

DOI: [10.7242/1999-6691/2012.5.3.38](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2012.5.3.38)

УДК 519.63

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАКАТА НЕЛИНЕЙНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА

И.Б. Аббасов

Таганрогский технологический институт Южного федерального университета, Таганрог, Россия

В работе рассмотрены вопросы численного моделирования наката нелинейных поверхностных гравитационных волн на основе уравнений Навье–Стокса. Сформулирована двумерная постановка задачи, описаны граничные и начальные условия. С помощью метода расщепления по физическим процессам построена дискретная модель, учитывающая коэффициент заполненности ячеек. Представлены результаты двумерного численного моделирования процесса набегания нелинейной поверхностной гравитационной волны на береговые образования мелководных акваторий.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса, численное моделирование, метод расщепления, накат нелинейных поверхностных гравитационных волн

MODELING OF THE CLIMBING OF NONLINEAR SURFACE GRAVITY WAVES ON THE BASIS OF NAVIER-STOKES EQUATIONS

I.B. Abbasov

Taganrog Institute of Technology of Southern Federal University, Taganrog, Russia

The paper deals with the problem of numerical modeling of the climbing of nonlinear surface gravity waves on the basis of Navier–Stokes equations. The two-dimensional formulation of the problem is considered, and the boundary and initial conditions are defined. The decomposition method for physical processes is used to construct a discrete model capable of accounting for the factor of filled cells. The results of two-dimensional numerical modeling of the process of climbing of nonlinear surface gravity waves on shallow water areas are presented.

Key words: Navier–Stokes equations, numerical modeling, decomposition method, climbing of nonlinear surface gravity waves

Береговые образования и гидротехнические сооружения подвергаются многократным волновым воздействиям. Часто для исследования волновых процессов используются уравнения мелкой воды в различных модификациях. Однако для адекватного моделирования воздействия поверхностных гравитационных волн на береговые образования требуется учет турбулентных эффектов и трения о дно. Уравнения Навье–Стокса позволяют принимать во внимание не только нелинейные эффекты, но и турбулентные процессы в вязкой несжимаемой жидкости. Поэтому они наряду с другими гидродинамическими моделями часто применяются для построения математических моделей процесса наката поверхностных волн на береговые склоны мелководных акваторий.

Вопросы наката волн применительно к цунами исследуются в работе [1]. Обсуждаются различные модели наката, а также анализируются безразмерные параметры наката волны. Вопросы численного моделирования распространения волн на поверхности жидкости в рамках нелинейно-дисперсионной модели мелкой воды рассматриваются в [2]. В работе [3] накат морских волн на берег изучается на основе точных решений нелинейной теории мелкой воды. В зависимости от формы подходящей волны получаются различные аналитические формулы для высоты наката волны на берег. Предложена аналитическая формула для расчета высоты наката одиночной волны (в приложении к волне цунами).

Статья [4] посвящена исследованию двумерной численной модели процесса воздействия на распространение волны затопленного волнолома. Модель основана на уравнении Навье–Стокса; моделируются волны как до обрушения, так и после обрушения. Анализируется трансформация профиля волны и связь крутизны волны с её спектральным составом. В [5] на основе двумерной турбулентной модели численно изучаются обрушивающиеся волны. Свободная поверхность жидкости описывается методом MAC [6] на основе уравнений Рейнольдса. Проведено сравнение вычисленных различными методами профилей обрушивающихся волн при распространении их по наклонному дну.

В данной работе проводится численное моделирование наката поверхностных гравитационных волн на береговые склоны в двумерной постановке. Прототипом модели служит акватория Азовского моря с ее гидрофизическими условиями.

1. Постановка задачи

Согласно геометрии расчетной области ось x декартовой системы координат совмещена с поверхностью невозмущенной жидкости и направлена в сторону берега, ось z — вертикально вверх (Рис. 1). В начальный момент времени жидкость находится в состоянии покоя. На некотором расстоянии от берега (в точке $x=0$) задается возмущение давления в виде импульса, меняющееся по мере удаления от начала координат по гармоническому закону. Требуется проследить за последующим движением водной массы.

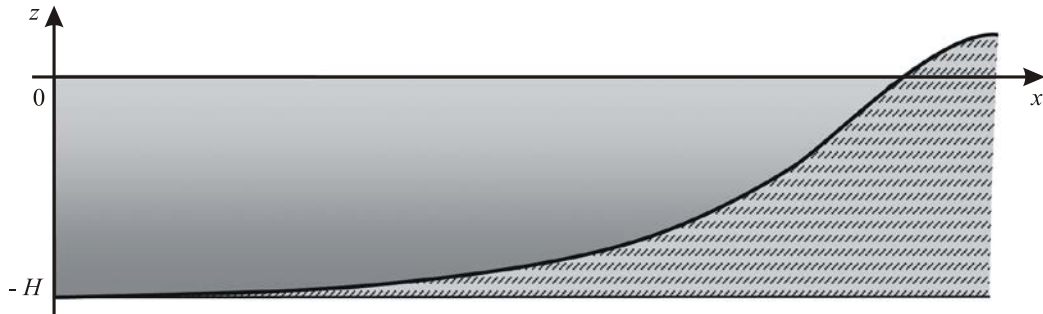


Рис. 1. Геометрия расчетной области для задачи исследования наката поверхностной гравитационной волны

Для описания двумерных гравитационных волн на поверхности жидкости с учетом её вязкости используются уравнения Навье–Стокса, уравнение неразрывности и уравнение гидродинамического давления [6], имеющие вид:

– уравнения Навье–Стокса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + g; \quad (2)$$

– уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \quad (3)$$

– уравнение полного гидродинамического давления с учетом глубины:

$$P(x, z, t) = p(x, z, t) + \rho g z, \quad (4)$$

где u , w — горизонтальная и вертикальная составляющие вектора скорости \mathbf{V} движения частиц водной среды, ρ — плотность жидкости, g — гравитационная постоянная, μ , η — горизонтальная и вертикальная составляющие коэффициента турбулентного обмена.

Соблюдаются следующие условия на границах:

– на свободной поверхности жидкости

$$P(x, z, t) = P_{\text{атм.}}; \quad w(x, z, t) = \frac{1}{\rho g} \frac{\partial P}{\partial t}, \quad (5)$$

при этом вертикальная скорость выражается через производную давления дифференцированием выражения (4) для гидродинамического давления;

– на дне области условия непротекания и скольжения:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{V}(x, z, t) = 0, \quad \rho \eta \frac{\partial}{\partial z} u(x, z, t) = -\tau_x(t), \quad \rho \mu \frac{\partial}{\partial x} w(x, z, t) = -\tau_z(t), \quad (6)$$

где \mathbf{n} — вектор нормали к донной поверхности, $\tau_x(t)$, $\tau_z(t)$ — компоненты тангенциального напряжения на дне;

– на левой боковой границе, где располагается источник импульса:

$$\frac{\partial}{\partial n} P(x, z, t) = \alpha, \quad u(x, z, t) = u^{(0)}, \quad w(x, z, t) = w^{(0)}; \quad (7)$$

– на правой боковой границе, являющейся продолжением дна, условия аналогичны донным.

В граничных условиях компоненты тангенциального напряжения, возникающие из-за донного трения, рассчитываются по формулам [6]:

$$\tau_x(t) = \rho C_p (|\mathbf{V}|) u |\mathbf{V}|, \quad \tau_z(t) = \rho C_p (|\mathbf{V}|) w |\mathbf{V}|, \quad (8)$$

где $C_p (|\mathbf{V}|) = \begin{cases} 0,0088 & \text{при } |\mathbf{V}| < 6,6 \text{ м/с,} \\ 0,0026 & \text{при } |\mathbf{V}| \geq 6,6 \text{ м/с} \end{cases}$ — безразмерный коэффициент; параметр α задается

исходя начальных условий; горизонтальная и вертикальная составляющие коэффициента турбулентного обмена принимают значения ($0 < \mu < 1 \text{ м}^2/\text{с}$, $0 < \eta < 1 \text{ м}^2/\text{с}$).

В начальный момент времени $t = 0$ жидкость находится в покое, и выполняются следующие условия: $P(x, z, 0) = \rho g z$, $u(x, z, 0) = 0$, $w(x, z, 0) = 0$.

2. Расщепление уравнений

Согласно работам [7, 8] с помощью метода расщепления по физическим процессам проводится аппроксимация исходных уравнений по временной переменной, и далее расчет осуществляется в три этапа:

– рассчитывается поле скоростей на основе уравнений

$$\frac{u^{n+\sigma} - u^n}{\tau} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (9)$$

$$\frac{w^{n+\sigma} - w^n}{\tau} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + g; \quad (10)$$

– вычисляется давление

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\tau} \left(\frac{\partial u^{n+\sigma}}{\partial x} + \frac{\partial w^{n+\sigma}}{\partial z} \right); \quad (11)$$

– по найденному давлению уточняется поле скоростей:

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+\sigma}}{\tau} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{w^{n+1} - w^{n+\sigma}}{\tau} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (12)$$

В приведенных уравнениях u^n , w^n и u^{n+1} , w^{n+1} — составляющие вектора скорости на текущем и последующем временных слоях; $u^{n+\sigma}$, $w^{n+\sigma}$ — составляющие вектора скорости на вспомогательном временном слое.

3. Построение и исследование дискретной модели

Для перехода от расчетной области к ее сеточному аналогу используется разработанная в [9] дискретная конечно-разностная модель с учетом коэффициента заполненности ячеек. Согласно этой модели в каждой из плоскостей декартовой системы координат расчетная область, представляющая собой прямоугольник, покрывается сеткой с равномерным шагом. Для аппроксимации исходных дифференциальных уравнений по координатам применяется интегро-интерполяционный метод построения разностных схем.

Получены дискретные аналоги уравнений (1)–(4) для расчета составляющих вектора скорости, поля давления, также граничных условий (5)–(12). Проведено исследование консервативности дискретной модели и установлено, что для разностного аналога уравнения полного гидродинамического давления соблюдается интегральный закон сохранения импульса. Найдена погрешность аппроксимации конечно-разностной схемы $O(\tau + h_x^2 + h_z^2)$. Проведено исследование устойчивости решения задачи

на основе принципа максимума функции составляющих вектора скорости, получены ограничения на шаги по времени и пространственным координатам.

При этом дискретные уравнения для расчета составляющих вектора скорости и поля давления получаются на основе неявной схемы, дискретные уравнения для уточнения компонент поля скорости — на основе явной схемы. Наиболее трудоемким при расчетах является второй этап, когда методом верхней релаксации решается уравнение (11) для нахождения давления.

Также разработана программа для расчета двумерного поля скоростей и поля давления водной среды при численном моделировании наката и обрушения нелинейной поверхностной гравитационной волны.

4. Результаты численного моделирования и их анализ

Необходимо отметить, что для уравнения Навье–Стокса соблюдение условия мелководности не является обязательным. Поэтому начальные параметры мелководности поверхностных гравитационных волн находятся в пределах $kH \geq 1$ (k — волновое число, $k = 2\pi/c$, где f — частота, c — скорость волны), но по мере приближения к берегу глубина уменьшается, и поверхностная волна через какое-то время будет отвечать условиям мелководности.

В качестве прототипа модели расчетной области в данной работе используется мелководная акватория Таганрогского залива Азовского моря и ее гидрофизические условия. Размеры сетки и протяженность мелководья взаимосвязаны. При этом для соблюдения условия адекватности модели физическому процессу в модели учитывается постепенное накопление нелинейных эффектов при распространении поверхностной волны.

Исходя из глубины залива $H \leq 5$ м, исследуемый участок акватории имеет геометрические размеры: длину 30 м (по оси x); протяженность по вертикали 10 м (с учетом пространства над поверхностью воды). Исходя из условий мелководности $H/\lambda < 1/2$ [10], длина поверхностной волны будет составлять $\lambda \leq 15$ м. Длина шага по горизонтали равняется $h_x = 0,05$ м, по вертикали — $h_z = 0,05$ м. Для моделируемого участка мелководья сетка имеет 600×200 ячеек, возможный уровень подъема поверхности воды по вертикали содержит 100 ячеек. В протяженность залива по оси x укладываются не менее двух длин волн.

Рассмотрены береговые склоны разной крутизны в условиях залива. Профиль дна описывается степенной функцией. Глубина уменьшается от $H = 5$ м до нуля, крутизна склона не превышает значения 15° .

На рисунке 2 представлен полученный в результате расчетов вид набегающей нелинейной поверхностной гравитационной волны на пологий береговой склон в разные моменты времени. На левой боковой границе задано гармоническое возмущение в виде импульса давления с частотой f . Расчеты проведены при следующих начальных параметрах волны: скорость $c = 4$ м/с; длина волны $\lambda = 10$ м; амплитуда вертикального смещения свободной поверхности воды $a = 0,5$ м; параметр мелководности $kH = 3,14$; параметр нелинейности $\varepsilon = a/H = 0,1$. Поверхностная гравитационная волна удовлетворяет начальным требованиям мелководности $H/\lambda < 1/2$; длина расчетной области в два раза больше ее глубины [10].

С приближением к берегу глубина залива уменьшается, волна начинает ощущать дно, следовательно, проявляется влияние нелинейных эффектов. Это приводит к укрупнению переднего фронта гребня поверхностной волны. Траектории движения частиц воды на переднем фронте волны становятся вертикальными, передний фронт становится отвесным, и происходит обрушение волны. Этот процесс хорошо виден на рисунке 2, б. Далее волна, обрушиваясь, рассыпается, что приводит к уменьшению ее высоты и подтоплению берегового склона. В дальнейшем при откате волны поток воды начинает стекать назад по наклонному берегу. Откатывающаяся назад волна сбивает следующую волну, что ещё больше увеличивает укрупнение набегающей волны и ускоряет ее обрушение.

В результате численного моделирования наката нелинейных поверхностных гравитационных волн на береговые образования мелководных акваторий установлено:

- рост начальной крутизны поверхностной волны приводит к обрушению волны в процессе наката на сухую береговую зону, с уменьшением начальной крутизны накат происходит без обрушения волны;
- с уменьшением длины волны условия мелководности выполняются хуже, нелинейные искажения профиля волны из-за изменения глубины уменьшаются, накат на берег происходит в виде непрерывного потока воды; с увеличением длины поверхностной волны искажения профиля вследствие его нелинейности усиливаются, и происходит обрушение гребня волны.

Для проверки адекватности разработанной модели полученные результаты двумерного численного моделирования набегающей нелинейных поверхностных гравитационных волн на береговые образования сравнивались с существующими численными [11] и экспериментальными [12] данными. Установлено хорошее согласование результатов автора с данными этих работ, особенно по начальным этапам искажения профиля поверхностной волны.

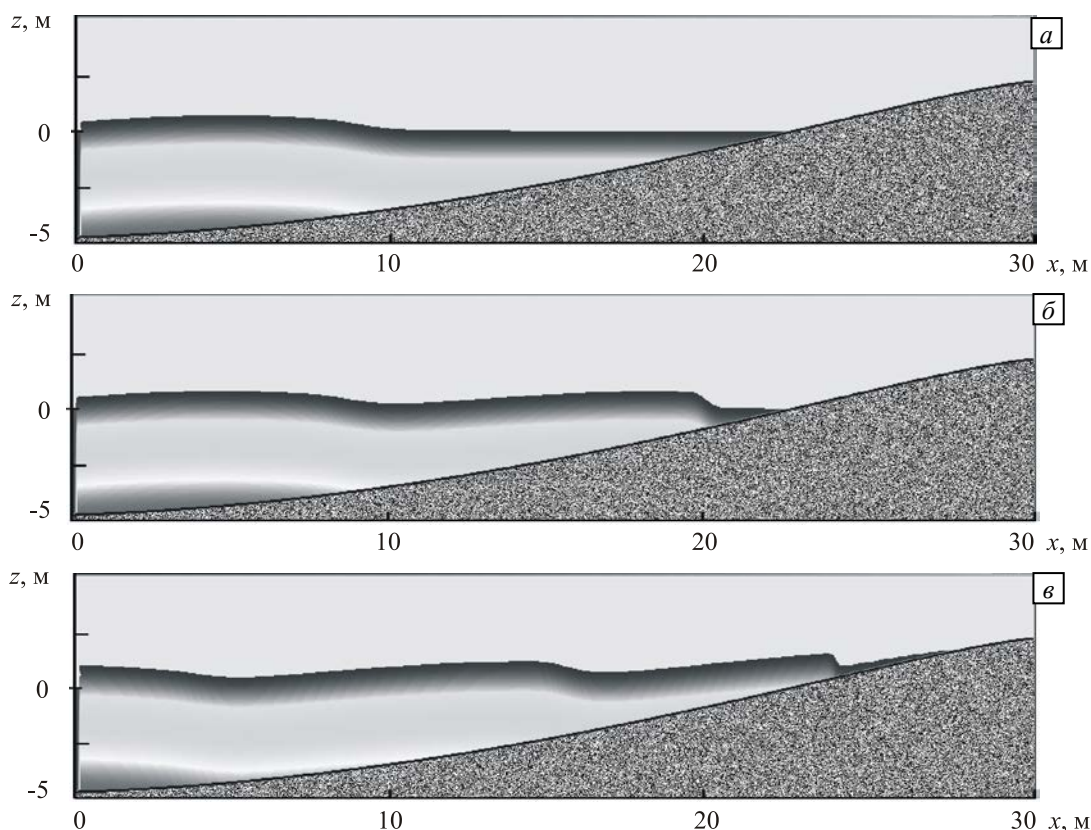


Рис. 2. Профили набегающей на пологий береговой склон поверхностной гравитационной волны в различные моменты времени t , с: 1,6 (а); 3,6 (б); 6,8 (в);

Литература

1. Железняк М.К., Пелиновский Е.Н. Физико-математические модели наката цунами на берег // Накат цунами на берег: Сб. науч. трудов / Горький: ИПФ АН СССР, 1985. – С. 8-34.
2. Шокин Ю.И., Чубаров Л.Б., Марчук Ан.Г., Симонов К.В. Вычислительный эксперимент в проблеме цунами. – Новосибирск: Наука, 1989. – 168 с.
3. Диденкулова И.И., Куркин А.А., Пелиновский Е.Н. Накат одиночных волн различной формы на берег // Известия РАН. ФАО. – 2007. – Т. 43, № 3. – С. 419-425.
4. Kawasaki K. Numerical simulation of breaking and post-breaking wave deformation process around a submerged breakwater // Coast. Eng. J. – 1999. – V. 41, N. 3&4. – P. 201-223. DOI
5. Zhao Q., Armfield S., Tanimoto K. Numerical simulation of breaking waves by a multi-scale turbulence model // Coast. Eng. – 2004. – V. 51, N. 1. – P. 53-80. DOI
6. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: в 2 т. – М.: Мир, 1991. – Т. 2. – 552 с.
7. Harlow F.H. Welch J.E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface // Phys. Fluids. – 1965. – V. 8, N. 12. – P. 2182-2189. DOI
8. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск.: Наука, 1967. – 196 с.
9. Сухинов А.И., Тимофеева Е.Ф., Чистяков А.Е. Построение и исследование дискретной математической модели расчета прибрежных волновых процессов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – Т. 121, № 8. – С. 22-32.
10. Дебольский В.К., Зайдлер Р., Массель С. Динамика русловых потоков и литодинамика прибрежной зоны моря. – М.: Наука, 1994. – 303 с.
11. Kawasaki K., Takasu Y., Ut H.D. 2-d numerical wave flume with solid-gas-liquid interaction and its application // Proc. of 32nd Conf. on Coastal Engineering, Shanghai, China, 2010. – V. 57. – P. 1-15.
12. Kimmoun O. Branger H. A particle image velocimetry investigation on laboratory surf-zone breaking waves over a sloping beach // J. Fluid Mech. – 2007. – V. 588. – P. 353-397. DOI

Поступила в редакцию 14.12.11; опубликована в электронном виде 22.10.12

Сведения об авторе

Аббасов Ифтихар Балакишиевич, кфмн, доц., Таганрогский технологический институт Южного федерального университета (ТТИ ЮФУ), 347928, Ростовская область, Таганрог, пер. Некрасовский, д. 44; E-mail: iftikhar_abbasov@mail.ru