

DOI: [10.7242/1999-6691/2012.5.3.41](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2012.5.3.41)

УДК 519.635:532.595

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИКИ КРИВОЛИНЕЙНОГО ТРУБОПРОВОДА

О.П. Ткаченко

Вычислительный центр ДВО РАН, Хабаровск, Россия

Поставлены численные эксперименты по механике медленного движения трубопровода. Установлено, что рассмотренная математическая модель адекватно описывает известные явления динамики протяженных труб, и может быть расширена на случай переменного перепада внутреннего давления. Расчеты показали, что поперечные сечения протяженного криволинейного тонкостенного трубопровода испытывают деформацию, чему есть экспериментальное подтверждение.

Ключевые слова: численный эксперимент, гидроупругость, изогнутый трубопровод

NUMERICAL ANALYSIS OF THE DYNAMICS OF A CURVILINEAR PIPELINE

O.P. Tkachenko

Computer center of FEB RAS, Khabarovsk, Russia

Numerical experiments on the mechanics of the slow motion of a pipeline are designed. It is established that the considered mathematical model adequately describes the known phenomena of the dynamics of extended pipes and can be extended to the case of variable internal pressure drop. Calculations have shown that the cross-sections of the extended curvilinear thin-walled pipeline experience deformation, which has been confirmed experimentally.

Key words: numerical experiment, hydroelasticity, bent pipeline

1. Введение

В результате различных внешних факторов (подвижки грунта, вибраций от техногенных процессов, сейсмической активности и других), а также собственной неустойчивости, трубопроводы отклоняются от своего проектного положения [1, 2]. Исследование процессов изменения трассы трубопроводов и разработка методов диагностики состояния их профиля является одной из актуальных проблем.

Данной тематике посвящено большое число монографий и обзорных статей. Влияние сейсмических явлений на трубопроводы подробно изложено в [2]. Задачи взаимодействия инженерных конструкций с жидкостью выделились в новое направление вычислительной и прикладной механики, получившее за рубежом название «Fluid-Structure Interaction Problems». Обзоры соответствующих публикаций сделаны в [3, 4]. В серии сборников [5] представлены вопросы морских технологий, связанные с конструированием и эксплуатацией подводных райзеров — трубопроводов, предназначенных для подъема из скважины полезного продукта, отвода использованного бурового раствора и тому подобное.

В цикле работ [6–11] выполнены исследования кинематики и динамики изогнутого трубопровода, построены математические модели, созданы алгоритмы для их численного анализа, решены тестовые примеры. В [7] проанализирована геометрия трубопровода и построена математическая модель для решения внутренней задачи распространения квазилинейных гидроупругих колебаний. В [8] проведена верификация этой математической модели на основе известных из литературы данных и установлено, что предложенная модель является более универсальной, чем существующие. В [9] рассмотрены нелинейные волны в прямых и изогнутых трубах; для анализа волн получены уравнения Кортевега–де Вриза и Клейна–Гордона–Фока; доказана достаточность уравнений для достижения необходимой точности математического моделирования.

В статьях [6, 10, 11] обсуждается внешняя задача медленного деформирования подземного трубопровода. Работа [10] посвящена анализу кинематики и обоснованию математической модели движения трубопровода во внешней среде. В [6] построенная математическая модель уточнена, создан и протестирован алгоритм для ее численной реализации. В [11] изучено движение трубопровода как растяжимого стержня в вязкой среде.

В [6–10] для редукции получившихся систем дифференциальных уравнений к одномерным по пространству уравнениям используется универсальная геометрия изогнутого трубопровода. Алгоритм редукции является общим для всех этих задач.

Целью данной работы является численный анализ математической модели трубопровода как геометрически нелинейной оболочки, содержащей поток жидкости и окруженной вязкой внешней средой. Решаются задачи: а) нахождения перемещений и деформаций протяженных трубопроводов при постоянном перепаде внутреннего давления в потоке жидкости; б) расчета динамики оболочки

с продольным профилем в виде цепной линии, в которой перемещается быстрый поток жидкости; в) определения перемещений протяженного трубопровода при переменном перепаде внутреннего давления.

В численных экспериментах показано, что поперечные сечения протяженного тонкостенного криволинейного трубопровода испытывают депланацию, а деформации стенки трубы носят сильно неравномерный характер в больших окрестностях точек закрепления или экстремумов кривизны профиля. Установлено, что предложенная математическая модель описывает известный эффект «обратного поведения трубопровода» в случае профиля, имеющего вид цепной линии. Найдено, что исследуемая модель применима в случае динамически меняющегося внутреннего потока.

2. Построение математической модели

Рассматривается металлическая труба длиной L с круглым поперечным сечением радиусом R_0 и малой толщиной стенки h ; в недеформированном состоянии ее осевая линия — слабоизогнутая плоская кривая $\Gamma_0 = \{x_0, y_0 : x_0 = x_0(s), y_0 = y_0(s)\}$, где s — естественный параметр (длина дуги). Под действием постоянного перепада давления по трубе со скоростью ϑ_{s0} движется стационарный поток жидкости.

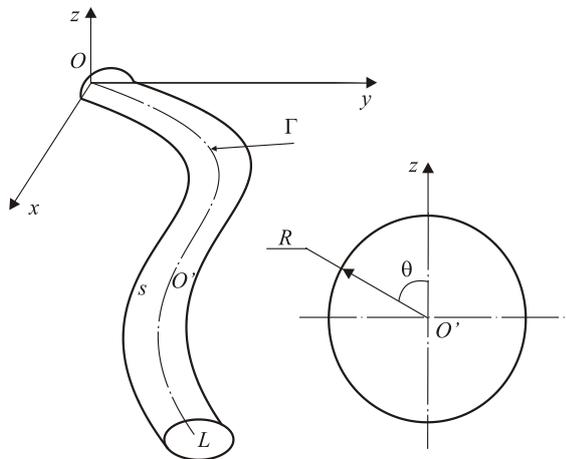


Рис. 1. Геометрия механической системы: $\{O, x, y, z\}$ — глобальные декартовы координаты, $\{O, s, \theta, R\}$ — криволинейные координаты

Ставится задача вычислить положение осевой линии $\Gamma = \{x(s, t), y(s, t)\}$ и деформации стенок трубопровода. Предполагается, что на больших интервалах времени внешняя среда ведет себя как сильно вязкая жидкость, а начальный радиус кривизны осевой линии $\rho_0(s)$ велик по сравнению с радиусом трубы.

Системы координат (Рис. 1), используемые для математического моделирования движения трубопровода, описаны в [7, 10]. Криволинейные координаты $\{O, s, \theta, R\}$ строятся на оси Γ так, что s — длина дуги (OO'), $\{O', \theta, R\}$ — полярные координаты в поперечном сечении трубы. В отличие от криволинейных координат в [12], используемые здесь координаты позволяют рассматривать более общую геометрию с переменной кривизной

продольного профиля.

На основе алгоритма перехода от трехмерного упругого тела к оболочке, предложенного в [13], построена математическая модель трубопровода как технической оболочки, погруженной в вязкую среду [10]. Для применимости этой модели необходимо выполнение условий В.З. Власова [13]:

$$h^* = h/R_0 \leq 0,1; \quad \min(L, \rho_0)/R_0 \geq 4. \quad (1)$$

Предполагается малым параметр:

$$\lambda = R_0 \max |\kappa_0(s)| \ll 1, \quad (2)$$

$\kappa_0(s)$ — кривизна осевой линии Γ_0 .

Согласно традиционному подходу [13], перемещения срединной поверхности трубы вдоль осей криволинейных координат s, θ, R обозначаются как u, v, w , соответственно. После перехода к безразмерным переменным и неизвестным $\zeta = s/\ell, \tau = \omega t, u' = u/R_0, v' = v/R_0, w' = w/R_0$, где ℓ, ω — характерные масштабы длины и времени, безразмерные перемещения запишутся в виде:

$$\begin{aligned} u'(\zeta, \theta, \tau) &= u_0(\zeta) + \lambda u_1(\zeta, \tau) \sin \theta + O(\lambda^2), \\ v'(\zeta, \theta, \tau) &= \lambda v_1(\zeta, \tau) \cos \theta + O(\lambda^2), \\ w'(\zeta, \theta, \tau) &= w_0(\zeta) + \lambda w_1(\zeta, \tau) \sin \theta + O(\lambda^2), \end{aligned} \quad (3)$$

$u_0, v_0, w_0, u_1, v_1, w_1$ — функции одной пространственной переменной. Возможность такого разложения обоснована в [7, 10]. Посредством (3) из уравнений устраняется независимая переменная θ , тем самым задача редуцируется к одномерной по координатам. Окончательная формулировка уравнений математической модели [6] выглядит следующим образом:

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \zeta^2} + \nu \alpha \frac{\partial w_0}{\partial \zeta} - \alpha^3 \left(\frac{\partial w_0}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \zeta^2} \right) = -\frac{1}{E^* h^*} \frac{\alpha}{2} \ell \beta \vartheta_{s_0}^2, \quad (4)$$

$$w_0 + \frac{h^*}{12} \left(\alpha^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial \zeta^2} + \alpha^4 \frac{\partial^4 w_0}{\partial \zeta^4} \right) + \nu \alpha \frac{\partial u_0}{\partial \zeta} - \frac{\alpha^2}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial \zeta} \right)^2 = \frac{1}{E^* h^*} \left[p_a + \ell \beta \vartheta_{s_0}^2 (L' - \zeta) - \rho_{gr} g h_0 \right]. \quad (5)$$

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \zeta^2} - \frac{1-\nu}{2} u_1 - \frac{1+\nu}{2} \alpha \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} + \nu \alpha \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} + f \left[\frac{1-\nu}{2} u_0 - 2\alpha^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \zeta^2} + \alpha(1-\nu) \frac{\partial w_0}{\partial \zeta} \right] - \alpha^3 \left(\frac{\partial w_1}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial w_0}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \zeta^2} \right) + 3\alpha^3 f \cdot \frac{\partial w_0}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \zeta^2} = \frac{\rho_i R_0^2 \omega^2}{E^*} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2}, \quad (6)$$

$$\frac{1-\nu}{2} \alpha^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial \zeta^2} - v_1 - \frac{1}{E^* h^*} \frac{2u_1^* \mu}{R_0 (0,5 - \ln |\gamma \rho_{gr} \lambda u_1^* R_0 / (4\mu)|)} + \frac{1+\nu}{2} \alpha \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} + \quad (7)$$

$$+ w_1 + f \left(w_0 - \frac{3-\nu}{2} \alpha \frac{\partial u_0}{\partial \zeta} \right) - \alpha^2 \frac{\partial w_0}{\partial \zeta} \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} = \frac{\rho_i R_0^2 \omega^2}{E^*} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \tau^2};$$

$$w_1 + \frac{h^*}{12} \left(\alpha^4 \frac{\partial^4 w_1}{\partial \zeta^4} - \alpha^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \zeta^2} \right) + \nu \alpha \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} - v_1 + f \left[2\nu w_0 + (1-\nu) \alpha \frac{\partial u_0}{\partial \zeta} \right] - \alpha^2 \frac{\partial w_0}{\partial \zeta} \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} + \frac{\alpha^2}{2} f \left(\frac{\partial w_0}{\partial \zeta} \right)^2 = \quad (8)$$

$$= \frac{1}{E^* h^*} \left[\rho_f \vartheta_{s_0}^2 f - \frac{2u_1^* \mu}{R_0 (0,5 - \ln |\gamma \rho_{gr} \lambda u_1^* R_0 / (4\mu)|)} \right] - \frac{\rho_i R_0^2 \omega^2}{E^*} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau^2}.$$

Для замыкания постановки задачи деформирования трубы-оболочки в вязкой среде в результате действия внутренних нагрузок система уравнений (4)–(8) дополняется краевыми и начальными условиями:

$$u_0 = w_0 = v_1 = w_1 = 0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial \zeta} = \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} = 0 \quad \text{при } \zeta = 0, \zeta = L' \text{ и любом } \tau; \quad (9)$$

$$u_1 = v_1 = w_1 = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial \tau} = \frac{\partial v_1}{\partial \tau} = \frac{\partial w_1}{\partial \tau} = 0 \quad \text{при любом } \zeta \text{ и } \tau = 0.$$

В уравнениях (4)–(10) обозначено: $\alpha = R_0/\ell$ — малый параметр; $E^* = E/(1-\nu^2)$, ν , E — коэффициент Пуассона и модуль Юнга материала трубы; β — коэффициент трения жидкости о стенку; $h^* = h/R_0$; p_a — атмосферное давление; $L' = L/\ell$ — безразмерная длина трубы; g — ускорение свободного падения; h_0 — глубина закладки трубопровода; ρ_{gr} , ρ_i , ρ_f — плотности внешней среды, материала трубы и заполняющей ее жидкости, соответственно; f — функция кривизны $\kappa(\zeta, \tau)$, $f(\zeta, \tau) = \kappa(\zeta, \tau)/(\max |\kappa_0(\zeta)|)$; μ , μ_f — вязкости внешней среды и жидкости; u_1^* — скорость поперечного движения трубы; $\gamma = 1,7811$ — число Маскерони. Коэффициент трения β и плотность силы трения потока о стенку трубы $\Phi_t(\vartheta_{s_0})$ (будет использоваться ниже) вычисляются по полуэмпирическим формулам [7]:

$$\beta = \frac{\lambda_1 \rho_f}{4R_0}; \quad \Phi_t(\vartheta_{s_0}) = \frac{R_0}{2} \beta \vartheta_{s_0}^2; \quad \text{Re} = \frac{2\vartheta_{s_0} R_0}{v_f}; \quad v_f = \mu_f / \rho_f; \quad \begin{cases} \lambda_1 = \frac{64}{\text{Re}}, & \text{Re} < 2000; \\ \lambda_1 = 0,0032 + \frac{0,221}{\text{Re}^{0,237}}, & \text{Re} \geq 2000. \end{cases}$$

Формулы для λ_1 , β найдены И. Никурадзе и приведены в классическом труде Л.Г. Лойцянского [14], в котором изложена методика учета трения потока жидкости в шероховатых трубах.

Текущие координаты произвольной точки x , y , кривизна κ и скорость поперечного движения u_1^* осевой линии выражаются через искомые функции с помощью формул:

$$\begin{aligned}
 x(\zeta, \tau) &= x_0(\zeta) + \alpha \frac{dx_0}{d\zeta} u_0 + \frac{\lambda \alpha}{2} \frac{dy_0}{d\zeta} (v_1 + w_1), \\
 y(\zeta, \tau) &= y_0(\zeta) + \alpha \frac{dy_0}{d\zeta} u_0 - \frac{\lambda \alpha}{2} \frac{dx_0}{d\zeta} (v_1 + w_1), \\
 \kappa(\zeta, \tau) &= \frac{1}{\ell} \frac{d^2 y}{d\zeta^2} \left(\frac{dx}{d\zeta} \right)^{-1}, \quad u_1^* = \frac{R_0 \omega}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial \tau} + \frac{\partial w_1}{\partial \tau} \right).
 \end{aligned} \tag{10}$$

Соотношения (4), (5) называются уравнениями в нулевом приближении, а (6)–(8) — уравнениями в первом приближении. В нулевом приближении трубопровод ведет себя как прямолинейный и цилиндрический, и точное решение краевой задачи (4), (5), (9) найдено в статье [6]. Его прямой подстановкой в (4), (5) проверяется утверждение, что на большом (по сравнению с R_0) расстоянии от концов трубы перемещения можно аппроксимировать функциями:

$$w_0 \approx [p_a + \ell \beta \vartheta_{s0}^2 (L' - \zeta) - \rho_{gr} g h_0] / (E^* h^*), \quad u_0 \approx \ell \beta \vartheta_{s0}^2 \zeta (L' - \zeta) / (4 E^* h^* \alpha).$$

Начально–краевая задача первого приближения решена по явной трехслойной разностной схеме с уточнением значений, способ построения которой изложен в [15]. В предложенном здесь алгоритме v_1 и w_1 вычисляются по явной схеме, а для определения u_1 употребляется неявная схема. Если ограничиться применением только явной разностной схемы, то не удастся добиться устойчивости ни при каком, даже сколь угодно малом шаге по времени. Этот эффект известен из теории разностных схем газовой динамики [15].

Расчетные формулы для v_1 и w_1 имеют вид:

$$\begin{aligned}
 v_i^{j+1} &= 2v_i^j - v_i^{j-1} + \frac{E^* \alpha^2}{\rho_r R_0^2 \omega^2} \frac{h_\zeta^2}{h_\zeta^2} \cdot \frac{1-\nu}{2} (v_{i+1}^j - 2v_i^j + v_{i-1}^j) - \frac{E^* h_\zeta^2}{\rho_r R_0^2 \omega^2} v_i^j - \\
 &- \frac{2\mu h_\zeta^2}{h^* R_0^3 \rho_r \omega^2} \cdot \frac{u_i^{*j}}{0,5 - \ln |\gamma \rho_{gr} \lambda u_1^{*j} R_0 / (4\mu)|} + \frac{E^* h_\zeta^2}{\rho_r R_0^2 \omega^2} \left\{ \frac{1+\nu}{4} \frac{\alpha}{h_\zeta} (u_{i+1}^j - u_{i-1}^j) + w_i^j + \right. \\
 &+ f_i^j \left[w_{0i} - \frac{3-\nu}{4} \frac{\alpha}{h_\zeta} (u_{0(i+1)} - u_{0(i-1)}) \right] - \frac{\alpha^2}{4h_\zeta^2} (w_{0(i+1)} - w_{0(i-1)}) (w_{i+1}^j - w_{i-1}^j) \left. \right\}, \\
 w_i^{j+1} &= 2w_i^j - w_i^{j-1} - \frac{E^* h_\zeta^2}{\rho_r R_0^2 \omega^2} \left\{ w_i^j + \frac{h^*}{12} \left[\frac{\alpha^4}{h_\zeta^4} (w_{i+2}^j - 4w_{i+1}^j + 6w_i^j - 4w_{i-1}^j + w_{i-2}^j) - \frac{\alpha^2}{h_\zeta^2} (w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j) \right] \right\} + \\
 &+ \frac{\nu \alpha}{2h_\zeta} (u_{i+1}^j - u_{i-1}^j) - v_i^j + f_i^j \left[2\nu w_{0i} + (1-\nu) \frac{\alpha}{2h_\zeta} (u_{0(i+1)} - u_{0(i-1)}) \right] - \frac{\alpha^2}{4h_\zeta^2} (w_{0(i+1)} - w_{0(i-1)}) (w_{i+1}^j - w_{i-1}^j) + \\
 &+ f_i^j \frac{\alpha^2}{8h_\zeta^2} (w_{0(i+1)} - w_{0(i-1)})^2 - \frac{1}{E^* h^*} \left[\rho_f \vartheta_{s0}^2 f_i^j - \frac{2\mu u_i^{*j}}{R_0 (0,5 - \ln |\gamma \rho_{gr} \lambda u_1^{*j} R_0 / (4\mu)|)} \right] \left. \right\}, \\
 u_i^{*(j+1)} &= \frac{R_0 \omega}{2h_\zeta} (v_i^{j+1} - v_i^j + w_i^{j+1} - w_i^j) \quad (i = 2, \dots, N-2).
 \end{aligned} \tag{11}$$

После этих расчетов вычисляется u_i^{j+1} по неявной схеме:

$$\begin{aligned}
 u_i^{j+1} &- \frac{E^* \alpha^2}{\rho_r R_0^2 \omega^2} \frac{h_\zeta^2}{h_\zeta^2} (u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}) + \frac{1-\nu}{2} \frac{E^* h_\zeta^2}{\rho_r R_0^2 \omega^2} u_i^{j+1} = 2u_i^j - u_i^{j-1} + \frac{E^* h_\zeta^2}{\rho_r R_0^2 \omega^2} \left\{ -\frac{1+\nu}{4} \frac{\alpha}{h_\zeta} (v_{i+1}^{j+1} - v_{i-1}^{j+1}) + \right. \\
 &+ \frac{\nu \alpha}{2h_\zeta} (w_{i+1}^{j+1} - w_{i-1}^{j+1}) + f_i^j \left[\frac{1-\nu}{2} u_{0i} - 2 \frac{\alpha^2}{h_\zeta^2} (u_{0(i+1)} - 2u_{0i} + u_{0(i-1)}) + (1-\nu) \frac{\alpha}{2h_\zeta} (w_{0(i+1)} - w_{0(i-1)}) \right] - \\
 &- \frac{\alpha^3}{2h_\zeta^3} \left[(w_{0(i+1)} - 2w_{0i} + w_{0(i-1)}) (w_{i+1}^{j+1} - w_{i-1}^{j+1}) + (w_{0(i+1)} - w_{0(i-1)}) (w_{i+1}^{j+1} - 2w_i^{j+1} + w_{i-1}^{j+1}) \right] +
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\left. + \frac{3\alpha^3}{2h_c^3} f_i^j (w_{0(i+1)} - w_{0(i-1)}) (w_{0(i+1)} - 2w_{0i} + w_{0(i-1)}) \right\};$$

$$u_0^{j+1} = 0, \quad u_N^{j+1} = 0 \quad (i = 1, \dots, N-1).$$

В соотношениях (11), (12) обозначено: h_τ и h_c — шаги по времени и координате; N — количество узлов сетки по продольной координате; $\zeta_i = i \cdot h_c$, $u_i^{*j} = u_1^*(\zeta_i, \tau_j)$, $u_{0i} = u_0(\zeta_i)$, $w_{0i} = w_0(\zeta_i)$, $u_i^j = u_1(\zeta_i, \tau_j)$, $v_i^j = v_1(\zeta_i, \tau_j)$, $w_i^j = w_1(\zeta_i, \tau_j)$. Краевые условия учитываются стандартным образом [15]. Для правильного учета нелинейности на каждом шаге по времени выполняется пересчет кривизны по формулам (10). Количество шагов по времени ограничивалось условием достижения стационарного решения.

В заключение рассуждений, связанных с построением математической модели движения трубопровода с протекающим по нему потоком жидкости, следует обратиться к соотношениям (3). Отсюда следует, что физический смысл произведения $(\lambda u_1 R_0)$ — это расстояние, на которое точка поперечного сечения выходит из его плоскости, то есть депланация [16]. Этот факт проверяется прямым вычислением при $u_1 = \text{const}$. По-видимому, впервые отклонение от закона плоских сечений в цилиндрической трубе наблюдалось в опытах В.З. Власовым [17].

3. Численный анализ математической модели

Для верификации используемого подхода и построенной математической модели решено несколько модельных задач, в которых рассматриваются различные геометрии продольного профиля трубопровода, условия внутреннего нагружения. Математической моделью во всех задачах является система уравнений (4)–(8) с начальными и краевыми условиями (9) и дополнительными соотношениями (10).

3.1. Варианты физических и геометрических параметров трубопровода

Рассмотрены три варианта продольного профиля трубопровода.

Задача 1. Профилю отвечает кубическая парабола: $y = 10^{-8} x(x-6000)(x-12000)$, $0 \leq x \leq 12000$.

Значения основных геометрических параметров: $L = 12500$ м; $\min|\rho_0| \approx 3951,5$ м. Скорость внутреннего потока жидкости равняется $\vartheta_{s0} = 1$ м/с, расчетный интервал времени — $T_{end} = 864000$ с или 10 суток.

Задача 2. Профиль описывает дробно-рациональная функция: $y = 40(1-0,001x)/(1+10^{-6}x^2)$,

$-6000 \leq x \leq 6000$. Значения основных геометрических параметров: $L = 12000$ м; $\min|\rho_0| \approx 1194,5$ м.

Скорость внутреннего потока жидкости составляет $\vartheta_{s0} = 1$ м/с, расчетный интервал времени — $T_{end} = 691200$ с или восемь суток.

Задача 3. Профилю соответствует уравнение цепной линии: $y = -21901,4 + 21901,4 \operatorname{ch}((x+21859,2)/21901,4-1)$, $0 \leq x \leq 3000$. Значения основных геометрических параметров: $L = 3009$ м; $\min|\rho_0| \approx 17092,4$ м. Скорость внутреннего потока жидкости $\vartheta_{s0} = 10$ м/с, расчетный интервал времени $T_{end} = 86400$ с или 1 сутки. Дополнительные параметры данной задачи: $h = 0,023$ м; $R_0 = 0,23$ м; $\mu_f = 0,1$ Па·с; $\rho_f = 998$ кг/м³.

Прочие физические и геометрические параметры во всех задачах совпадают: $\rho_{gr} = 1700$ кг/м³; $\mu = 10000$ Па·с; $\rho_i = 7200$ кг/м³; $h = 0,005$ м; $E = 2,07 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu = 0,24$; $R_0 = 0,3$ м; $\mu_f = 0,667$ Па·с; $\rho_f = 850$ кг/м³ и примерно соответствуют потоку легкой нефти в стальной трубе. Отличия, имеющиеся в Задаче 3, обусловлены ее спецификой и будут пояснены ниже.

В результате численных экспериментов найдены функции перемещений осевой линии $w_n(t, s)$, продольных и угловых деформаций стенки $\varepsilon_1(s, \theta)$, $\omega(s, \theta)$ в конечный момент времени $t = T_{end}$, координат осевой линии $x(t, s)$, $y(t, s)$. Для Задач 1, 2 вычислена также функция $u_1(t, s)$, отражающая величину депланаций поперечных сечений. Во всех расчетах достигнуто стационарное состояние.

3.2. Деформации и перемещения протяженных трубопроводов

В Задачах 1, 2 моделируются относительно протяженные профили. На рисунке 2 изображены перемещения осевой линии, координаты профиля трубопровода, его продольные деформации

и деформации, соответствующие условиям Задачи 1. Перемещения осевой линии (Рис. 2 а, б) иллюстрируют согласованность предложенной математической модели с фундаментальными законами механики: вычисленное с ее помощью результирующее перемещение профиля направлено в сторону равнодействующей распределенной по стенке трубы нагрузки, создаваемой текущим потоком жидкости. Продольная деформация стенки (Рис. 2 в), сильно изменяющаяся в большой окрестности точки закрепления, указывает на возможные деформации поперечных сечений трубы. Это предположение подтверждается графиком функции продольного перемещения стенки (Рис. 2, з), геометрический смысл которой и есть деформация сечения. Таким образом, численный эксперимент показал существование у протяженного тонкостенного криволинейного трубопровода деформации поперечного сечения величиной порядка $0,02R_0$.

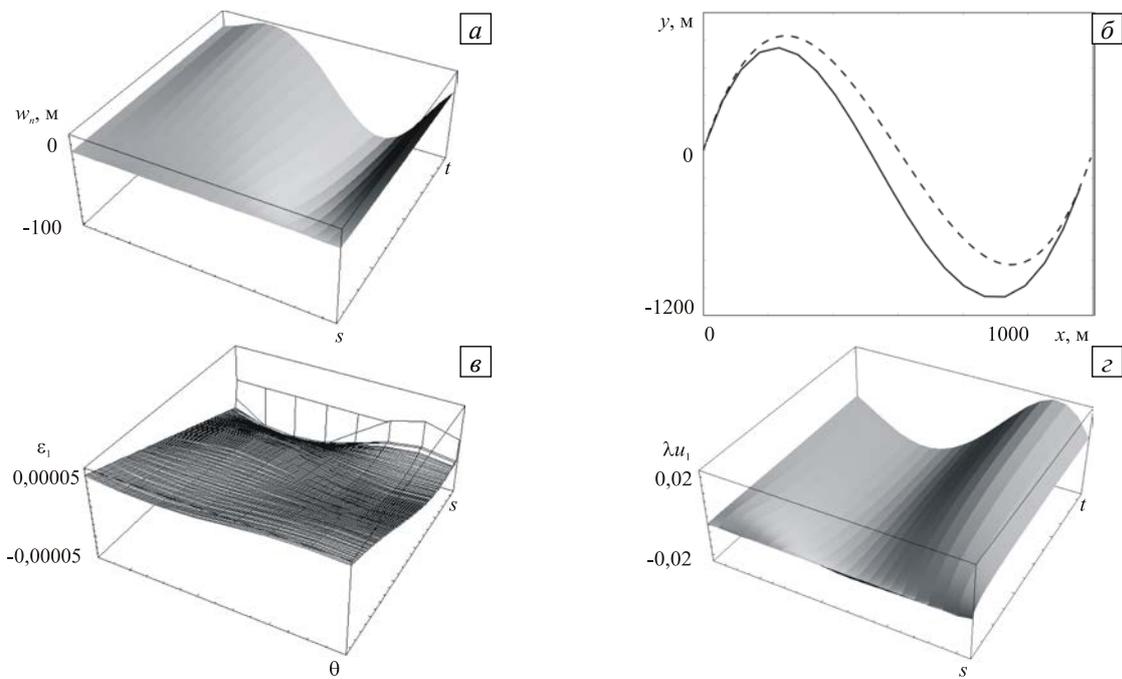


Рис. 2. Перемещение осевой линии (а), координаты профиля в начале (пунктирная линия) и в конце (сплошная линия) расчета (б), продольные деформации стенки трубы (в), продольное перемещение в первом приближении (з)

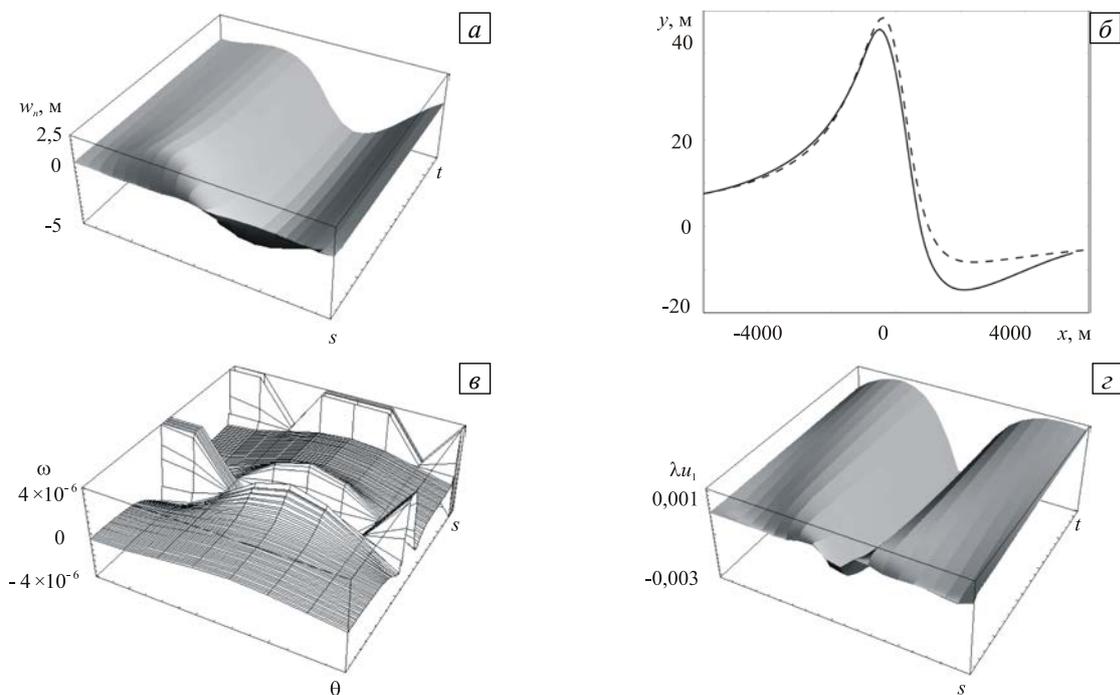


Рис. 3. Перемещение осевой линии (а), координаты продольного профиля в начале (пунктирная линия) и в конце (сплошная линия) расчета (б), угловые деформации стенки трубы (в), продольное перемещение в первом приближении (з)

На рисунке 3 изображены координаты профиля трубопровода, его угловые деформации и депланации, полученные согласно условиям Задачи 2. Аналогично Задаче 1, изменение координат профиля в начале и конце расчета (Рис. 3, б) указывает на соответствие используемой модели законам механики. Угловые деформации (Рис. 3, в) иллюстрируют искажения поперечных сечений в большой окрестности точек изгиба и закрепления профиля. Также имеют место депланации поперечного сечения порядка $0,003R_0$.

3.3. Деформации и перемещения трубопровода с профилем «цепная линия»

Свободно провисающая под действием силы тяжести нерастяжимая нить принимает форму, описываемую уравнением цепной линии. Приближенно можно полагать, что именно такую форму имеет осевая линия морского трубопровода–райзера [18]. Целью, которая преследуется решением Задачи 3, является анализ взаимодействия протяженной трубы с быстрым внутренним потоком и сравнение с результатами из [18], где найдены условия существования «обратного поведения райзера» — условия, при которых профиль трубопровода движется в сторону, противоположную направлению его прогиба.

В [18] главной характеристикой растяжимости трубы является параметр Ирвина, применяемый в механике кабелей: $E_{irv} = F/N_a \sqrt{ES_t/N_a}$, где F — внешняя распределенная вдоль трубы растягивающая сила; N_a — внутренняя сила натяжения, $N_a = ES_t \varepsilon_1$; E — модуль Юнга материала трубы; S_t — площадь поперечного сечения ее стенки. В данной задаче единственной растягивающей силой является сила увлечения стенки трубы вследствие трения внутренним потоком жидкости, поэтому $F = S_{ib} \cdot \Phi_t(\vartheta_{s0})$, S_{ib} — площадь внутренней поверхности трубы, $S_{ib} = 2\pi(R_0 - h/2)L$. Прямое вычисление дает $E_{irv} \approx 37,6$. Это значение достаточно далеко от $E_{irv} = 286$ из [18], при котором явление «обратного поведения» не наблюдается.

Результаты численного решения Задачи 3 изображены на рисунке 4. Показаны график нормальных перемещений осевой линии и координаты осевой линии для нескольких моментов времени. На рисунке 4, б видно, что труба смещается в направлении, противоположном первоначальному прогибу, что иллюстрирует явление «обратного поведения». Таким образом, результаты расчета по исследуемой модели согласуются с известными данными.

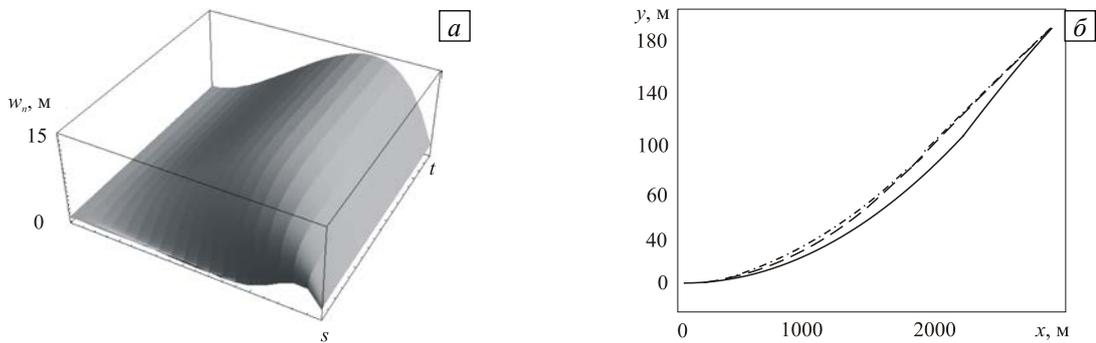


Рис. 4. Нормальные перемещения осевой линии (а) и ее координаты в разные моменты времени t (б): 10 минут (сплошная линия); 1 час (пунктирная линия); 24 часа (штрих-пунктирная линия)

3.4. Перемещения трубопровода под действием динамического перепада давления

В Задачах 1–3 перепад давления на концах трубы считается постоянным, обеспечивающим стабильную скорость внутреннего потока жидкости. Для всех задач были поставлены численные эксперименты, в которых перепад давления менялся по кусочно-линейному закону:

$$\Delta p = \begin{cases} \Delta p_0, & t \leq t_0, \\ \Delta p_0 \left[k_p + \frac{k_p - 1}{\Delta t} (t - t_0 - \Delta t) \right], & t_0 < t < t_0 + \Delta t, \\ k_p \Delta p_0, & t_0 + \Delta t \leq t \leq t_1 - \Delta t, \\ \Delta p_0 \left[1 + \frac{k_p - 1}{\Delta t} (t_1 - t) \right], & t_1 - \Delta t < t < t_1, \\ \Delta p_0, & t \geq t_1. \end{cases}$$

Здесь Δp_0 — перепад давления, обеспечивающий скорость потока ϑ_{s0} ; t_0, t_1 — время начала и конца скачка давления, соответственно; Δt — время, в течение которого меняется давление; k_p — коэффициент

повышения давления. Начальный перепад давления определяется из закона сопротивления для трубы [14]: $\Delta p_0 = \lambda_1 (L/4R_0) \rho_f g s_0^2$, остальные параметры задаются при постановке численного эксперимента. В примере, приведенном здесь $T_{end} = 1209600$ с или 14 суток; $k_p = 1,5$; $t_0 = 86400$ с, $t_1 = 360000$ с или 4 суток; $\Delta t = 2$ часа. Прочие параметры соответствуют Задаче 2.

Результаты расчета перемещений содержит рисунок 5, а, где изображен участок 3D-графика перемещений, охватывающий интервал времени 125 часов с выделенной черным цветом той его части, на протяжении которой явно видно влияние скачка давления, приводящего к увеличению прогиба. Затем, по мере уменьшения давления, труба возвращается в положение, соответствующее положению окончательного равновесия при условиях Задачи 2. Координаты осевой линии в начале расчета, в момент времени, соответствующий наибольшему отклонению профиля, и в конечный момент времени показаны на рисунке 5, б. Установлено, что медленно меняющийся перепад давления в итоге приводит к такому же стационарному состоянию, как и постоянный перепад давления, но при условии, что конечные значения этих перепадов на трубопроводе будут равны между собой.

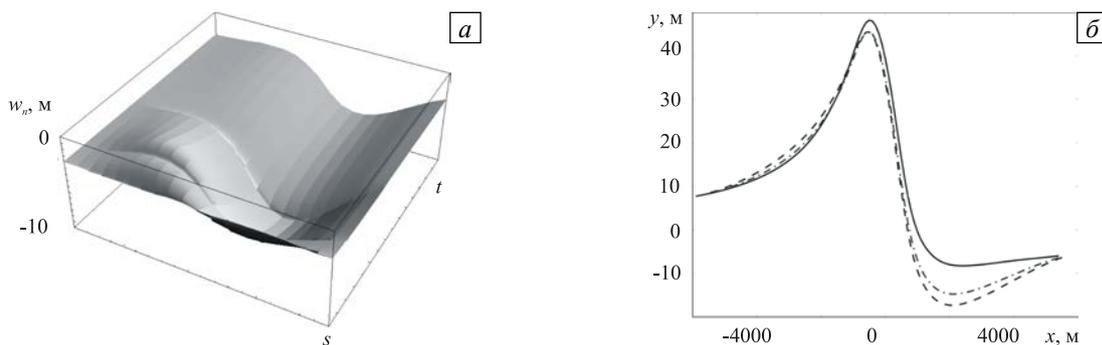


Рис. 5. Нормальные перемещения осевой линии (а) и ее координаты в разные моменты времени t (б): 10 минут (сплошная линия); 4 суток (пунктирная линия); 14 суток (штрих-пунктирная линия)

Аналогичные результаты получены не только для трех рассмотренных здесь задач, но и для некоторых других [6], где адекватность математической модели нашла дополнительное подтверждение.

4. Заключение

Результаты решения модельных задач доказали наличие депланаций поперечного сечения трубы при условиях перехода от трехмерного упругого тела к оболочке (условиях В.З. Власова). Установлено, что используемая математическая модель описывает явление «обратного поведения трубопровода» в случае профиля в виде цепной линии. Показано, что математическая модель сохраняет свою применимость в случае как медленного, так и динамического изменения внутреннего давления в заполняющем трубопровод потоке жидкости. Вычислены угловые и продольные деформации стенки трубопровода при достижении им состояния равновесия. Обнаружено, что неравномерность деформаций имеет место в больших окрестностях точек закрепления или экстремумов кривизны профиля.

Автор благодарен академику В.П. Мясникову за постановку задачи медленного деформирования подземного трубопровода и чл.-корр. РАН А.А. Буренину за постановку задачи движения трубопровода при динамическом перепаде давления, а также выражает признательность д.ф.-м.н. В.А. Рукавишникову за обсуждение текста статьи и поддержку.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 10-01-00060, № 11-01-98502-р_Восток_a) и Президиума ДВО РАН (интеграционный проект 12-I-П18-01).

Литература

1. Феодосьев В.И. О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости // Инж. сб. – Изд-во АН СССР, 1951. – Т. 10. – С. 169-170.
2. Towhata I. Geotechnical earthquake engineering. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. – 684 p.
3. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
4. Paidoussis M.P. Fluid-structure interactions. Slender structures and axial flow. – San Diego, London: Academic Press, 1998. – 574 p.
5. Proc. of the Nineteenth International Offshore and Polar Engineering Conf. Osaka, Japan, June 21-26, 2009. – V. 1-4. – 844 p.
6. Рукавишников В.А., Ткаченко О.П. Приближенное решение нелинейной задачи о деформировании подземного трубопровода // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2010. – Т. 13, № 4. – С. 97-108.

7. Рукавишников В.А., Ткаченко О.П. Численное и асимптотическое решение уравнений распространения гидроупругих колебаний в изогнутом трубопроводе // ПМТФ. – 2000. – Т. 41, № 6. – С. 161-169.
8. Рукавишников В.А., Ткаченко О.П. Численный анализ математической модели гидроупругих колебаний в изогнутом трубопроводе // Математическое моделирование. – 2011. – Т. 23, № 1. – С. 51-64.
9. Rukavishnikov V.A., Tkachenko O.P. Effect of the pipe curvature on internal elastic wave propagation // Comp. Math. Math. Phys. – 2010. – V. 50, N. 11. – P. 1886-1894. DOI
10. Ткаченко О.П. Кинематика и динамика подземного трубопровода при конечных перемещениях // ЖВТ. – 2003. – Т. 8, № 4. – С. 97-107.
11. Rukavishnikov V.A., Tkachenko O.P. Nonlinear equations of motion of an extensible underground pipeline: derivation and numerical modeling // J. Appl. Mech. Tech. Phys. – 2003. – V. 44, N. 4. – P. 571-576. DOI
12. Šašić R., Šašić S. A new approach to the velocity field investigation in case of the entry flow in curved pipes with circular cross section // Acta Mech. – 2000. – V. 140, N. 1-2. – P. 103-117. DOI
13. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике / В.З. Власов. Избранные труды. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – Т. 1. – С. 15-439.
14. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
15. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. – М.: Наука, 1992. – 424 с.
16. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1986. – 512 с.
17. Власов В.З. Принципы построения общей технической теории оболочек / В.З. Власов. Избранные труды. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – Т. 2. – С. 467-503.
18. Athisakul Ch., Monprapussorn T., Pulngern T., Chucheepsakul S. The effect of axial extensibility on three-dimensional behavior of tensioned pipes / risers transporting fluid // Proc. of the Eighth ISOPE Pacific/Asia Offshore Mechanics Symposium. The International Society of Offshore and Polar Engineers (ISOPE), Bangkok, Thailand, November 10-14, 2008. – P. 97-104.

Поступила в редакцию 15.08.11; опубликована в электронном виде 22.10.12