этим и исходя из того, что механическое поведение современных сложных слоистых конструкций, отдельные слои которых представляют собой армированную пенопластмассу, целесообразно определять численными методами [4, 6, 7, 27], настоящее исследование посвящено разработке численно-аналитического подхода к моделированию термовязкоупругого поведения ребристо-армированного композита

из линейно-наследственных фазовых материалов без привлечения преобразования Лапласа и функций комплексного переменного [18].

С этой целью, по аналогии с (3), (4), предварительно вычислим интегралы в (1) по частям и получим

$$\begin{aligned} \sigma_i(t) = & \left(a_{ij} + \sum_m B_{ij,m} \right) \varepsilon_j(t) - \left(a_{ij} \alpha_j + \sum_s \beta_{i,s} \right) T(t) - \int_0^t \left[\sum_m \frac{B_{ij,m}}{n_m} \exp\left(-\frac{t-\tau}{n_m}\right) \times \right. \\ & \left. \times \varepsilon_j(\tau) - \sum_s \frac{\beta_{i,s}}{\theta_s} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta_s}\right) T(\tau) \right] d\tau + c_{ij} \dot{\varepsilon}_j(t) - d_i \dot{T}(t) \quad (i=1, 2, \dots, 6), \end{aligned} \quad (6)$$

где, как обычно [20], предполагается, что до начального момента времени $t_0 = 0$ конструкция находилась в естественном состоянии, то есть $\varepsilon_j(t) = 0$, $T(t) = 0$ при $t \leq t_0$. Здесь и далее для упрощения записи в промежуточных выкладках индекс « k », определяющий номер фазы композиции, опускается; суммирование производится по указанным индексам « m » и « s » от 1 до M и N соответственно (точнее, до M_k и N_k).

Введем в рассмотрение интегралы вида:

$$E_{j,m}(t) \equiv \int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{n_m}\right) \varepsilon_j(\tau) d\tau, \quad \Theta_s(t) \equiv \int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta_s}\right) T(\tau) d\tau. \quad (7)$$

Соотношения (6) с учетом (7) запишутся так:

$$\sigma_i(t) = \left(a_{ij} + \sum_m B_{ij,m} \right) \varepsilon_j(t) - \left(a_{ij} \alpha_j + \sum_s \beta_{i,s} \right) T(t) - \sum_m \frac{B_{ij,m}}{n_m} E_{j,m}(t) + \sum_s \frac{\beta_{i,s}}{\theta_s} \Theta_s(t) + c_{ij} \dot{\varepsilon}_j(t) - d_i \dot{T}(t) \quad (i=1, 2, \dots, 6). \quad (8)$$

Дискретизируем задачу по времени t , то есть рассмотрим ее решения в моменты времени t_n ($n = 0, 1, 2, \dots$). Предполагаем, что эти решения уже имеются, то есть известны значения функций

$$\sigma_j^n \equiv \sigma_j(t_n), \quad \dot{\varepsilon}_j^n \equiv \dot{\varepsilon}_j(t_n), \quad \varepsilon_j^n \equiv \varepsilon_j(t_n), \quad \dot{T}^n \equiv \dot{T}(t_n), \quad T^n \equiv T(t_n), \quad E_{j,m}^n \equiv E_{j,m}(t_n), \quad \Theta_s^n \equiv \Theta_s(t_n). \quad (9)$$

Запишем соотношения (8) для последующего момента времени

$$t_{n+1} = t_n + \tau_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (10)$$

где τ_n — шаг по времени (не обязательно равномерный). Из соотношений (8) с учетом обозначений, аналогичных (9), следует:

$$\sigma_i^{n+1} = \left(a_{ij} + \sum_m B_{ij,m} \right)^{n+1} \varepsilon_j^{n+1} - \left(a_{ij} \alpha_j + \sum_s \beta_{i,s} \right)^{n+1} T^{n+1} - \sum_m \frac{B_{ij,m}}{n_m} E_{j,m}^{n+1} + \sum_s \frac{\beta_{i,s}}{\theta_s} \Theta_s^{n+1} + c_{ij} \dot{\varepsilon}_j^{n+1} - d_i \dot{T}^{n+1} \quad (i=1, 2, \dots, 6). \quad (11)$$

Используя свойство вырожденности экспоненциальных разностных ядер [20] в равенствах (7), с учетом соотношений (9), (10) преобразуем в (11) величины $E_{j,m}^{n+1}$ и Θ_s^{n+1} :

$$\begin{aligned} E_{j,m}^{n+1} & \equiv \int_0^{t_{n+1}} \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\tau}{n_m}\right) \varepsilon_j(\tau) d\tau = \int_0^{t_n} \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\tau}{n_m}\right) \varepsilon_j(\tau) d\tau + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\tau}{n_m}\right) \varepsilon_j(\tau) d\tau = \\ & = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\tau}{n_m}\right) \varepsilon_j(\tau) d\tau + \int_0^{t_n} \exp\left(-\frac{t_{n+1}-t_n}{n_m}\right) \times \exp\left(-\frac{t_n-\tau}{n_m}\right) \varepsilon_j(\tau) d\tau = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\tau}{n_m}\right) \varepsilon_j(\tau) d\tau + \exp\left(-\frac{\tau_n}{n_m}\right) E_{j,m}^n, \quad (12) \\ \Theta_s^{n+1} & \equiv \int_0^{t_{n+1}} \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\tau}{\theta_s}\right) T(\tau) d\tau = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\tau}{\theta_s}\right) T(\tau) d\tau + \exp\left(-\frac{\tau_n}{\theta_s}\right) \Theta_s^n. \end{aligned}$$

Для приближенного вычисления первых интегралов в правых частях равенств (12) применим формулу трапеций, имеющую второй порядок точности по τ_n . Тогда:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\tau}{n_m}\right) \varepsilon_j(\tau) d\tau \approx \frac{\tau_n}{2} \left(\exp\left(-\frac{t_{n+1}-t_{n+1}}{n_m}\right) \varepsilon_j + \exp\left(-\frac{t_{n+1}-t_n}{n_m}\right) \varepsilon_j \right) = \frac{\tau_n}{2} \left(\varepsilon_j + \exp\left(-\frac{\tau_n}{n_m}\right) \varepsilon_j \right),$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\tau}{\theta_s}\right) T(\tau) d\tau \approx \frac{\tau_n}{2} \left(T + \exp\left(-\frac{\tau_n}{\theta_s}\right) T \right).$$
(13)

Подставив (13) в соотношения (12), получим приближенные формулы:

$$E_{j,m}^{n+1} \approx \frac{\tau_n}{2} \left(\varepsilon_j + \exp\left(-\frac{\tau_n}{n_m}\right) \varepsilon_j \right) + \exp\left(-\frac{\tau_n}{n_m}\right) E_{j,m}^n = \frac{\tau_n^{n+1}}{2} \varepsilon_j + \exp\left(-\frac{\tau_n}{n_m}\right) \left(\frac{\tau_n^n}{2} \varepsilon_j + E_{j,m}^n \right) \quad (j = \overline{1, 6}),$$

$$\Theta_s^{n+1} \approx \frac{\tau_n^{n+1}}{2} T + \exp\left(-\frac{\tau_n}{\theta_s}\right) \left(\frac{\tau_n^n}{2} T + \Theta_s^n \right).$$
(14)

Далее используем формулу трапеций для записи следующих приближенных равенств:

$$\varepsilon_j^{n+1} - \varepsilon_j^n = \frac{\tau_n}{2} \left(\dot{\varepsilon}_j^{n+1} + \dot{\varepsilon}_j^n \right), \quad T^{n+1} - T^n = \frac{\tau_n}{2} \left(\dot{T}^{n+1} + \dot{T}^n \right).$$

Из них следует

$$\dot{\varepsilon}_j^{n+1} = \frac{2}{\tau_n} \left(\varepsilon_j^{n+1} - \varepsilon_j^n \right) - \dot{\varepsilon}_j^n, \quad \dot{T}^{n+1} = \frac{2}{\tau_n} \left(T^{n+1} - T^n \right) - \dot{T}^n.$$
(15)

Подстановка выражений (14), (15) в соотношения (11), восстановление индекса « k » и приведение подобных слагаемых приводят к равенству

$$\sigma_i^{n+1} = \left(a_{ij}^{(k)} + \sum_{m=1}^{M_k} B_{ij,m}^{(k)} \left(1 - \frac{\tau_n}{2n_m^{(k)}} \right) + \frac{2}{\tau_n} c_{ij}^{(k)} \right) \varepsilon_j^{n+1} - \left(a_{ij}^{(k)} \alpha_j^{(k)} + \sum_{s=1}^{N_k} \beta_{i,s}^{(k)} \left(1 - \frac{\tau_n}{2\theta_s^{(k)}} \right) + \frac{2}{\tau_n} d_i^{(k)} \right) T_k^{n+1} -$$

$$- \sum_{m=1}^{M_k} \frac{B_{ij,m}^{(k)}}{n_m^{(k)}} \exp\left(-\frac{\tau_n}{n_m^{(k)}}\right) \left(\frac{\tau_n^n}{2} \varepsilon_j^{(k)} + E_{j,m}^{(k)} \right) + \sum_{s=1}^{N_k} \frac{\beta_{i,s}^{(k)}}{\theta_s^{(k)}} \exp\left(-\frac{\tau_n}{\theta_s^{(k)}}\right) \left(\frac{\tau_n^n}{2} T_k^n + \Theta_s^{(k)} \right) -$$

$$- c_{ij}^{(k)} \left(\frac{2}{\tau_n} \varepsilon_j^{(k)} + \dot{\varepsilon}_j^{(k)} \right) + d_i^{(k)} \left(\frac{2}{\tau_n} T_k^n + \dot{T}_k^n \right) \quad (i = \overline{1, 6}, \quad 0 \leq k \leq K),$$
(16)

которое можно записать в матричной форме

$$\sigma_k^{n+1} = A_k^n \varepsilon_k^n - B_k^n T_k^n + p_k^n \quad (0 \leq k \leq K, \quad n = 0, 1, 2, \dots),$$
(17)

где $A_k^n = \left(A_{ij}^{(k)} \right)$ — 6×6 -матрица, $B_k^n = \left\{ B_i^{(k)} \right\}$, $p_k^n = \left\{ p_i^{(k)} \right\}$ — 6 -компонентные векторы-столбцы, элементы которых, согласно (16), имеют выражения

$$A_{ij}^{(k)} \equiv a_{ij}^{(k)} + \sum_{m=1}^{M_k} B_{ij,m}^{(k)} \left(1 - \frac{\tau_n}{2n_m^{(k)}} \right) + \frac{2}{\tau_n} c_{ij}^{(k)} \quad (i, j = \overline{1, 6}), \quad B_i^{(k)} \equiv a_{ij}^{(k)} \alpha_j^{(k)} + \sum_{s=1}^{N_k} \beta_{i,s}^{(k)} \left(1 - \frac{\tau_n}{2\theta_s^{(k)}} \right) + \frac{2}{\tau_n} d_i^{(k)},$$

$$p_i^{(k)} \equiv - \sum_{m=1}^{M_k} \frac{B_{ij,m}^{(k)}}{n_m^{(k)}} \exp\left(-\frac{\tau_n}{n_m^{(k)}}\right) \left(\frac{\tau_n^n}{2} \varepsilon_j^{(k)} + E_{j,m}^{(k)} \right) + \sum_{s=1}^{N_k} \frac{\beta_{i,s}^{(k)}}{\theta_s^{(k)}} \exp\left(-\frac{\tau_n}{\theta_s^{(k)}}\right) \left(\frac{\tau_n^n}{2} T_k^n + \Theta_s^{(k)} \right) -$$

$$- c_{ij}^{(k)} \left(\frac{2}{\tau_n} \varepsilon_j^{(k)} + \dot{\varepsilon}_j^{(k)} \right) + d_i^{(k)} \left(\frac{2}{\tau_n} T_k^n + \dot{T}_k^n \right) \quad (i = 1, 2, \dots, 6, \quad 0 \leq k \leq K).$$
(18)

Так как в момент времени t_n значения функций (см. (9)) предполагаются уже известными, то компоненты матрицы A_k^n и векторов B_k^n , p_k^n в (17), согласно равенствам (18), также известны. При этом матрицу A_k^n можно трактовать как матрицу упругих жесткостей, вектор B_k^n — как вектор температурных жесткостей, а вектор p_k^n — как вектор начальных напряжений в некотором линейно-упругом фиктивном материале, соответствующем в момент времени t_{n+1} термовязкоупругому материалу k -го компонента композиции. При таком толковании вектор p_k^n можно записать в форме, аналогичной (2):

$$\mathbf{p}_k^* = \left\{ p_{11}^{(k)}, p_{22}^{(k)}, p_{33}^{(k)}, p_{12}^{(k)}, p_{23}^{(k)}, p_{31}^{(k)} \right\} = \left\{ p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, p_3^{(k)}, p_4^{(k)}, p_5^{(k)}, p_6^{(k)} \right\}. \quad (19)$$

На основании равенств (17) с учетом (18) построим определяющие соотношения для материала, в момент времени t_{n+1} эквивалентного рассматриваемому композиту. Но прежде отметим, что для k -го армирующего элемента ячейки соотношения (16)–(19), выраженные в глобальной системе координат x_i , формально не изменятся при записи их в локальной системе координат $x_i^{(k)}$ ($i=1, 2, 3$, $1 \leq k \leq K$), связанной с этим элементом: нужно лишь соответствующие функции и величины пометить сверху чертой. Тогда соотношения (17) примут вид:

$$\boldsymbol{\sigma}_0^{n+1} = A_0 \boldsymbol{\varepsilon}_0 - \mathbf{B}_0 T_0 + \mathbf{p}_0, \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}_k^{n+1} = \bar{A}_k \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_k - \bar{\mathbf{B}}_k T_k + \bar{\mathbf{p}}_k, \quad (1 \leq k \leq K, \quad n = 0, 1, 2, \dots), \quad (20)$$

где матрицы \bar{A}_k и векторы $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_k$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$, $\bar{\mathbf{B}}_k$, $\bar{\mathbf{p}}_k$ имеют структуру (2), (18), (19), если принять во внимание замены:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_k^{n+1} &\rightarrow \bar{\boldsymbol{\sigma}}_k^{n+1}, \quad \boldsymbol{\sigma}_i^{(k)} \rightarrow \bar{\boldsymbol{\sigma}}_i^{(k)}, \quad \boldsymbol{\sigma}_{ij}^{(k)} \rightarrow \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}^{(k)}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_k^{n+1} \rightarrow \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^{n+1}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(k)} \rightarrow \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{(k)}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{(k)} \rightarrow \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^{(k)}, \quad \mathbf{B}_k \rightarrow \bar{\mathbf{B}}_k, \quad B_i^{(k)} \rightarrow \bar{B}_i^{(k)}, \\ \mathbf{p}_k \rightarrow \bar{\mathbf{p}}_k, \quad p_i^{(k)} &\rightarrow \bar{p}_i^{(k)}, \quad p_{ij}^{(k)} \rightarrow \bar{p}_{ij}^{(k)}, \quad A_k \rightarrow \bar{A}_k, \quad A_{ij}^{(k)} \rightarrow \bar{A}_{ij}^{(k)}, \quad a_{ij}^{(k)} \rightarrow \bar{a}_{ij}^{(k)}, \quad B_{ij,m}^{(k)} \rightarrow \bar{B}_{ij,m}^{(k)}, \quad c_{ij}^{(k)} \rightarrow \bar{c}_{ij}^{(k)}, \quad (21) \\ \alpha_i^{(k)} &\rightarrow \bar{\alpha}_i^{(k)}, \quad \beta_{i,s}^{(k)} \rightarrow \bar{\beta}_{i,s}^{(k)}, \quad d_i^{(k)} \rightarrow \bar{d}_i^{(k)}, \quad E_{j,m}^{(k)} \rightarrow \bar{E}_{j,m}^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq K. \end{aligned}$$

Исходя из равенств (20), допущение 7 можно заменить следующим:

7'. В момент времени t_{n+1} материалы компонентов композиции можно рассматривать как линейно-термоупругие, анизотропные и однородные; связь между напряжениями, деформациями и температурой в них при этом определяется соотношениями типа Дюамеля–Неймана (20).

Далее для сокращения записи верхние индексы « n » и « $n+1$ » будем отбрасывать, помня о том, что в равенствах (20) матрицы A_0 , \bar{A}_k и векторы \mathbf{B}_0 , $\bar{\mathbf{B}}_k$, \mathbf{p}_0 , $\bar{\mathbf{p}}_k$ ($1 \leq k \leq K$), согласно (9), (18), (21), известны в момент времени t_{n+1} .

В силу допущения 3 и 4 и условий сопряжения полей напряжений, перемещений и температур на поверхностях контакта k -го армирующего элемента в ячейке с пенопластмассой получим (см. Рис. 1, а и соответствия (2)):

$$T_0 = T_k \quad (1 \leq k \leq K), \quad (22)$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_2^{(k)} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_2^{(0,k)}, \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}_4^{(k)} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_4^{(0,k)}, \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}_5^{(k)} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_5^{(0,k)} \quad (1 \leq k \leq K), \quad (23)$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^{(k)} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^{(0,k)}, \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_3^{(k)} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_3^{(0,k)} \equiv \boldsymbol{\varepsilon}_3^{(0)}, \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_6^{(k)} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_6^{(0,k)} \quad (1 \leq k \leq K), \quad (24)$$

где $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_i^{(0,k)}$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{(0,k)}$ — компоненты векторов напряжений и деформаций в связующем (пенопластмассе), определенные в локальной системе координат $x_j^{(k)}$ ($j=1, 2, 3$) для k -го армирующего элемента ячейки.

Согласно допущениям 2 и 5 осредненные поля температуры, деформаций и напряжений в l -м субэлементе ячейки рассматриваемого композита определяются так:

$$\langle T \rangle_l = \omega_0^{(l)} T_0 + \sum_k \omega_k^{(l)} T_k^{(l)}, \quad (25)$$

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_l = \omega_0^{(l)} \boldsymbol{\varepsilon}_0^{(l)} + \sum_k \omega_k^{(l)} \boldsymbol{\varepsilon}_k^{(l)}, \quad (26)$$

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_l = \omega_0^{(l)} \boldsymbol{\sigma}_0^{(l)} + \sum_k \omega_k^{(l)} \boldsymbol{\sigma}_k^{(l)} \quad (l=1, 2, \dots, L). \quad (27)$$

Здесь выполняется условие нормировки

$$\omega_0^{(l)} + \sum_k \omega_k^{(l)} = 1 \quad (l=1, 2, \dots, L); \quad (28)$$

$\omega_0^{(l)}$, $\omega_k^{(l)}$ — относительное объемное содержание пенопластмассы (связующего) и армирующего элемента k -го семейства в l -м субэлементе ячейки; L — количество субэлементов в ячейке (на рисунке 1, б изображен случай с $L = 5$); $\boldsymbol{\varepsilon}_0^{(l)}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_k^{(l)}$, $\boldsymbol{\sigma}_0^{(l)}$, $\boldsymbol{\sigma}_k^{(l)}$ — векторы-столбцы деформаций и напряжений в связующем и k -м армирующем элементе l -го субэлемента ячейки (см. (2)), заданные в глобальной системе координат x_i ; суммирование по индексу « k » здесь и далее производится в пределах от 1 до K .

Из равенства (25) с учетом (22) и условия (28) следует

$$\langle T \rangle_l = T_k^{(l)} \quad (0 \leq k \leq K, \quad 1 \leq l \leq L), \quad (29)$$

то есть средняя температура композиции в пределах l -го субэлемента ячейки равна температуре каждого фазового материала.

Компоненты векторов-столбцов $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_k^{(l)}$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^{(l)}$ и $\boldsymbol{\sigma}_k^{(l)}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_k^{(l)}$ определяют напряженное и деформированное состояние k -го армирующего элемента в локальной $x_i^{(k)}$ и глобальной x_i ($i = 1, 2, 3$) системах координат, соответственно, и поэтому связаны матричными равенствами [17]

$$\boldsymbol{\sigma}_k^{(l)} = D_k^{(l)} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_k^{(l)}, \quad (30)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k^{(l)} = D_k^{(l)} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^{(l)} \quad (1 \leq k \leq K, \quad 1 \leq l \leq L), \quad (31)$$

где $D_k^{(l)} = (d_{ij}^{(l,k)})$ — 6×6 -матрица преобразований с ненулевыми компонентами

$$\begin{aligned} d_{11}^{(l,k)} = d_{22}^{(l,k)} = \cos^2 \varphi_k^{(l)}, \quad d_{12}^{(l,k)} = d_{21}^{(l,k)} = \sin^2 \varphi_k^{(l)}, \quad d_{14}^{(l,k)} = -d_{24}^{(l,k)} = -\sin 2\varphi_k^{(l)}, \quad d_{33}^{(l,k)} = 1, \\ d_{41}^{(l,k)} = -d_{42}^{(l,k)} = 0,5 \sin 2\varphi_k^{(l)}, \quad d_{44}^{(l,k)} = \cos 2\varphi_k^{(l)}, \quad d_{55}^{(l,k)} = d_{66}^{(l,k)} = \cos \varphi_k^{(l)}, \quad d_{56}^{(l,k)} = -d_{65}^{(l,k)} = \sin \varphi_k^{(l)}. \end{aligned} \quad (32)$$

Используя связь (30) и определяющие уравнения (20), из соотношения (27) с учетом (29) получим

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_l = \omega_0^{(l)} \boldsymbol{\sigma}_0^{(l)} + \sum_k \omega_k^{(l)} D_k^{(l)} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_k^{(l)} = \omega_0^{(l)} A_0 \boldsymbol{\varepsilon}_0^{(l)} + \sum_k \omega_k^{(l)} D_k^{(l)} \bar{A}_k \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^{(l)} - \left[\omega_0^{(l)} \mathbf{B}_0 + \sum_k \omega_k^{(l)} D_k^{(l)} \bar{\mathbf{B}}_k \right] \langle T \rangle_l + \\ + \omega_0^{(l)} \mathbf{p}_0^{(l)} + \sum_k \omega_k^{(l)} D_k^{(l)} \bar{\mathbf{p}}_k^{(l)} \quad (1 \leq l \leq L), \end{aligned} \quad (33)$$

где $\mathbf{p}_0^{(l)}$, $\bar{\mathbf{p}}_k^{(l)}$ — векторы-столбцы «начальных напряжений» в компонентах композиции l -го субэлемента ячейки.

Выразим в (33) деформации $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^{(l)}$ через $\boldsymbol{\varepsilon}_0^{(l)}$. Для этого воспользуемся равенствами (23), (24), правые части которых запишем в развернутом виде, согласно правилу преобразования тензоров второго ранга [17] при повороте системы координат на угол $\varphi_k^{(l)}$ вокруг оси $Ox_3 \equiv Ox_3^{(k)}$ (см. (30)–(32) и соответствия (2)):

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_2^{(l,k)} = \sigma_1^{(l,0)} \sin^2 \varphi_k^{(l)} + \sigma_2^{(l,0)} \cos^2 \varphi_k^{(l)} - \sigma_4^{(l,0)} \sin 2\varphi_k^{(l)}, \quad \bar{\sigma}_5^{(l,k)} = -\sigma_6^{(l,0)} \sin \varphi_k^{(l)} + \sigma_5^{(l,0)} \cos \varphi_k^{(l)}, \\ \bar{\sigma}_4^{(l,k)} = 0,5 (\sigma_2^{(l,0)} - \sigma_1^{(l,0)}) \sin 2\varphi_k^{(l)} + \sigma_4^{(l,0)} \cos 2\varphi_k^{(l)} \quad (1 \leq k \leq K, \quad 1 \leq l \leq L); \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_1^{(l,k)} = \varepsilon_1^{(l,0)} \cos^2 \varphi_k^{(l)} + \varepsilon_2^{(l,0)} \sin^2 \varphi_k^{(l)} + \varepsilon_4^{(l,0)} \sin 2\varphi_k^{(l)}, \\ \bar{\varepsilon}_3^{(l,k)} = \varepsilon_3^{(l,0)}, \quad \bar{\varepsilon}_6^{(l,k)} = \varepsilon_6^{(l,0)} \cos \varphi_k^{(l)} + \varepsilon_5^{(l,0)} \sin \varphi_k^{(l)} \quad (1 \leq k \leq K, \quad 1 \leq l \leq L), \end{aligned} \quad (35)$$

где $\bar{\sigma}_i^{(l,k)}$, $\sigma_i^{(l,0)}$, $\bar{\varepsilon}_i^{(l,k)}$, $\varepsilon_i^{(l,0)}$ ($i = \overline{1, 6}$) — компоненты векторов $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_k^{(l)}$, $\boldsymbol{\sigma}_0^{(l)}$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^{(l)}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_0^{(l)}$ соответственно; $\varphi_k^{(l)}$ — значение угла φ_k в l -м субэлементе ячейки (см. Рис. 1, б), которое, согласно допущению 2, постоянно в пределах этого субэлемента ($\varphi_k^{(l)} = \text{const}$).

Преобразуем равенства (34) с учетом (30), (35), (29) и соответствий (2), (19):

$$\begin{aligned} \bar{A}_{2j}^{(k)} \bar{\varepsilon}_j^{(l,k)} - \bar{B}_2^{(k)} \langle T \rangle_l + \bar{p}_2^{(l,k)} = (A_{1j}^{(0)} \varepsilon_j^{(l,0)} - B_1^{(0)} \langle T \rangle_l + p_1^{(l,0)}) \sin^2 \varphi_k^{(l)} + \\ + (A_{2j}^{(0)} \varepsilon_j^{(l,0)} - B_2^{(0)} \langle T \rangle_l + p_2^{(l,0)}) \cos^2 \varphi_k^{(l)} - (A_{4j}^{(0)} \varepsilon_j^{(l,0)} - B_4^{(0)} \langle T \rangle_l + p_4^{(l,0)}) \sin 2\varphi_k^{(l)}, \\ \bar{A}_{4j}^{(k)} \bar{\varepsilon}_j^{(l,k)} - \bar{B}_4^{(k)} \langle T \rangle_l + \bar{p}_4^{(l,k)} = -0,5 \sin 2\varphi_k^{(l)} (A_{1j}^{(0)} \varepsilon_j^{(l,0)} - B_1^{(0)} \langle T \rangle_l + p_1^{(l,0)}) + \\ + 0,5 \sin 2\varphi_k^{(l)} (A_{2j}^{(0)} \varepsilon_j^{(l,0)} - B_2^{(0)} \langle T \rangle_l + p_2^{(l,0)}) + \cos 2\varphi_k^{(l)} (A_{4j}^{(0)} \varepsilon_j^{(l,0)} - B_4^{(0)} \langle T \rangle_l + p_4^{(l,0)}), \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \bar{A}_{5j}^{(k)} \bar{\epsilon}_j^{(l,k)} - \bar{B}_5^{(k)} \langle T \rangle_l + \bar{p}_5^{(l,k)} = & - \left(A_{6j}^{(0)} \epsilon_j^{(l,0)} - B_6^{(0)} \langle T \rangle_l + p_6^{(l,0)} \right) \sin \varphi_k^{(l)} + \\ & + \left(A_{5j}^{(0)} \epsilon_j^{(l,0)} - B_5^{(0)} \langle T \rangle_l + p_5^{(l,0)} \right) \cos \varphi_k^{(l)} \quad (1 \leq k \leq K, 1 \leq l \leq L), \end{aligned}$$

где, как и прежде, по повторяющемуся индексу « j » производится суммирование от 1 до 6; $\bar{p}_i^{(l,k)}$, $p_i^{(l,0)}$ ($i = \overline{1, 6}$) — компоненты векторов $\mathbf{p}^{(l)}$, $\bar{\mathbf{p}}^{(l)}$ (см. (33)).

Систему шести равенств (35), (36) с учетом соответствий (2) можно записать в следующей матричной форме:

$$F_k^{(l)} \bar{\epsilon}_k^{(l)} = H_k^{(l)} \epsilon_0^{(l)} + \mathbf{S}_k^{(l)} \langle T \rangle_l + \mathbf{P}_k^{(l)} \quad (1 \leq k \leq K, 1 \leq l \leq L), \quad (37)$$

где $F_k^{(l)} = (F_{ij}^{(l,k)})$, $H_k^{(l)} = (H_{ij}^{(l,k)})$ — 6×6 -матрицы; $\mathbf{S}_k^{(l)} = \{S_i^{(l,k)}\}$, $\mathbf{P}_k^{(l)} = \{P_i^{(l,k)}\}$ — 6-компонентные векторы-столбцы, ненулевые элементы которых определяются по формулам:

$$\begin{aligned} F_{11}^{(l,k)} = F_{33}^{(l,k)} = F_{66}^{(l,k)} = 1, \quad F_{2j}^{(l,k)} = \bar{A}_{2j}^{(k)}, \quad F_{4j}^{(l,k)} = \bar{A}_{4j}^{(k)}, \quad F_{5j}^{(l,k)} = \bar{A}_{5j}^{(k)}, \\ H_{11}^{(l,k)} = \cos^2 \varphi_k^{(l)}, \quad H_{12}^{(l,k)} = \sin^2 \varphi_k^{(l)}, \quad H_{14}^{(l,k)} = \sin 2\varphi_k^{(l)}, \\ H_{2j}^{(l,k)} = A_{1j}^{(0)} \sin^2 \varphi_k^{(l)} + A_{2j}^{(0)} \cos^2 \varphi_k^{(l)} - A_{4j}^{(0)} \sin 2\varphi_k^{(l)}, \quad H_{33}^{(l,k)} = 1, \quad H_{4j}^{(l,k)} = 0,5 \sin 2\varphi_k^{(l)} (A_{2j}^{(0)} - A_{4j}^{(0)}) + A_{4j}^{(0)} \cos 2\varphi_k^{(l)}, \\ H_{5j}^{(l,k)} = -A_{6j}^{(0)} \sin \varphi_k^{(l)} + A_{5j}^{(0)} \cos \varphi_k^{(l)}, \quad H_{66}^{(l,k)} = \cos \varphi_k^{(l)}, \quad H_{65}^{(l,k)} = \sin \varphi_k^{(l)} \quad (j = \overline{1, 6}), \\ S_2^{(l,k)} = \bar{B}_2^{(k)} - B_1^{(0)} \sin^2 \varphi_k^{(l)} - B_2^{(0)} \cos^2 \varphi_k^{(l)} + B_4^{(0)} \sin 2\varphi_k^{(l)}, \\ S_4^{(l,k)} = \bar{B}_4^{(k)} - 0,5 (B_2^{(0)} - B_1^{(0)}) \sin 2\varphi_k^{(l)} - B_4^{(0)} \cos 2\varphi_k^{(l)}, \quad S_5^{(l,k)} = \bar{B}_5^{(k)} + B_6^{(0)} \sin \varphi_k^{(l)} - B_5^{(0)} \cos \varphi_k^{(l)}, \\ P_2^{(l,k)} = -\bar{p}_2^{(l,k)} + p_1^{(l,0)} \sin^2 \varphi_k^{(l)} + p_2^{(l,0)} \cos^2 \varphi_k^{(l)} - p_4^{(l,0)} \sin 2\varphi_k^{(l)}, \\ P_4^{(l,k)} = -\bar{p}_4^{(l,k)} + 0,5 (p_2^{(l,0)} - p_1^{(l,0)}) \sin 2\varphi_k^{(l)} + p_4^{(l,0)} \cos 2\varphi_k^{(l)}, \\ P_5^{(l,k)} = -\bar{p}_5^{(l,k)} - p_6^{(l,0)} \sin \varphi_k^{(l)} + p_5^{(l,0)} \cos \varphi_k^{(l)} \quad (1 \leq k \leq K, 1 \leq l \leq L). \end{aligned} \quad (38)$$

В силу равенств (38) $\det F_k^{(l)} \neq 0$, поэтому из уравнения (37) можно найти

$$\bar{\epsilon}_k^{(l)} = R_k^{(l)} \epsilon_0^{(l)} + \mathbf{Q}_k^{(l)} \langle T \rangle_l + \mathbf{\Pi}_k^{(l)} \quad (1 \leq k \leq K, 1 \leq l \leq L), \quad (39)$$

где 6×6 -матрица $R_k^{(l)}$ и 6-компонентные векторы $\mathbf{Q}_k^{(l)}$, $\mathbf{\Pi}_k^{(l)}$ имеют выражения:

$$R_k^{(l)} = (F_k^{(l)})^{-1} H_k^{(l)}, \quad \mathbf{Q}_k^{(l)} = (F_k^{(l)})^{-1} \mathbf{S}_k^{(l)}, \quad \mathbf{\Pi}_k^{(l)} = (F_k^{(l)})^{-1} \mathbf{P}_k^{(l)} \quad (1 \leq k \leq K, 1 \leq l \leq L); \quad (40)$$

$(F_k^{(l)})^{-1}$ — 6×6 -матрица, обратная $F_k^{(l)}$. Соотношение (39) позволяет установить деформации k -го армирующего элемента $\bar{\epsilon}_k^{(l)}$ (заданные в локальной системе координат $x_i^{(k)}$) через температуру $\langle T \rangle_l$ и деформации связующего $\epsilon_0^{(l)}$ (заданные в глобальной системе координат x_i) в пределах l -го субэлемента ячейки.

Подставим (39) в равенство (33), тогда, после приведения подобных слагаемых, получим:

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle_l = & \left(\omega_0^{(l)} A_0 + \sum_k \omega_k^{(l)} D_k^{(l)} \bar{A}_k R_k^{(l)} \right) \epsilon_0^{(l)} - \left[\omega_0^{(l)} \mathbf{B}_0 + \sum_k \omega_k^{(l)} D_k^{(l)} (\bar{\mathbf{B}}_k - \bar{A}_k \mathbf{Q}_k^{(l)}) \right] \langle T \rangle_l + \\ & + \omega_0^{(l)} \mathbf{p}_0^{(l)} + \sum_k \omega_k^{(l)} D_k^{(l)} (\bar{\mathbf{p}}_k^{(l)} + \bar{A}_k \mathbf{\Pi}_k^{(l)}) \quad (1 \leq l \leq L). \end{aligned} \quad (41)$$

Выразим в (41) деформации связующего $\epsilon_0^{(l)}$ через осредненные деформации композиции l -го субэлемента ячейки $\langle \epsilon \rangle_l$. С этой целью заменим $\epsilon_0^{(l)}$ в (26) его значением (31) и учтем равенство (39). Тогда

$$\langle \epsilon \rangle_l = \omega_0^{(l)} \epsilon_0^{(l)} + \sum_k \omega_k^{(l)} D_k^{(l)} \bar{\epsilon}_k^{(l)} = \left(\omega_0^{(l)} I + \sum_k \omega_k^{(l)} D_k^{(l)} R_k^{(l)} \right) \epsilon_0^{(l)} + \left(\sum_k \omega_k^{(l)} D_k^{(l)} \mathbf{Q}_k^{(l)} \right) \langle T \rangle_l + \sum_k \omega_k^{(l)} D_k^{(l)} \mathbf{\Pi}_k^{(l)} \quad (1 \leq l \leq L), \quad (42)$$

где I — единичная матрица размерностью 6×6 . Из (42) следует матричное равенство

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0^{(l)} = E_l \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_l - \mathbf{G}_l \langle T \rangle_l - \boldsymbol{\Pi}_l \quad (1 \leq l \leq L), \quad (43)$$

где E_l — 6×6 -матрица, \mathbf{G}_l , $\boldsymbol{\Pi}_l$ — 6-компонентные векторы вида

$$E_l = \left(\omega_0^{(l)} I + \sum_k \omega_k^{(l)} D_k^{(l)} R_k^{(l)} \right)^{-1}, \quad \mathbf{G}_l = E_l \left(\sum_k \omega_k^{(l)} D_k^{(l)} \mathbf{Q}_k^{(l)} \right), \quad \boldsymbol{\Pi}_l = E_l \left(\sum_k \omega_k^{(l)} D_k^{(l)} \boldsymbol{\Pi}_k^{(l)} \right) \quad (1 \leq l \leq L). \quad (44)$$

Соотношение (43) определяет деформации связующего $\boldsymbol{\varepsilon}_0^{(l)}$ через осредненные деформации $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_l$ и температуру $\langle T \rangle_l$ композиции в пределах l -го субэлемента ячейки. В результате его подстановки в равенство (41) и приведения подобных слагаемых окончательно получим

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_l = \left(\omega_0^{(l)} A_0 + \sum_k \omega_k^{(l)} D_k^{(l)} \bar{A}_k R_k^{(l)} \right) E_l \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_l - \left[\omega_0^{(l)} (\mathbf{B}_0 + A_0 \mathbf{G}_l) + \sum_k \omega_k^{(l)} D_k^{(l)} (\bar{\mathbf{B}}_k + \bar{A}_k (R_k^{(l)} \mathbf{G}_l - \mathbf{Q}_k^{(l)})) \right] \langle T \rangle_l + \omega_0^{(l)} (\mathbf{p}_0^{(l)} - A_0 \boldsymbol{\Pi}_l) + \sum_k \omega_k^{(l)} D_k^{(l)} (\bar{\mathbf{p}}_k^{(l)} + \bar{A}_k (\boldsymbol{\Pi}_k^{(l)} - R_k^{(l)} \boldsymbol{\Pi}_l)) \quad (1 \leq l \leq L). \quad (45)$$

После восстановления верхних индексов « n » и « $n+1$ » выражение (45) можно записать в компактной матричной форме, аналогичной (20):

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_l^{n+1} = \langle A \rangle_l^n \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_l^{n+1} - \langle \mathbf{B} \rangle_l^n \langle T \rangle_l^{n+1} + \langle \mathbf{p} \rangle_l^n \quad (1 \leq l \leq L, n = 0, 1, 2, \dots), \quad (46)$$

где $\langle A \rangle_l^n = \left\langle a_{ij}^{(l)} \right\rangle$ — 6×6 -матрица, $\langle \mathbf{B} \rangle_l^n = \left\langle b_i^{(l)} \right\rangle$, $\langle \mathbf{p} \rangle_l^n = \left\langle p_i^{(l)} \right\rangle$ ($i, j = \overline{1, 6}$) — 6-компонентные векторы, определяемые так:

$$\langle A \rangle_l^n \equiv \left(\omega_0^{(l)} A_0 + \sum_k \omega_k^{(l)} D_k^{(l)} \bar{A}_k R_k^{(l)} \right)^n E_l, \quad \langle \mathbf{B} \rangle_l^n \equiv \omega_0^{(l)} \left(\mathbf{B}_0 + A_0 \mathbf{G}_l \right) + \sum_k \omega_k^{(l)} D_k^{(l)} \left(\bar{\mathbf{B}}_k + \bar{A}_k \left(R_k^{(l)} \mathbf{G}_l - \mathbf{Q}_k^{(l)} \right) \right), \quad (47)$$

$$\langle \mathbf{p} \rangle_l^n \equiv \omega_0^{(l)} \left(\mathbf{p}_0^{(l)} - A_0 \boldsymbol{\Pi}_l \right) + \sum_k \omega_k^{(l)} D_k^{(l)} \left(\bar{\mathbf{p}}_k^{(l)} + \bar{A}_k \left(\boldsymbol{\Pi}_k^{(l)} - R_k^{(l)} \boldsymbol{\Pi}_l \right) \right).$$

Здесь матрицы и векторы вычисляются по формулам (32), (38), (40), (44).

Таким образом, в момент времени t_{n+1} для материала, эквивалентного композиту в пределах l -го субэлемента, равенство (46) в матричной форме задает определяющие соотношения, которые формально совпадают с соотношениями Дюамеля–Неймана для анизотропного материала при наличии начального напряженного состояния, характеризуемого вектором $\langle \mathbf{p} \rangle_l^n$. При этом матрицу $\langle A \rangle_l^n$ можно трактовать как матрицу эффективных жесткостей l -го субэлемента, а вектор-столбец $\langle \mathbf{B} \rangle_l^n$ — как вектор эффективных температурных жесткостей эквивалентного материала в пределах этого субэлемента.

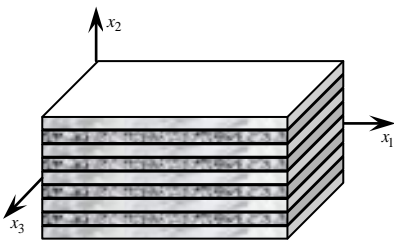


Рис. 3. Слоистый материал регулярной структуры, эквивалентный рассматриваемой

Согласно допущению 1 l -й субэлемент ячейки с механическими характеристиками (47) регулярно повторяется во всех направлениях Ox_i ($i = 1, 2, 3$), поэтому исследуемая композитная среда может быть заменена эквивалентной ей слоистой средой с регулярно чередующимися анизотропными слоями (Рис. 3). Термоупругие характеристики эквивалентной среды l -го слоя описываются выражениями (47). Используя общеизвестную методику осреднения термоупругих характеристик слоистой среды [3], получим определяющие соотношения для рассматриваемого композита. С этой целью нужно ввести дополнительные гипотезы:

8. Между регулярно чередующимися анизотропными слоями, эффективные термоупругие характеристики которых задаются характеристиками субэлементов ячейки, существует полное

термомеханическое сцепление (см. Рис. 3).

9. В пределах каждого представительного элемента слоистой среды деформации, напряжения и температуры во всех слоях и в композиции в целом кусочно-постоянны.

10. В момент времени t_{n+1} материалы слоев рассматриваются как линейно-термоупругие, анизотропные и однородные; связь между напряжениями, деформациями и температурой в них определяется соотношениями типа Дюамеля–Неймана (46).

Так как гипотезы 8, 9, 6, 10, соответственно, аналогичны допущениям 3, 4, 5, 7', то, повторив рассуждения (22)–(47), окончательно получим определяющие соотношения для рассматриваемой композитной среды (при этом, согласно рисунку 3, в соотношениях, аналогичных (32), (34)–(36), (38), «углы армирования» ϕ_l необходимо приравнять нулю):

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{n+1} = \langle \mathbf{A} \rangle \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{n+1} - \langle \mathbf{B} \rangle \langle T \rangle^{n+1} + \langle \mathbf{p} \rangle \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (48)$$

где $\langle \mathbf{A} \rangle$ — 6×6 -матрица, $\langle \mathbf{B} \rangle$, $\langle \mathbf{p} \rangle$ — 6-компонентные векторы-столбцы, определяемые так:

$$\langle \mathbf{A} \rangle \equiv \left(\Omega_1 \langle \mathbf{A} \rangle_1 + \sum_{l=2}^L \Omega_l \langle \mathbf{A} \rangle_l \mathbf{R}_l \right) \mathbf{E}, \quad \langle \mathbf{B} \rangle \equiv \Omega_1 \left(\langle \mathbf{B} \rangle_1 + \langle \mathbf{A} \rangle_1 \mathbf{G} \right) + \sum_{l=2}^L \Omega_l \left(\langle \mathbf{B} \rangle_l + \langle \mathbf{A} \rangle_l \left(\mathbf{R}_l \mathbf{G} - \mathbf{Q}_l \right) \right), \quad (49)$$

$$\langle \mathbf{p} \rangle_l \equiv \Omega_l \left(\langle \mathbf{p} \rangle_l - \langle \mathbf{A} \rangle_l \tilde{\mathbf{\Pi}} \right) + \sum_{l=2}^L \Omega_l \left(\langle \mathbf{p} \rangle_l + \langle \mathbf{A} \rangle_l \left(\tilde{\mathbf{\Pi}}_l - \mathbf{R}_l \mathbf{\Pi} \right) \right);$$

$$\mathbf{E} \equiv \left(\Omega_1 \mathbf{I} + \sum_{l=2}^L \Omega_l \mathbf{R}_l \right)^{-1}, \quad \mathbf{G} \equiv \mathbf{E} \sum_{l=2}^L \Omega_l \mathbf{Q}_l, \quad \mathbf{\Pi} \equiv \mathbf{E} \sum_{l=2}^L \Omega_l \tilde{\mathbf{\Pi}}_l; \quad (50)$$

$$\mathbf{R}_l \equiv \mathbf{F}_l^{-1} \mathbf{H}, \quad \mathbf{Q}_l \equiv \mathbf{F}_l^{-1} \mathbf{S}_l, \quad \tilde{\mathbf{\Pi}}_l \equiv \mathbf{F}_l^{-1} \mathbf{P}_l \quad (2 \leq l \leq L); \quad (51)$$

\mathbf{F}_l^{-1} — матрица, обратная \mathbf{F}_l . Ненулевые элементы 6×6 -матриц $\mathbf{F}_l = \left(F_{ij}^{(l)} \right)$, $\mathbf{H} = \left(H_{ij} \right)$ и 6-компонентных

векторов-столбцов $\mathbf{S}_l = \left\{ S_i^{(l)} \right\}$, $\mathbf{P}_l = \left\{ P_i^{(l)} \right\}$ вычисляются по формулам:

$$F_{11}^{(l)} = F_{33}^{(l)} = F_{66}^{(l)} = 1, \quad F_{2j}^{(l)} = \langle a_{2j}^{(l)} \rangle, \quad F_{4j}^{(l)} = \langle a_{4j}^{(l)} \rangle, \quad F_{5j}^{(l)} = \langle a_{5j}^{(l)} \rangle, \quad H_{11} = H_{33} = H_{66} = 1, \quad H_{2j} = \langle a_{2j}^{(1)} \rangle,$$

$$H_{4j} = \langle a_{4j}^{(1)} \rangle, \quad H_{5j} = \langle a_{5j}^{(1)} \rangle \quad (j = \overline{1, 6}), \quad S_2^{(l)} = \langle b_2^{(l)} \rangle - \langle b_2^{(1)} \rangle, \quad S_4^{(l)} = \langle b_4^{(l)} \rangle - \langle b_4^{(1)} \rangle, \quad S_5^{(l)} = \langle b_5^{(l)} \rangle - \langle b_5^{(1)} \rangle, \quad (52)$$

$$P_2^{(l)} = \langle p_2^{(l)} \rangle - \langle p_2^{(1)} \rangle, \quad P_4^{(l)} = \langle p_4^{(l)} \rangle - \langle p_4^{(1)} \rangle, \quad P_5^{(l)} = \langle p_5^{(l)} \rangle - \langle p_5^{(1)} \rangle \quad (2 \leq l \leq L).$$

В равенствах (48)–(50) используются обозначения: $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$, $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$ — 6-компонентные векторы-столбцы средних напряжений и деформаций в рассматриваемой композиции; $\langle T \rangle$ — средняя температура композиции в момент времени t_{n+1} ; Ω_l — относительное объемное содержание l -го субэлемента в ячейке, причем выполняется условие нормировки

$$\sum_{l=1}^L \Omega_l = 1. \quad (53)$$

Если при выводе соотношений (48)–(51) учесть (53), то получатся дополнительные равенства:

$$\langle T \rangle_l = \langle T \rangle \quad (1 \leq l \leq L), \quad (54)$$

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_1 = \mathbf{E} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle - \mathbf{G} \langle T \rangle - \mathbf{\Pi}, \quad (55)$$

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_l = \mathbf{R}_l \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_1 + \mathbf{Q}_l \langle T \rangle + \tilde{\mathbf{\Pi}}_l \quad (2 \leq l \leq L). \quad (56)$$

Равенство (54) означает, что средняя в l -м субэлементе температура $\langle T \rangle_l^{n+1}$ в момент времени t_{n+1} равняется средней температуре в ячейке $\langle T \rangle_1^{n+1}$. Соотношение (55) определяет средние деформации в первом субэлементе $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_1^{n+1}$ в момент времени t_{n+1} через среднюю температуру $\langle T \rangle_1^{n+1}$ и средние деформации $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_1^{n+1}$ ячейки. Равенство же (56) устанавливает средние деформации l -го субэлемента $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_l^{n+1}$ ($2 \leq l \leq L$) в зависимости от средней температуры ячейки $\langle T \rangle_1^{n+1}$ и средних деформаций в первом субэлементе $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_1^{n+1}$.

Таким образом, согласно д о п у щ е н и ю 1, в момент времени t_{n+1} для материала, эквивалентного рассматриваемой композитной среде, равенство (48) задает в матричной форме определяющие соотношения, которые формально совпадают с соотношениями Дюамеля–Неймана для анизотропного однородного материала при наличии начального напряженного состояния, характеризуемого вектором $\langle \mathbf{p} \rangle^n$. При этом матрицу $\langle \mathbf{A} \rangle^n$ можно трактовать как матрицу эффективных жесткостей, а вектор $\langle \mathbf{B} \rangle^n$ — как вектор эффективных температурных жесткостей эквивалентного материала.

Если в момент времени t_n , как и предполагалось, известны значения функций (9), то, согласно (18), (19), в соотношениях (20) известны компоненты 6×6 -матриц A_0^n, A_k^n и 6 -компонентных векторов $\mathbf{B}_0^n, \mathbf{p}_0^n, \mathbf{B}_k^n, \mathbf{p}_k^n$ ($1 \leq k \leq K$), а значит, в силу формул (47), в определяющем соотношении (46) для каждого l -го субэлемента ячейки известны 6×6 -матрица $\langle A \rangle_l^n$ и 6 -компонентные векторы $\langle \mathbf{B} \rangle_l^n, \langle \mathbf{p} \rangle_l^n$ ($1 \leq l \leq L$) и далее, в силу формул (49)–(52), в определяющем уравнении (48) для представительной ячейки в целом известны 6×6 -матрица $\langle A \rangle^n$ и 6 -компонентные векторы $\langle \mathbf{B} \rangle^n, \langle \mathbf{p} \rangle^n$.

При переходе к моменту времени t_{n+1} , решая соответствующую краевую задачу, заключающуюся в определении термоупругого поведения эквивалентного материала с использованием соотношения (48), получим поля осредненных напряжений $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{n+1}$ и деформаций $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{n+1}$ в рассматриваемой композиции. Зная эти поля, по формулам (54)–(56) (где матрицы R_l^n, E^n и векторы-столбцы $\mathbf{Q}_l^n, \mathbf{P}_l^n, \mathbf{G}^n, \mathbf{P}^n$, согласно (50)–(52), уже вычислены для каждой ячейки) можно последовательно определить поля осредненных деформаций $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_1^{n+1}, \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_l^{n+1}$ и температур $\langle T \rangle_1^{n+1}, \langle T \rangle_l^{n+1}$ ($2 \leq l \leq L$) во всех субэлементах каждой ячейки; далее, по формулам (43), (39), (29) (где матрицы $R_k^{(l)n}, E_l^n$ и векторы $\mathbf{Q}_k^{(l)n}, \mathbf{P}_k^{(l)n}, \mathbf{G}_l^n, \mathbf{P}_l^n$, согласно (40), (44), уже вычислены для каждого k -го армирующего элемента в l -м субэлементе каждой ячейки) можно также последовательно найти поля деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_0^{(l)n+1}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^{(l)n+1}$ и температур $T_0^{(l)n+1}, T_k^{(l)n+1}$ ($1 \leq k \leq K, 1 \leq l \leq L$) во всех компонентах композиции l -го субэлемента каждой ячейки.

При известных значениях функций $\boldsymbol{\varepsilon}_0^{(l)n+1}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^{(l)n+1}, T_0^{(l)n+1}, T_k^{(l)n+1}$, с одной стороны, по формулам (20) можем установить напряженное состояние $\boldsymbol{\sigma}_0^{(l)n+1}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}_k^{(l)n+1}$ в фазовых материалах, а с другой стороны, с учетом (9) по формулам (14), (15) можем определить значения функций $E_{j,m}^{(l,0)n+1}, \bar{E}_{j,m}^{(l,k)n+1}, \Theta_s^{(l,0)n+1}, \Theta_s^{(l,k)n+1}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_j^{(l,0)n+1}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_j^{(l,k)n+1}, \dot{T}_0^{(l)n+1}, \dot{T}_k^{(l)n+1}$ ($j = \overline{1, 6}, 1 \leq k \leq K, 1 \leq l \leq L$) во всех компонентах композиции в пределах l -х субэлементов всех ячеек. Следовательно, значения всех функций, указанных в (9), становятся известными в момент времени t_{n+1} , поэтому, повторяя рассуждения (9)–(56) для следующего момента времени (заменяв « n » на « $n+1$ »), можем рассчитать механическое поведение рассматриваемого композита при $t = t_{n+2}$ и так далее. Учитывая, что в начальный момент времени $t = t_0 = 0$ значения функций (9) при $n = 0$ предполагались известными, а именно, равными нулю, можем последовательно по описанной выше схеме получить решения задачи, рассматривающей термовязкоупругое поведение ребристо-армированной пенопластмассы в дискретные моменты времени (10).

Важно следующее: если при дискретизации шаг по времени остается постоянным $\tau_n = \tau$ ($n = 0, 1, 2 \dots$), то матрицы $\langle A \rangle_l$, $R_k^{(l)}$, E_l , $\langle A \rangle$, R_l , E и векторы $\mathbf{Q}_k^{(l)}$, $\langle \mathbf{B} \rangle_l$, \mathbf{G}_l , \mathbf{Q}_l , $\langle \mathbf{B} \rangle$, \mathbf{G} ($1 \leq k \leq K$, $1 \leq l \leq L$) в соотношениях (47), (44), (40), (49)–(51) достаточно вычислить один раз (заметим, что при этом они сохраняют постоянство во всех ячейках). Следовательно, пересчету в каждый момент времени t_{n+1} подлежат лишь векторы «начальных напряжений» $\mathbf{P}_k^{(l)}$, \mathbf{P}_l , $\langle \mathbf{p} \rangle_l$, \mathbf{P}_l , \mathbf{P} , $\langle \mathbf{p} \rangle$ (в общем случае эти векторы изменяются при переходе от ячейки к ячейке, то есть зависят от пространственных макропеременных x_i [28]). Если же шаг по времени τ_n переменный, то все указанные матрицы и векторы необходимо пересчитывать в каждый рассматриваемый момент времени t_{n+1} .

З а м е ч а н и е 1. Если в рамках построенной модели для связующего (пенопластмассы) осуществить предельные переходы $a_{ij}^{(0)} \rightarrow 0$, $\alpha_i^{(0)} \rightarrow 0$, $B_{ij,m}^{(0)} \rightarrow 0$, $\beta_{i,s}^{(0)} \rightarrow 0$, $c_{ij}^{(0)} \rightarrow 0$, $d_i^{(0)} \rightarrow 0$ (см. (1)), то по изложенной выше методике получим определяющие соотношения (48) в момент времени t_{n+1} для ребристой конструкции (типа сотовой, складчатой, гофра и тому подобной), пустоты в которой не заполнены пенопластмассой.

При решении соответствующей термовязкоупругой краевой задачи для армированной пенопластмассы в квазистатической постановке осредненные напряжения в композиции $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{n+1}$ (см. (48)) в момент времени t_{n+1} должны удовлетворять общеизвестным уравнениям равновесия и статическим граничным условиям, а осредненные деформации $\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle^{n+1}$ должны быть связаны с осредненными перемещениями дифференциальными соотношениями Коши [17–20], которые здесь не будем приводить.

Для расчета температурного поля $\langle T \rangle^{n+1}$ в эквивалентном материале нужно использовать общеизвестные соотношения теории теплопроводности для анизотропной среды и численные методы их интегрирования [29, 30 и другие]. Для определения же эффективных коэффициентов теплопроводности рассматриваемой композиции можно использовать модель, предложенную автором в [31].

З а м е ч а н и е 2. В настоящем исследовании для удобства демонстрации методики численно-аналитического моделирования термовязкоупругого поведения ребристо-армированных пенопластмасс в качестве исходных определяющих соотношений для материалов компонентов композиции используются соотношения (1) с экспоненциальными ядрами интегральных операторов. Предложенная методика может быть обобщена и на ядра более общего вида, если соответствующие интегральные операторы вычислять приближенно по значениям подынтегральных функций в дискретные моменты времени [18, 32]. Но при этом не будут выполняться удобные для численного счета рекуррентные соотношения (14), связывающие между собой значения интегралов типа (7) в моменты времени t_n и t_{n+1} , то есть в случае ядер общего вида в каждый момент времени t_{n+1} придется заново пересчитывать влияние всей предыстории деформирования (см. стр. 191, 192 в [18]). Это скажется на времени численного счета, но не является принципиальным затруднением при применении предложенной методики моделирования термовязкоупругого поведения армированных пенопластмасс.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-90405-Укр_a).

Литература

1. Александров А.Я., Бородин М.Я., Павлов В.В. Конструкции с заполнителями из пенопластов. – М.: Машиностроение, 1972. – 212 с.
2. Брюккер Л.Э., Ракин А.С. Испытания трехслойных стержней при нормальных и повышенных температурах // Динамика и прочность авиационных конструкций: Межвуз. сб. научн. трудов. – Новосибирск: Изд-во НГУ, НЭТИ, 1978. – Вып. 4. – С. 73-79.
3. Тарнопольский Ю.М., Жигун И.Г., Поляков В.А. Пространственно-армированные композиционные материалы: Справочник – М.: Машиностроение, 1987. – 224 с.
4. Голотина Л.А., Кожеевникова Л.Л., Кошкина Т.Б. Численное моделирование реологических свойств зернистого композита с использованием структурного подхода // Механика композитных материалов. – 2008. – Т. 44, № 6. – С. 895-906.
5. Аветьян В.Э., Быков Д.Л. Определение нелинейных вязкоупругих характеристик наполненных полимерных материалов // Космонавтика и ракетостроение. – 2002. – № 3 (28). – С. 202-214.
6. Голуб В.П., Кобзарь Ю.М., Фернати П.П. Нелинейная ползучесть волокнистых однонаправленных композитов при растяжении в направлении армирования // Прикладная механика. – 2007. – № 5. – С. 20-34.
7. Куликов Р.Г., Труфанов Н.А. Применение итерационного метода к решению задачи деформирования однонаправленного композиционного материала с нелинейно-вязкоупругим связующим // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2011. – Т. 4, № 2. – С. 61-71. DOI

8. Креггер А.Ф., Тетерс Г.А. Применение методов усреднения для определения вязкоупругих свойств пространственно армированных композитов // *Механика композитных материалов*. – 1979. – № 4. – С. 617-624.
9. Креггер А.Ф., Тетерс Г.А. Структурная модель деформирования анизотропных, пространственно армированных композитов // *Механика композитных материалов*. – 1982. – № 1. – С. 14-22.
10. Александров А.Я., Брюккер Л.Э., Куришин Л.М., Прусаков А.П. Расчет трехслойных панелей. – М.: Оборонгиз, 1960. – 271 с.
11. Акишев Н.И., Закиров И.И., Паймушин В.Н., Шишов М.А. Теоретико-экспериментальный метод определения усредненных упругих и пространственных характеристик сотового заполнителя трехслойных конструкций // *Механика композитных материалов*. – 2011. – Т. 47, № 4. – С. 543-556.
12. Noor A.K., Burton W.S., Bert Ch.W. Computational models for sandwich panels and shells // *Appl. Mech. Rev.* – 1996. – V. 49, N 3. – P. 155-199. DOI
13. Матвеев С.А., Немировский Ю.В. Армированные дорожные конструкции: моделирование и расчет. – Новосибирск: Наука, 2006. – 348 с.
14. Янковский А.П. Построение определяющих уравнений термоупругого поведения сложно армированных пенопластмасс // *Техническая механика*. – 2010. – № 1. – С. 71-82.
15. Полимерные композиционные материалы: структура, свойства, технология: учеб. пособие / Под ред. А.А. Берлина. – СПб.: Профессия, 2009. – 560 с.
16. Ферри Дж. Вязкоупругие свойства полимеров. – М.: ИЛ, 1963. – 535 с.
17. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопrotивление полимерных и композитных материалов. – Рига: Зинатне, 1980. – 572 с.
18. Ильюшин А.А. Труды. Т. 3. Теория термовязкоупругости. – М.: Физматлит, 2007. – 288 с.
19. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
20. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
21. Локощенко А.М. Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов. – М.: Изд-во МГИУ, 2007. – 264 с.
22. Звонов Е.Н., Малинин Н.И., Паперник Л.Х., Цейтлин Б.М. Определение характеристик ползучести линейных упругонаследственных материалов с использованием ЭЦВМ // *Изв. АН СССР. МТТ*. – 1968. – № 5. – С. 76-82.
23. Анискевич К., Крастев Р., Христова Ю. Вязкоупругие свойства эпоксидной композиции после длительной выдержки в воде // *Механика композитных материалов*. – 2009. – Т. 45, № 2. – С. 201-210.
24. Веялис С., Гнип И.Я., Вайткус С., Кершулис В. Деформируемость полистирольного пенопласта EPS 200 при длительном сжатии // *Механика композитных материалов*. – 2010. – Т. 46, № 5. – С. 737-748.
25. Басистов Ю.А., Яновский Ю.Г. Некорректные задачи в механике (реологии) вязкоупругих сред и их регуляризация // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2010. – Т. 16, № 1. – С. 117-143.
26. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. Справочное руководство. – М.: Физматгиз, 1961. – 524 с.
27. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. – 400 с.
28. Баничук Н.В., Кобелев В.В., Рикардс Р.Б. Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 224 с.
29. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы теории теплопроводности: учеб. пособие для вузов. Ч. 1. – М.: Высш. школа, 1982. – 327 с.
30. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы теории теплопроводности: учеб. пособие для вузов. Ч. 2. – М.: Высш. школа, 1982. – 304 с.
31. Янковский А.П. Определение эффективных коэффициентов теплопроводности сложноармированных пенопластмасс // *Прикладная физика*. – 2010. – № 2. – С. 5-10.
32. Бахвалов Н.С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). – М.: Наука, 1973. – 631 с.

Поступила в редакцию 07.02.11; опубликована в электронном виде 28.12.12