

DOI: 10.7242/1999-6691/2012.5.3.42

УДК 532.133

МОДЕЛЬ СТАЦИОНАРНОГО НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ МАГМЫ В КАНАЛЕ ВУЛКАНА С УЧЕТОМ СКОЛЬЖЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ

А.А. Бармин¹, О.Э. Мельник¹, О.И. Скульский²¹Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия²Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

Предложена модель неизоотермического течения магмы в круглом цилиндрическом канале вулкана. Принято, что вязкость магмы зависит от температуры, скорости деформации и концентрации растворенного газа, которая в свою очередь зависит от давления. Предусмотрена возможность скольжения магмы по стенкам канала по соответствующему экспериментальному закону. Разработаны алгоритм и вычислительная программа расчета стационарного неизоотермического течения нелинейно вязкой несжимаемой магмы в канале. Показано, что учет вязкой диссипации и проскальзывания существенно увеличивает расход магмы при фиксированном давлении в очаге извержения.

Ключевые слова: магма, экструзивное извержение, осесимметричная модель, неньютоновская вязкость, проскальзывание, метод конечных элементов

MODEL OF A NON-ISOTHERMAL STATIONARY MAGMA FLOW IN A VOLCANIC CONDUIT TAKING INTO ACCOUNT SLIP BOUNDARY CONDITIONS AT THE CONDUIT WALL

A.A. Barmin¹, O. E. Mel'nik¹ and O.I. Skul'skiy²¹Institute of Mechanics of Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia²Institute of Continuous Media Mechanics, UB RAS, Perm Russia

The model of a non-isothermal magma flow in a circular cylindrical volcanic conduit is proposed. It is assumed that magma viscosity depends on temperature, deformation rate and concentration of dissolved gases, which in turn depends on pressure. The possibility of the slip of magma along the conduit walls in accordance with the experimentally determined law is taken into account. An algorithm and a computational procedure for simulation of the non-isothermal stationary flow of nonlinear viscous incompressible magma in the conduit are developed. It is shown that viscous dissipation and wall slip lead to much higher discharge rates for fixed magma chamber pressure.

Key words: magma, extrusion eruption, axisymmetrical model, non-Newtonian viscosity, wall slip, finite element method

1. Введение

Проблема моделирования течения магмы в канале вулкана рассматривалась в ряде работ, ссылки на которые можно найти в [1–9]. В основном современные модели рассматривают подъем магмы как квази-одномерный, изотермический процесс ее движения по каналу цилиндрической формы с учетом прилипания к стенкам канала. Основной акцент делается на изменение при подъеме осредненных по поперечному сечению свойств магмы (содержания пузырьков и кристаллов). Так, в [3] исследуется влияние вязкой диссипации на динамику извержения. Задача решается в квази-двумерной постановке в приближении длинного канала. Показано, что в пристеночной области образуется слой горячей маловязкой магмы. Профиль скорости при подъеме изменяется от параболического до близкого к плоскому с большим градиентом около стенок канала. Появившиеся в последние годы экспериментальные данные по реологии магмы с большой концентрацией кристаллов [6, 8] до настоящего времени при моделировании течения магмы в канале вулкана не были учтены в полной мере.

В настоящей работе предложена модель неизоотермического течения магмы в осесимметричном канале вулкана. В модели принято, что вязкость магмы зависит от температуры, скорости деформации и концентрации растворенного газа, являющейся функцией давления. Предусмотрена также возможность скольжения магмы по стенкам канала в соответствии с экспериментально определяемым законом [6].

2. Постановка задачи

Стационарное неизоотермическое течение несжимаемой магмы в осесимметричном канале вулкана описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных, отражающих законы сохранения импульса, массы и энергии. Математическая модель строится для экструзивного типа извержения, при котором истечение высоковязкой лавы из жерла вулкана считается медленным. Число Рейнольдса для такого течения мало, поэтому инерционными членами в уравнениях движения можно пренебречь.

$$\nabla p = \nabla \cdot [\mu(c_d(p), T, I_2) \mathbf{D}] + \rho \mathbf{g}, \tag{1}$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0, \tag{2}$$

$$\rho C_p (\mathbf{v} \cdot \nabla) T = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \mu(c_d(p), T, I_2) \mathbf{D} : \mathbf{D}. \tag{3}$$

Здесь: p — давление, T — температура, ρ — плотность, μ — эффективная вязкость, \mathbf{v} — вектор скорости потока магмы; c_d — концентрация растворенного в магме газа; C_p и λ — коэффициенты теплоемкости и теплопроводности; \mathbf{g} — вектор ускорения силы тяжести; $\mathbf{D} = \nabla(\mathbf{v}^T + \mathbf{v})$ — тензор скорости деформации. На входе в канал (в очаге вулкана) задано давление p_{in} и температура T_0 . На стенках канала считается известной и постоянной температура T_w , а скорости удовлетворяют условиям прилипания или скольжения. Верхний индекс «Т» означает операцию транспонирования, символ «:» — свертку тензоров.

На основании экспериментальных данных [3, 6, 7] реологические свойства среды, зависящие от концентрации растворенного газа $c_d(p)$, температуры и второго инварианта I_2 тензора скорости деформации, задаются уравнением $\mu(c_d(p), T, I_2) = \mu_0 \exp(A(c_d, T)) F(I_2)$. При этом функция температуры и массовой концентрации растворенного газа $A(c_d, T)$ и функция второго инварианта тензора скорости деформации $F(I_2)$ описываются выражениями [6]:

$$A(c_d, T) = -3,545 + 0,833 L_c + \frac{9601 - 2368 L_c}{T - 195,7 - 32,25 L_c}, \quad F(I_2) = \frac{\eta_0}{\mu_0} + \frac{\tau_0}{\mu_0 I_2} \left(1 - \exp\left(-\frac{I_2}{I_2^*}\right) \right),$$

в которых обозначено:

$L_c = 2 + \lg(c_d)$ при $c_d = c_{d0} \sqrt{p}$, если $c_{d0} \sqrt{p} < c_{dm}$ и $c_d = c_{dm}$, если $c_{d0} \sqrt{p} \geq c_{dm}$, где $c_{d0} = C_f \sqrt{p_0}$, C_f — коэффициент растворимости газа; индексы означают: m — максимально возможную концентрацию газа, 0 — концентрацию, соответствующую давлению, создаваемому весом находящейся в канале неподвижной магмы p_0 ; μ_0 — вязкость при давлении p_0 и температуре T_0 ; η_0, τ_0, I_2^* — параметры нелинейности реологического уравнения.

Следует отметить, что вязкость магмы плавно убывает с ростом температуры и резко увеличивается при снижении давления за счет уменьшения содержания растворенного в магме газа (Рис. 1, а). В одномерном случае, при $\eta_0 = 0,5 \text{ Па} \cdot \text{с}$, $\tau_0 = 10 \text{ ГПа}$, $I_2^* = 2 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$, $I_2 = \partial v_z / \partial r = \dot{\gamma}$, с ростом скорости деформации в диапазоне $10^{-5} < \dot{\gamma} < 10^{-3}$ эффективная вязкость снижается в пять раз, а вне этого диапазона остается практически постоянной (Рис. 1, б). Решение задачи течения среды с такими нелинейными реологическими свойствами связано со значительными математическими трудностями, поэтому для ее реализации часто прибегают к численным методам.

Для общности постановки обезразмерим уравнения (1)–(3). В качестве характерных масштабов длины, скорости, давления, температуры и вязкости возьмем размерные величины: радиус канала вулкана R , типичную скорость экструзивного извержения v_0 и характеристики течения магмы на входе в канал p_0, T_0, μ_0 . Тогда уравнения (1)–(3) примут вид:

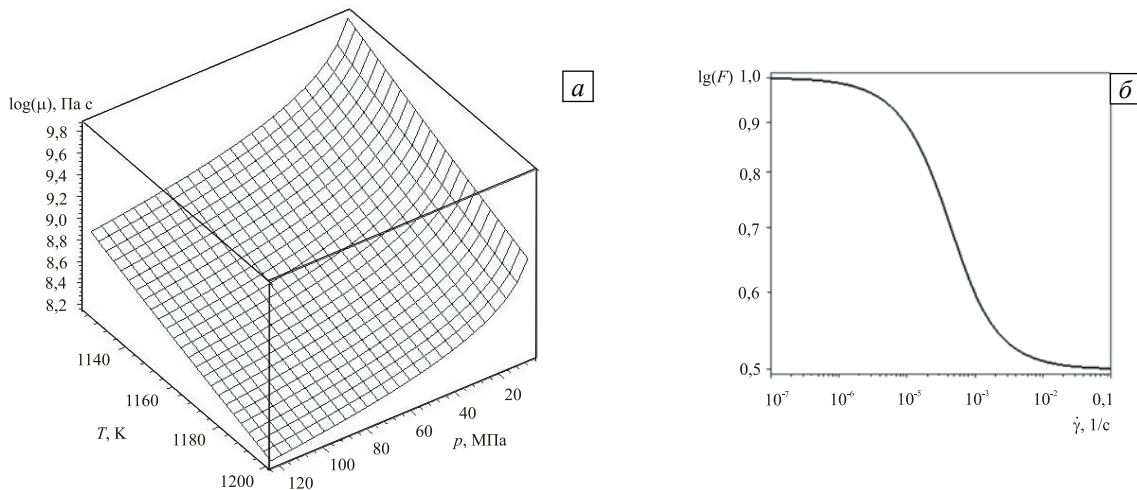


Рис. 1. Реологические свойства магмы: зависимость вязкости от температуры и давления в полулогарифмических координатах (а); зависимость $F(\dot{\gamma})$ в одномерном случае (б)

$$\nabla p' = \alpha \left(\nabla \cdot \left[\mu' \nabla (\mathbf{v}^T + \mathbf{v}') \right] \right) - \kappa \mathbf{e}_z, \quad (4)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}') = 0, \quad (5)$$

$$(\mathbf{v}' \cdot \nabla) T' = \nu \nabla \cdot (\nabla T') + \beta \Phi. \quad (6)$$

Здесь $\Phi = \mu' (c_d(p), T, I_2) \left[\nabla (\mathbf{v}^T + \mathbf{v}') : \nabla (\mathbf{v}^T + \mathbf{v}') \right]$, $\alpha = \frac{\mu_0}{\rho \nu_0 R} \frac{\rho \nu_0^2}{p_0} = \frac{2}{\text{Re} \cdot \text{Eu}}$, $\beta = \frac{\mu_0}{\rho \nu_0 R} \frac{\nu_0^2}{C_p T_0} = \frac{1}{\text{Re} C_p T_0}$,
 $\nu = \frac{\lambda}{\rho C_p \nu_0 R} = \frac{1}{\text{Pe}}$, $\kappa = \frac{\rho \nu_0^2 g R}{p_0 \nu_0^2} = \frac{2}{\text{Eu} \cdot \text{Fr}^2}$, где Re, Eu, Pe, Fr — соответственно, числа Рейнольдса, Эйлера, Пекле и Фруда.

3. Алгоритм численного решения

Согласно процедуре Галеркина, краевая задача (4)–(6) преобразуется в полуслабую вариационную форму с естественными граничными условиями для напряжений:

$$\int_V \left\{ -(\nabla \cdot \mathbf{u}) p' + \alpha \nabla \mathbf{u} : \nabla (\mathbf{v}^T + \mathbf{v}') \right\} dV = -\kappa \int_V \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_z dV + p'_{in} \int_S \mathbf{u} \mathbf{e}_z dS, \quad (7)$$

$$\int_V \mathbf{H} (\nabla \cdot \mathbf{v}') dV = 0,$$

$$\int_V \left\{ \Psi (\mathbf{v}' \cdot \nabla) T' + \nu \nabla \Psi \cdot \nabla T' \right\} dV = \beta \int_V \Psi \Phi dV,$$

где \mathbf{u}, \mathbf{H} , — взвешивающие функции, p'_{in} — давление в очаге вулкана. В дальнейшем штрихи у безразмерных величин опускаются.

Решение полученной нелинейной системы (7) сводится к последовательности линеаризованных задач, в которых нелинейные члены рассчитываются по результатам предыдущих итераций. Сначала решается задача течения с постоянной вязкостью. Затем, с учетом найденных на предыдущей итерации компонент вектора скорости, решается задача конвективного теплопереноса. Далее по найденному температурному полю корректируется эффективная вязкость, а по полю скоростей вычисляются конвективные члены в температурной задаче. Процесс повторяется до достижения заданной точности.

На каждой итерации дискретизация линеаризованных задач осуществляется треугольными конечными элементами с линейной аппроксимацией компонент вектора скорости и температуры, а давление принимается кусочно-постоянным в пределах четырехугольников, состоящих из двух треугольных элементов. Сходимость итерационного процесса контролируется по эффективной вязкости μ , зависящей от основных параметров задачи — давления, температуры, скорости деформации. Предварительное исследование показало, что при низких перепадах давления ($p_{in} \leq 1,1$) итерационный процесс сходится менее чем за 50 шагов при относительной погрешности $\varepsilon = \mu_j^n / \mu_j^{n-1} = 0,001$. При возрастании перепада давления сходимость ухудшается, и после некоторого предельного значения $p_{in} > 1,6$ процесс расходится, что связано с приближением к точке бифуркации решения [1–4]. Граничные условия первого рода для скорости и температуры удовлетворяются непосредственно присвоением соответствующим переменным заданных значений в граничных узлах.

Для того чтобы учесть проскальзывание по границе, обычно вводится итерационная процедура: задается начальное распределение v_w , определяются из решения задачи τ_w на стенке, а затем по закону трения $v_w = f(\tau_w)$, который обычно определяется экспериментально, вычисляется новое распределение v_w . Однако при решении задачи методом конечных элементов можно обойтись без дополнительных итераций. Для этого расширим область решения, добавив один слой элементов с малой толщиной δ к той части границы, на которой происходит проскальзывание. В узловых точках, находящихся на внешней границе расширенной области, зададим условия прилипания, а в узловых точках, лежащих на границе реальной области, потребуем выполнения условия непроникания основного материала в приграничный слой. Иначе говоря, будем считать, что в этом слое узлов нормальная составляющая скорости v_n принимает нулевые значения, а касательная v_τ остается неизвестной и подлежит определению. В такой постановке в тонком фиктивном слое жидкости реализуется чистое течение Куэтта, в котором $\mu = f(\tau_w) / \dot{\gamma}$, $\dot{\gamma} = \partial v_\tau / \partial n = v_w / \delta$.

Таким образом, расчет поля скоростей осуществляется по уравнениям одного типа, как для внутренних элементов, так и для фиктивного приграничного слоя. Отличие заключается лишь в реологических свойствах материалов фиктивного слоя и основной области, что легко учитывается в методе конечных элементов. В результате закон трения на границе удовлетворяется автоматически.

4. Результаты численного моделирования

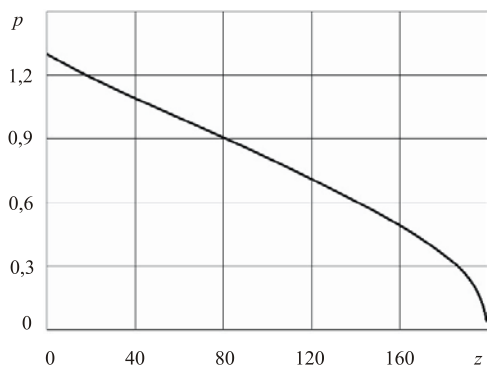


Рис. 2. Распределение безразмерного давления по длине канала при давлении на входе $p_{in} = 1,3$

Исследовалось течение магмы в канале вулкана при различных значениях давления на входе, реологических свойствах магмы и условиях на границе канала. Задача решалась в цилиндрической системе координат с началом в очаге вулкана и осью z , которая совпадает с осью канала. Как пример расчета представлены профили давления, скорости и температуры в канале вулкана при безразмерном давлении $p_{in} = p/p_0 = 1,3$. Выбор такой величины давления обусловлен, с одной стороны, возможностью наглядной демонстрации основных физических процессов, имеющих место при истечении магмы (заметного влияния диссипации, нелинейной реологии и скольжения на стенке), а с другой стороны тем, что величина давления не превышает точки бифуркации, после которой происходит неконтролируемое возрастание

расхода магмы. Другие характерные параметры задачи: $R = 25$ м; $L = 5000$ м; $p_0 = \rho g L + p_a = 1,226 \cdot 10^8$ Па; $p_a = 2,5 \cdot 10^6$ Па; $v_0 = 1$ м/с; $T_0 = 1123$ К; $C_p = 1200$ Дж/(кг · К); $\mu_0 = 3,7 \cdot 10^4$ Па · с; $C_f = 4,11 \cdot 10^4$ Па^{1/2}; $\rho = 2500$ кг/м³; $c_{dm} = 0,05$. Им соответствуют безразмерные координаты $r' = r/R$, $z' = z/R$ (далее штрихи опускаются) и критерии: $Re = 1,69$; $Eu = 4,9 \cdot 10^4$; $Pe = 3,7 \cdot 10^7$; $Fr = 6,4 \cdot 10^{-2}$; $\kappa = 5 \cdot 10^{-3}$; $v_0^2 / (C_p \cdot T_0) = 7,4 \cdot 10^{-7}$. В качестве закона трения было принято условие постоянства безразмерного касательного напряжения на границе канала $\tau_w = 100$, которое можно интерпретировать как предел прочности материала на сдвиг.

Расчеты показывают, что давление слабо меняется по радиусу канала, а его изменение по длине представлено на рисунке 2. Профили продольной скорости и температуры существенно меняются от входного сечения к выходному (Рис. 3). Радиальная компонента скорости не превышает 0,1% от продольной, поэтому не приводится.

В окрестности входа в канал вулкана давление велико, а вязкость магмы относительно низкая, поэтому вязкая диссипация не приводит к значительному росту температуры. При подъеме магмы, сопровождающемся падением давления, ее вязкость возрастает. Вследствие этого в пристеночной области существенно увеличивается температура и происходит выполаживание профиля скорости в центральной части канала, а вблизи стенки профиль становится круче. Возрастание градиента скорости совместно с ростом вязкости за счет падения давления в пристеночной области ведет к увеличению по модулю касательного напряжения на стенке $\tau = \mu \partial v_z / \partial r$, которое может превысить критическое значение τ_w . В этом случае на части граничной поверхности начинается проскальзывание магмы по стенке канала (Рис. 4). С другой стороны, с ростом давления в очаге вулкана касательные напряжения на стенках канала в зоне прилипания увеличиваются (по модулю), а в зоне скольжения остаются постоянными. При этом зона скольжения расширяется, и расход магмы Q резко возрастает (Рис. 5). В пределе, когда по всей длине канала касательные напряжения на стенках становятся равными τ_w и давление на входе p_{in} достигает критического значения p_{in}^* , определяемого из баланса внешних и внутренних сил

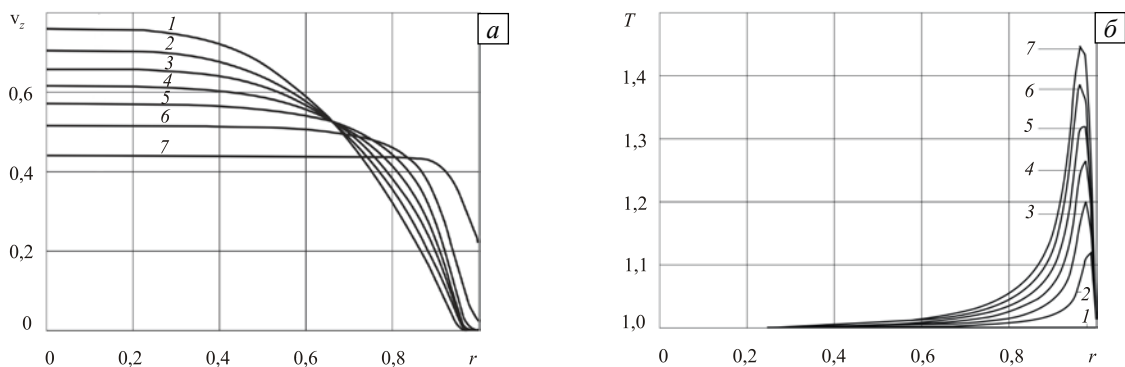


Рис. 3. Безразмерные характеристики неизотермического ньютоновского течения в условиях частичного проскальзывания при давлении на входе $p_{in} = 1,3$: профили продольной скорости (а) и температуры (б); цифрами обозначены номера поперечных сечений канала от входного (1) до выходного (7) через равные промежутки по длине

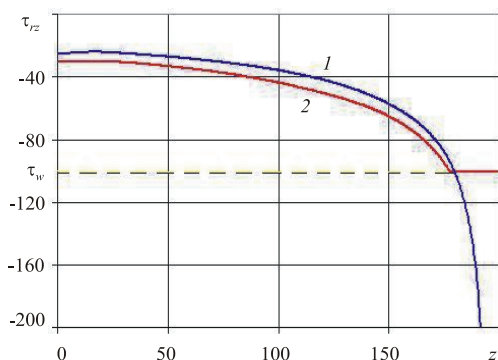


Рис. 4. Распределение касательного напряжения на стенке канала при давлении на входе $p_m = 1,3$ в случае изотермического течения с прилипанием (1) и частичным проскальзыванием на стенках канала (2)

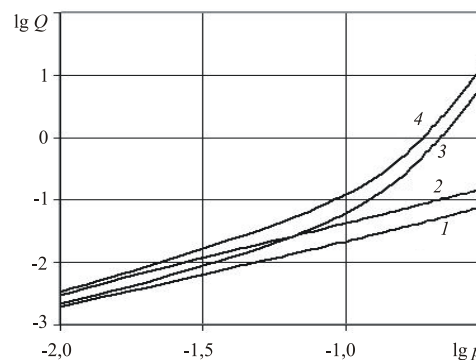


Рис. 5. Расходно-напорные кривые при течении неньютоновской магмы при давлении на входе $p_m = 1,3$: изотермическое (1) и неизомермическое (2) течения прилипанием; изотермическое (3) и неизомермическое (4) течения с проскальзыванием

$$2\pi \int_0^R \left((p_m^*(r,0) - p_0) / p_0 \right) r dr = \pi \int_0^L \tau_{rz}(R,z) dz$$
, наступает неконтролируемое возрастание расхода. Это один из возможных механизмов перехода от течения экструзивного типа к взрывному извержению. Расчеты показывают, что учет проскальзывания магмы вдоль стенок канала вулкана приводит к гораздо более существенному росту расхода магмы, чем учет вязкой диссипации. Ранее этот факт в моделях не учитывался.

5. Заключение

Построена двумерная осесимметричная модель стационарного неизомермического течения нелинейно-вязкой несжимаемой магмы в цилиндрическом канале вулкана. Разработаны алгоритм и вычислительная программа, базирующаяся на методе конечных элементов.

Показано, что распределение давления и концентрации растворенного газа для несжимаемой магмы представляет собой нелинейно убывающую по длине канала функцию, слабо зависящую от радиуса. Сдвиговая деформация, диссипация механической энергии, максимум температуры и минимум эффективной вязкости локализируются вблизи стенок канала с ростом максимальных значений в направлении выходного сечения. Проскальзывание магмы снижает локализацию сдвига у стенок и ведет к снижению диссипации энергии и уменьшению разогрева магмы в приграничной области. С другой стороны, превышение критического значения давления p_m^* в очаге вулкана приводит к тому, что зона проскальзывания занимает всю область канала вулкана и происходит неконтролируемое возрастание расхода. Это один из возможных механизмов перехода от экструзивного режима к взрывному извержению.

Литература

1. Бармин А.А., Мельник О.Э. Гидродинамика вулканических извержений // Успехи механики. – 2002. – Т. 1, № 1. – С. 32-60.
2. Melnik O., Stefen R., Sparks R., Costa A., Barmin A.A. Volcanic eruptions: cyclicity during lava dome growth // Encyclopedia of Complexity and Systems Science. – 2009. – Part 22. – P. 9763-9784. DOI
3. Barmin A.A., Vedeneeva E.A., Mel'nik O.E. Effect of viscous dissipation on nonisothermal high-viscosity magma flow in a volcanic conduit // Fluid Dyn. – 2004. – V. 39, N. 6. – P. 863-873. DOI
4. Melnik O., Sparks R.S.J. Controls on conduit magma flow dynamics during lava dome building eruptions // J. Geophys. Res. – 2005. – V. 110. – b02209. DOI
5. Gonnermann H.M., Manga M. The fluid mechanics inside a volcano // Annu. Rev. Fluid Mech. – 2007. – V. 39. – P. 321-356. DOI
6. Caricchi L., Burlini L., Ulmer P., Gerya T., Vassalli M., Papale P. Non-Newtonian rheology of crystal-bearing magmas and implications for magma ascent dynamics // Earth Planet. Sc. Lett. – 2007. – V 264, N. 3-4. – P. 402-419. DOI
7. Pal R. Steady laminar flow of non-Newtonian bubbly suspensions in pipes // J. Non-Newton. Fluid. – 2007. – V. 147, N. 1-2. – P. 129-137. DOI
8. Pal R. Rheological constitutive equation for bubbly suspensions // Ind. Eng. Chem. Res. – 2004. – V. 43. – P. 5372-5379. DOI
9. Neuberg J.W., Tuffen H., Collier L., Green D., Powell T., Dingwell D. The trigger mechanism of low-frequency earthquakes on Montserrat // J. Volcanol. Geoth. Res. – 2006. – V. 153, N. 1-2. – P. 37-50.

Поступила в редакцию 21.03.12; опубликована в электронном виде 22.10.12

Сведения об авторах

Бармин Алексей Алексеевич, дфмн, гнс, проф., Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, 119192, Москва, Мичуринский пр., д. 1
Мельник Олег Эдуардович, дфмн, член-корр. РАН, Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова; E-mail: melnik@imec.msu.ru
Скульский Олег Иванович, дтн, внс, Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614013, Пермь, ул. Академика Королева, д. 1; E-mail: skul@icmm.ru