

DOI: [10.7242/1999-6691/2012.5.4.44](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2012.5.4.44)

УДК 539.319

НОВЫЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА МНОГОЛИСТОВОЙ РЕССОРЫ

М.А. Осипенко, Ю.И. Няшин

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

Предложен новый итерационный метод решения контактной задачи, возникающей в классической модели многолистовой рессоры. Рессора представлена в виде пачки консольных балок (листов) постоянного поперечного сечения. Длины и толщины листов различны, ширина одинакова. В отсутствие нагрузки листы являются плоскими и плотно прилегают друг к другу; трение не учитывается. К свободному краю самого длинного листа приложена сосредоточенная сила, под действием которой листы испытывают слабый статический изгиб; контакт листов происходит с возможным отставанием. Задача состоит в отыскании сил взаимодействия листов. Новый метод основан на полученном авторами ранее аналитическом решении поставленной выше задачи (на листы действуют силы с произвольными заданными плотностями), но для двухлистовой рессоры. Для многолистовой рессоры это решение используется для каждой пары соседних листов при итерационном уточнении сил взаимодействия. Получен ряд ранее не известных картин контакта, которые не могут быть найдены традиционными методами.

Ключевые слова: многолистовая рессора, контактная задача, итерационный метод, картины контакта листов

A NEW NUMERICAL METHOD FOR THE CALCULATION OF THE MULTI-LEAF SPRING

M.A. Osipenko and Yu.I. Nyashin

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia

A new iteration method for solving the contact problem of a multi-leaf spring encountered in the classical model is proposed. The spring represents the stack of cantilever beams (leaves) of constant cross-section. The leaves differ in length and thickness, but have the same width. In the absence of loading, the leaves fit each other closely. There is no friction between the leaves. The concentrated force is applied to the tip of the longest leaf. The leaves undergo weak static bending with unbonded contact. The problem consists in finding the forces of interaction between leaves. The proposed method is based on the analytical solution of the generalized contact problem (arbitrary loading) for the two-leaf spring obtained earlier by the authors. This analytical solution is used for adjacent leaves of the multi-leaf spring through iterative adjustment of interaction forces. This method gives a series of novel leaf contact patterns that cannot be obtained by the conventional methods.

Key words: multi-leaf spring, contact problem, iteration method, leaf contact patterns

1. Введение

Задача расчета распределения усилий в многолистных рессорах является актуальной, поскольку такие рессоры широко применяются в качестве упругих элементов подвески автомобилей различных классов [1] (Рис. 1). Известно также их использование в упругих элементах протеза стопы [2] (Рис. 2).

С точки зрения механики сплошных сред многолистовая рессора представляет собой сложную конструкцию, состоящую из многих деформируемых твердых тел. Основная задача заключается в отыскании напряженно-деформированного состояния определенным образом закрепленной рессоры, находящейся под действием заданной, в общем случае переменной, нагрузки.

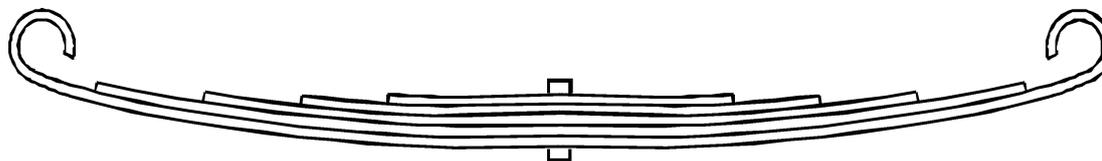


Рис. 1. Автомобильная листовая рессора

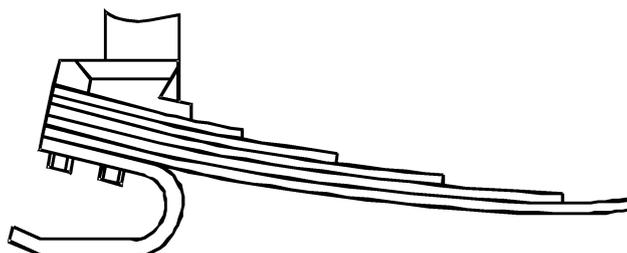


Рис. 2. Упругий элемент протеза стопы

В настоящее время имеются пакеты прикладных программ, которые могут быть использованы для решения подобных задач [3]. При этом возможен учет дополнительных элементов конструкции: листов с начальной кривизной; отверстий; ушек; скрепляющего винта; хомутов; устройства, на котором крепится рессора; устройства, создающего нагрузку на рессору, а также трения, геометрически и физически нелинейных эффектов, различия на несколько порядков размеров листов в разных направлениях.

С другой стороны, уже более 160 лет [4] существуют «инженерные» методы расчета рессор; в технической литературе [1, 4, 5] эти методы признаются вполне приемлемыми, но, возможно, нуждающимися в определенном уточнении и усовершенствовании.

В инженерных методах используется простейшая (классическая) модель (Рис. 3), в которой рессора представляется в виде пачки консольных балок (листов) Бернулли–Эйлера, имеющих постоянное прямоугольное поперечное сечение. Длина и толщина листов различна, а ширина одинакова. В ненагруженном состоянии листы являются плоскими и плотно прилегающими друг к другу, трение между ними отсутствует. Полагается, что к свободному краю верхнего листа приложена сосредоточенная сила P , под действием которой листы испытывают слабый статический изгиб с возможным отставанием. Требуется найти силы



Рис. 3. Классическая модель многолистовой рессоры

взаимодействия листов. Зная их, нетрудно далее установить упругие линии листов и напряжения в листах.

Заметим, что на рисунке 3 показана расчетная схема, фактически же рессора содержит еще зеркально симметричную левую часть с соответствующей силой P ; неподвижное основание отсутствует, а в центральной точке листы стянуты болтом, к которому приложена направленная вверх сила $2P$. Из соображения симметрии нетрудно убедиться, что переход к расчетной схеме (в рамках модели балок Бернулли–Эйлера) приводит лишь к следующим несущественным изменениям: силы и моменты взаимодействия листов и половин листов в центральных точках заменяются на равные им силы и моменты, действующие со стороны неподвижного основания, а все перемещения в конкретном листе отсчитываются от его центральной точки.

Несмотря на ряд попыток исследования сил взаимодействия в листовых рессорах [1, 4, 5], алгоритм отыскания сил в общем случае не построен. Причина этого заключается в сложности возникающей здесь контактной задачи. Даже её строгая постановка (в виде, удобном для решения) сформулирована лишь недавно [6]. Ранее [1, 4, 5], в отсутствие ясной постановки, были получены приближенные решения (без исследования точности приближения) и точные решения в простейших частных случаях (без достаточного обоснования).

Следует заметить, что, несмотря на приближенный характер самой модели, тем не менее, рассмотрение рессоры в рамках классической модели является важным. Объясняется это тем, что в теории рессор классическая модель служит основой для построения более сложных моделей. Точное же решение задачи для базовой теоретической модели всегда имеет принципиальное значение. Можно, например, провести аналогию с теорией колебаний, где точное решение задачи свободных (незатухающих) колебаний одномерной системы играет ключевую роль, хотя все реальные системы не одномерны, а колебания в них затухающие.

Существенно, что предлагаемый ниже итерационный метод является новым, так как основан на построенном только в 2002 г. [6] аналитическом решении контактной задачи для 2-листовой рессоры.

2. Постановка задачи

При постановке контактной задачи используем подход, изложенный в [6]. Пусть $f_k(x)$ — плотность нормальных сил взаимодействия листов с номерами k и $k+1$, где $1 \leq k \leq N-1$ (обозначения соответствуют рисунку 3). Через $f_k(x)$ легко выразить зазоры $r_k(x)$ между упругими линиями $y_k(x)$ листов [7]. Действительно,

$$y_k(x) = \int_0^{\ell_k} G_k(x, s) f_{k-1}(s) ds - \int_0^{\ell_{k+1}} G_k(x, s) f_k(s) ds, \quad (1)$$

$$G_k(x, s) = \frac{2}{Ewh_k^3} \begin{cases} s^2(3x-s) & (x \geq s), \\ x^2(3s-x) & (x \leq s). \end{cases} \quad (2)$$

Здесь: ℓ_k — длины листов ($1 \leq k \leq N$), и следует считать, что $\ell_{N+1} = 0$, $f_N(x) = 0$, $f_0(x) = P\delta(x - \ell_1)$, где P — модуль вектора \mathbf{P} ; δ — дельта-функция Дирака; h_k и w — толщина и ширина k -го листа; E — модуль Юнга материала листов. Тогда зазоры выразятся как

$$r_k(x) = y_{k+1}(x) - y_k(x). \tag{3}$$

Функции $f_k(x)$ будем искать в виде

$$p(x) + \sum_i P_i \delta(x - x_i), \tag{4}$$

где $p(x) \geq 0$ кусочно-непрерывна и непрерывна справа при $x \geq 0$; $P_i \geq 0$; сумма конечна.

Условие контакта листов (помимо неотрицательности плотности сил взаимодействия) состоит в том, что расстояние между листами неотрицательно, а в тех точках, где плотность сил взаимодействия положительна, оно равно нулю. Окончательно приходим к следующей математической постановке задачи: требуется найти функции $f_k(x)$ вида (4) такие, что при $0 \leq x \leq \ell_{k+1}$ $r_k(x) \begin{cases} = 0 & (f_k(x) > 0), \\ \geq 0 & (f_k(x) = 0), \end{cases}$ где $r_k(x)$ выражаются формулами (1)–(3). Можно доказать [6], что эта задача имеет единственное решение.

3. Итерационный метод решения контактной задачи

Предлагаемый итерационный метод основывается на построенном в [6] аналитическом решении некоторого обобщения поставленной выше задачи, но для 2-листовой рессоры. Обобщение заключается в том, что на верхний лист действуют силы с произвольной заданной плотностью $p(x)$ (а не обязательно одна сосредоточенная сила). Нижний лист также подвергается силовому (направленному вверх) воздействию с произвольной заданной плотностью $q(x)$. Искомой является плотность сил взаимодействия листов $f(x)$. В [6] построено аналитическое выражение для оператора A такого, что $f(x) = A[p(x), q(x)]$.

Прежде чем показать явный вид оператора A , введем обозначения:

$$\xi = h_1^3/h_2^3; \quad p_*(x) = p(x) + \begin{cases} \xi q(x) & (0 \leq x \leq \ell_2), \\ 0 & (x > \ell_2); \end{cases} \quad M = \int_{\ell_2}^{\ell_1} (s - \ell_2) p_*(s) ds;$$

$$\Phi(\Lambda) = M - \frac{1}{(\ell_2 - \Lambda)^2} \int_{\Lambda}^{\ell_2} (s - \Lambda)(\ell_2 - s)(2\ell_2 - \Lambda - s) p_*(s) ds.$$

Тогда:

а) если $M = 0$, то $f(x) = A[p(x), q(x)] = p_*(x)/(1 + \xi)$;

б) если $\Phi(0) \geq 0$, то $f(x) = A[p(x), q(x)] = F\delta(x - \ell_2)$, где $F = \frac{1}{(1 + \xi)G_2(\ell_2, \ell_2)} \int_0^{\ell_1} G_2(\ell_2, s) p_*(s) ds$;

в) если $\Phi(0) < 0$ и $M > 0$, то $f(x) = A[p(x), q(x)] = F\delta(x - \ell_2) + P\delta(x - \lambda) + \begin{cases} p_*(x)/(1 + \xi) & (0 \leq x \leq \lambda), \\ 0 & (x > \lambda), \end{cases}$

где $0 < \lambda < \ell_2$ — корень уравнения $\Phi(\Lambda) = 0$ и $F = \frac{1}{(1 + \xi)(\ell_2 - \lambda)} \int_{\lambda}^{\ell_1} (s - \lambda) p_*(s) ds$,

$$P = \frac{1}{(1 + \xi)(\ell_2 - \lambda)} \int_{\lambda}^{\ell_1} (\ell_2 - s) p_*(s) ds.$$

Итерационный метод решения задачи для многолистовой рессоры состоит в следующем. Задается начальное приближение для $f_k(x)$ — это сосредоточенные силы, действующие на свободные края листов и найденные из условий равенства перемещений листов в точках приложения сил (метод сосредоточенной нагрузки, см. ниже). Далее проводятся итерации: следующее приближение $f_k^*(x)$ вычисляется по предыдущему приближению $f_k(x)$ посредством оператора A : $f_k^*(x) = A[f_{k-1}(x), f_{k+1}(x)]$. Учитывая явный вид оператора A , нетрудно показать, что $f_k^*(x)$ (и, следовательно, окончательный результат) всегда есть множество сосредоточенных сил. Процесс итерирования заканчивается, когда расстояние ρ между

наборами $f_k(x)$ и $f_k^*(x)$ (как элементами метрического пространства) достигает «машинного нуля». Расстояние определяем следующим образом. Функции $f_k(x)$ и $f_k^*(x)$ представляют собой суммы вида (4) без кусочно-непрерывной части. Если число слагаемых в этих суммах не одинаково, то полагаем $\rho_k = +\infty$. Если же число слагаемых одинаково, то $\rho_k^2 = \sum_i (x_i - x_i^*)^2 / \ell_1^2 + \sum_i (P_i - P_i^*)^2 / P^2$, где x_i, P_i, x_i^*, P_i^* обуславливаются, согласно (4), функциями $f_k(x)$ и $f_k^*(x)$ соответственно. Тогда расстояние между наборами $\rho = \max_k \rho_k$.

Установлено, что для обеспечения сходимости итераций следует проводить корректировку ряда первых итераций $f_k(x)$: если $f_k(x)$ содержит «близко» расположенные силы ($|x_i - x_j| / \ell_1 < \varepsilon_x$), то эти силы заменяем равнодействующей; если $f_k(x)$ содержит «малые» силы ($P_i / P < \varepsilon_p$), то эти силы отбрасываем. Теоретическое доказательство сходимости скорректированных итераций не проводилось; при практических вычислениях не было обнаружено ни одного случая отсутствия сходимости (поэтому другие возможные варианты выбора начального приближения не рассматривались). Значения оценок параметров $\varepsilon_x = 10^{-4}$, $\varepsilon_p = 10^{-7}$ выбирались на основании первых решенных предложенным методом примеров расчетов, и они оказались приемлемыми во всех последующих задачах.

Характер сходимости итераций можно показать на примере 6-листовой рессоры (см. Рис. 4, а в следующем разделе). При числе итераций $n < 24$ расстояние $\rho(n)$ либо равно $+\infty$, либо порядка единицы; для этих итераций проводится корректировка. При $n \geq 24$ корректировка прекращается; расстояния составляют: $\rho(24) = 10^{-5}$, $\rho(50) = 10^{-7}$, $\rho(100) = 10^{-13}$, $\rho(130) = 10^{-16}$. Далее, при $n > 130$, значение $\rho(n)$ не изменяется (достигнут «машинный нуль»).

Заметим, что погрешность данного метода определяется лишь погрешностью машинного представления чисел и выполнения арифметических операций; в нем отсутствует параметр, подобный шагу сетки, который обычно обуславливает погрешность численных методов (здесь же вспомогательные параметры ε_x и ε_p используются только для ряда первых итераций).

Как отмечалось выше, листы рессор могут иметь начальную кривизну, поэтому желательно распространить описанный метод и на такие рессоры. Для этого следует решить задачу отыскания аналитического выражения для оператора A при наличии начальной кривизны листов. Однако решение (полное) данной задачи в настоящее время не известно; исследован лишь один частный случай [8].

4. Результаты, полученные предложенным методом

Полученное решение контактной задачи может быть представлено (частично) в виде силовой схемы рессоры (Рис. 4). На схеме листы разнесены по толщине рессоры; длины листов и положения сил взаимодействия листов показаны в масштабе с соблюдением пропорций. На рисунке 4 приведены полученные предложенным методом силовые схемы двух различных рессор. В [1, 4, 5] отсутствуют картины расположения сил, хотя бы в некоторой степени подобные схемам рисунка 4. Вместо этого предполагается, что либо силы расположены только на свободных краях листов (метод сосредоточенной нагрузки), либо упругие линии всех (или некоторых) листов одинаковы (метод общей кривизны). Как видно из рисунка 4, первое предположение, вообще говоря, совершенно неверное (существуют лишь некоторые частные случаи, когда оно верно). Если все же принять его и найти зазоры между упругими линиями листов для 6-листовой рессоры (Рис. 4, а), то окажется, что в некоторых областях зазоры отрицательны, то есть происходит физически невозможное взаимное проникновение листов (Рис. 5, а).

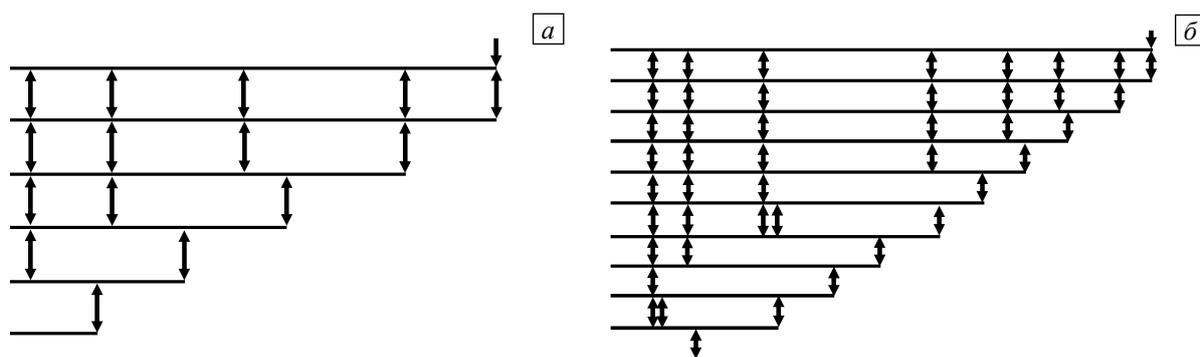


Рис. 4. Найденные силовые схемы для 6-листовой (а) и 11-листовой (б) рессор

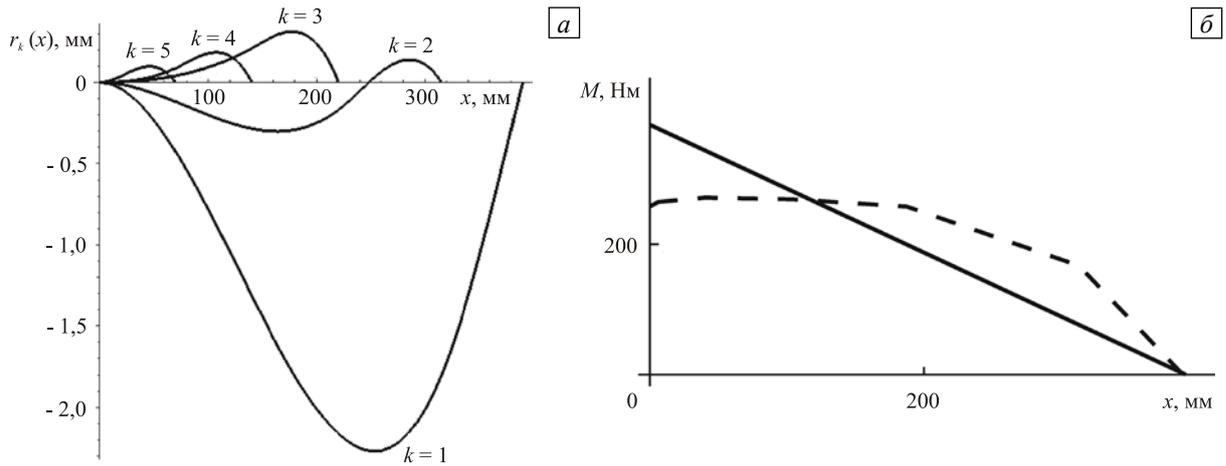


Рис. 5. Зазоры между листьями с номерами k и $k+1$ (а) и эпюра моментов для 1-го листа (б) в методе сосредоточенной нагрузки (сплошная линия отвечает сосредоточенной нагрузке, пунктирная линия — «правильно» расположенной нагрузке)

Заметим, что в [5] рассмотрена схема 3-листовой рессоры, где имеется одна сила, расположенная «правильно», то есть не на свободном краю листа. Этот частный результат никем не был использован и не получил развития в теории рессор [1], причем в [5] утверждается, что метод сосредоточенной нагрузки дает близкие к действительности результаты для эпюр моментов в листах. Данная констатация, вообще говоря, неверна: на рисунке 5, б показана эпюра моментов в 1-м листе 6-листовой рессоры (Рис. 4, а), найденная методом сосредоточенной нагрузки. Там же для сравнения приводится и заметно отличающаяся от нее эпюра от действия «правильной» нагрузки (пунктирная линия).

Применение метода общей кривизны, как нетрудно показать, приводит к моментным взаимодействиям листов (на рисунке 6 сосредоточенные моменты показаны дугами окружностей), что противоречит условию одностороннего контакта. В [9] рассмотрен метод многих сил, согласно которому силовая схема рессоры содержит силы во всех точках, являющихся проекциями концов нижележащих листов на вышележащие. Такому допущению также соответствуют физически невозможные отрицательные зазоры между листьями (Рис. 7, а) и отрицательные силы взаимодействия (на рисунке 7, б места действия этих сил отмечены звездочками).

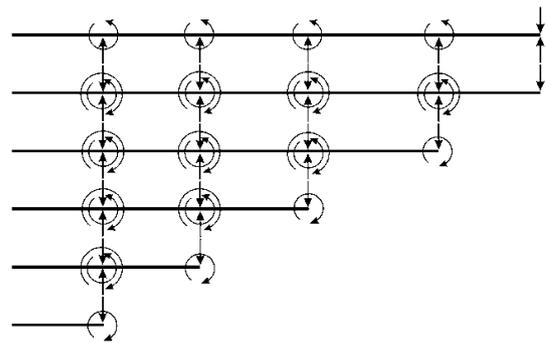


Рис. 6. Силовая схема рессоры в методе равной кривизны

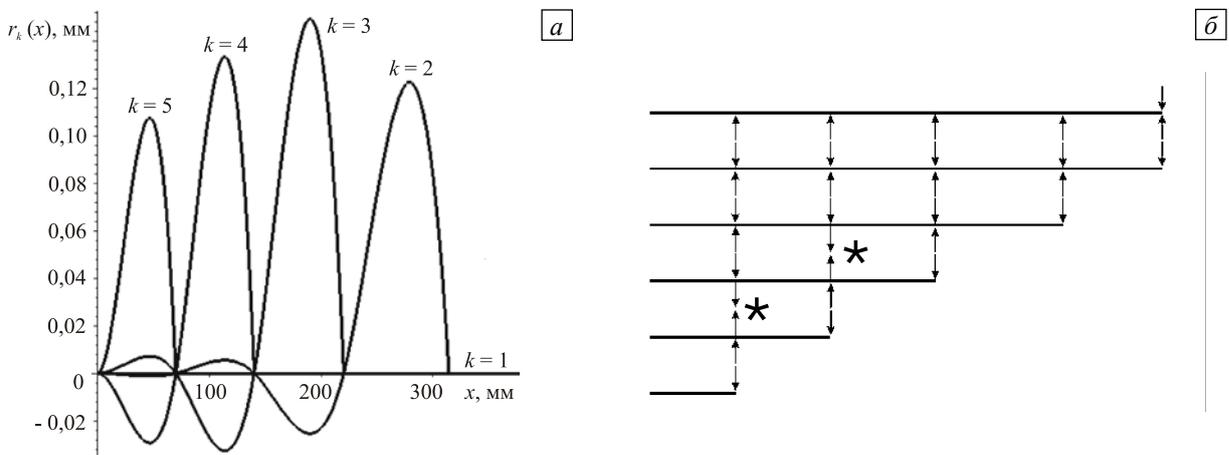


Рис. 7. Зазоры между листьями, вычисленные методом многих сил (а) и соответствующая силовая схема рессоры (б)

5. Заключение

Предложенный новый итерационный метод решения контактной задачи изгиба многолистовой рессоры позволил впервые получить правильные (в рамках классической модели) и весьма точные картины контакта листов в общем случае (см. примеры на рисунке 4). Эти картины существенно отличаются от «приближенных» картин, используемых в традиционных методах.

Результаты вычислений дают надежду на то, что данный метод будет применяться в практике расчета рессор в тех случаях, когда целесообразно использование классической модели рессоры.

Литература

1. Пархиловский И.Г. Автомобильные листовые рессоры. – М.: Машиностроение, 1978. – 232 с.
2. Osipenko M.A., Nyashin Y.I., Rudakov R.N., Ostanin A.V., Kuleshova E.N., Zhuravleva T.N. Mathematical modelling of the foot prosthesis elastic element under bending // Russian Journal of Biomechanics. – 2001. – V. 5, N. 2. – P. 18-29.
3. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Таланцев Н.Ф. Численный анализ напряженно-деформированного состояния листовых рессор // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2009. – Т. 2, № 2. – С. 74-84. DOI
4. Глух Б.А., Бидерман В.Л. Рессоры листовые: энциклопедический справочник. – М.: Машгиз, 1948. – Т. 2. – С. 723-739.
5. Пономарев С.Д. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. – М.: Машгиз, 1956. – Т. 1. – 884 с.
6. Няшин Ю.И., Осипенко М.А., Рудаков Р.Н. К теории изгиба листовой рессоры // МТТ. – 2002. – № 6. – С. 134-143.
7. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1988. – 711 с.
8. Osipenko M.A., Nyashin Y.I., Rudakov R.N. On the theory of bending of foot prosthesis containing the curved plates // Russian Journal of Biomechanics. – 1999. – V. 3, N. 2. – P. 73-77.
9. Осипенко М.А., Таланцев Н.Ф. Высоточный расчет листовой рессоры в рамках классической модели // XVI Зимняя школа по механике сплошных сред: тезисы докладов. Пермь, 24-27 февраля 2009. – Пермь, 2009. – С. 274.

Поступила в редакцию 13.06.12; опубликована в электронном виде 28.12.12

Сведения об авторах

Осипенко Михаил Анатольевич, кфмн, доц., Пермский национальный исследовательский политехнический университет (ПНИПУ), 614990, Пермь, Комсомольский проспект, д. 29; E-mail: oma@theormech.pstu.ac.ru

Няшин Юрий Иванович, дтн, проф., зав.каф., ПНИПУ; E-mail: nyashin@inbox.ru