

DOI: 10.7242/1999-6691/2012.5.3.34

УДК 539.376

ПРИБЛИЖЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

А.А. Светашков, Н.А. Куприянов, К.К. Манабаев

Национальный исследовательский томский политехнический университет, Томск, Россия

Работа посвящена развитию приближенных методов решения задач линейной теории вязкоупругости. На основе ранее полученных эффективных по времени модулей лагранжевого и кастильянового типов для изотропных тел найдены две пары новых эффективных характеристик. В соответствии с известным подходом механики композитных материалов предполагается, что вязкоупругое тело представляет собой двухкомпонентный композит, один из компонентов которого имеет свойства, определяемые парой эффективных модулей лагранжевого типа; свойства второго компонента задаются парой модулей кастильянового типа. Далее для двухкомпонентного тела записываются выражения эффективных модулей, полученные как осреднения свойств по Фойгту и Рейссу. Удельное объемное содержание одного из компонент задается в виде некоторой функции времени. На примере двух задач проводится сравнение получаемых с помощью новых эффективных модулей приближенных решений с аналитическими, которое показывает их совпадение в пределах 5%.

Ключевые слова: эффективные модули, определяющие уравнения, линейная вязкоупругость, тензоры напряжений и деформаций, операторы ползучести и релаксации, удельное объемное содержание, погрешность, вариационные задачи, краевые задачи

AN APPROXIMATE ALGORITHM FOR SOLVING THE PROBLEMS OF LINEAR VISCOELASTICITY

A.A. Svetashkov, N.A. Kupriyanov and K.K. Manabaev

National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russia

This study is devoted to the development of approximate methods for solving the problems of linear elasticity theory. Based on the time-effective moduli of Lagrangian and Castilian types obtained in early works, two pairs of unique effective characteristics of isotropic bodies are determined. In accordance with the known approach of mechanics of composite materials, the viscoelastic body is assumed to be a two-component composite, one component of which has the properties defined by the pair of effective moduli of Lagrangian type, and the characteristics of the second component are set by the pair of Castilian-type moduli. By averaging these characteristics according to Voigt Reyscu, expressions are written for two-component effective moduli. The mass fraction of one of the components is given as a function of time. A comparison of the approximate solutions obtained using the proposed effective moduli with the analytical solutions demonstrates their coincidence within 5% for two problems.

Key words: effective modulus, constitutive equations, linear viscoelasticity, stress and strain tensors, creep and relaxation operators, relative error, mass fraction, variational problems, boundary-value problems

1. Введение

Краевые задачи теории вязкоупругости, наряду с задачами теории упругости и пластичности, являются составной частью механики деформируемого твердого тела. Отличительной особенностью формулировки краевых задач вязкоупругости является ярко выраженный временной характер параметров, описывающих напряженно-деформированное состояние. При решении краевых задач данное обстоятельство требует учета всей истории изменения во времени компонент тензоров напряжений или деформаций. В линейных вязкоупругих задачах это осуществляется путем введения в определяющие соотношения интегрального оператора Вольтерра II рода, действующего на некоторую функцию времени. Ядро оператора удовлетворяет гипотезе затухающей памяти [1], согласно которой влияние воздействий, произведенных в отдаленные моменты времени $\tau \ll t$ значительно меньше, чем влияние воздействий, реализуемых в моменты τ , близкие к t . Гипотезу затухающей памяти можно рассматривать в качестве аналога принципа локального действия для склерономных тел [2, 3]. В соответствии с этим принципом на напряженное состояние в точке пространства наиболее сильное влияние оказывают лишь процессы, протекающие в близких к ней точках.

Существуют различные методы сведения вязкоупругих задач к упругим. Так, согласно операторному методу [4], для перехода к вязкоупругому решению достаточно заменить упругие постоянные на соответствующие операторы наследственности, а затем произвести расшифровку полученных операторных функций. Недостаток метода — весьма узкий круг упругих задач, в решениях которых удастся выделить явную зависимость компонент напряженно-деформированного состояния от упругих постоянных. Этот же недостаток присущ и решениям, получаемым на основе интегрального преобразования Лапласа [5]. Метод аппроксимаций А.А. Ильюшина [6] основан на представлении в упругом решении функций от упругих постоянных в виде выражений, удобных при расшифровке решений, получаемых как в аналитической, так и в численной форме [4, 7].

Известны методы решения задач линейной вязкоупругости [8], [9], в которых применяется процедура пошагового интегрирования интегро-дифференциальных уравнений равновесия. В [10] предложен итерационный метод решения линейных задач, обобщенный в дальнейшем на нелинейные задачи [11].

Одним из представлений воздействия интегрального оператора на некоторую функцию времени $f(t)$ является использование приближения вида:

$$G^* f \approx g(t) f(t), \tag{1}$$

где G^* — интегральный оператор Вольтерра II рода, а $g(t)$ — некоторый упругий модуль, зависящий от времени. Очевидно, что точное равенство в (1) будет иметь место в том случае, когда известны собственные векторы и собственные значения интегрального оператора G^* . Методы, приводящие приближенные решения к виду (1), даны в [12–14].

В настоящей работе используются эффективные по времени модули, найденные в [15, 16] как решения вариационных задач при условиях максимальной энергетической эквивалентности среды с определяющими уравнениями вязкоупругости, выраженными через упруго-наследственные операторы типа G^* , и упругой среды с модулями, зависящими от времени.

2. Эффективные модули лагранжевого и кастильянового типов

Пусть имеем определяющие уравнения линейной вязкоупругости, описывающие сдвиговое и объемное поведение:

$$s_{ij}(t) = \int_0^t R(t-\tau) de_{ij}(\tau) \equiv G^* e_{ij}, \quad \sigma(t) = \int_0^t K(t-\tau) d\theta(\tau) \equiv K^* \theta.$$

Здесь $R(t), K(t)$ — функции сдвиговой и объемной релаксации, устанавливаемые из испытаний на релаксацию при сдвиге и объемном обжатии; s_{ij}, e_{ij} — девиаторы тензоров напряжений и деформаций, σ, θ — шаровые тензоры:

$$\sigma = \sigma_{ij} \delta_{ij}, \quad \theta = \varepsilon_{ij} \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3); \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

У соответствующей упругой среды определяющие уравнения зададим в виде:

$$s_{ij}^0(t) = g(t) e_{ij}(t), \quad \sigma^0(t) = k(t) \theta(t).$$

Найденные эффективные по времени модули (ЭМ) имеют вид [16]:

$$g_L(t) = G^* h, \quad k_L(t) = K^* h, \quad g_C(t) = (G^{*-1} h)^{-1}, \quad k_C(t) = (K^{*-1} h)^{-1}. \tag{2}$$

Здесь $g_L(t), k_L(t), g_C(t), k_C(t)$ — соответственно, эффективные модули сдвига и объемного сжатия лагранжевого и кастильянового типов; под G^{*-1}, K^{*-1} подразумеваются операторы, обратные G^*, K^* ;

$h(t)$ — единичная функция Хевисайда: $h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$

Эффективные модули (2) имеют следующие свойства:

- в моменты времени $t = 0, \infty$ совпадают с соответствующими мгновенно упругими и длительными модулями;
- являются положительно определенными;
- их выражения не зависят от вида граничных нагрузок и способа аппроксимации материальных функций релаксации и ползучести.

Согласно [22] между парами модулей (2) выполняются неравенства: $g_C(t) \geq g_L(t), k_C(t) \geq k_L(t)$.

3. Эффективные по времени модули смешанного типа

В [17] приведено обоснование методологической общности процедур вывода соотношений для эффективных по времени модулей вязкоупругих тел и эффективных характеристик неоднородных

упругих тел. Установленная идентичность задач механики композитных материалов и механики вязкоупругих тел может служить основой для получения новых выражений эффективных по времени модулей.

Действительно, представим вязкоупругое тело как двухкомпонентный композитный материал, один из компонентов которого имеет свойства, описываемые парой модулей $g_c(t)$, $k_c(t)$, другой — свойства, задаваемые парой модулей $g_L(t)$, $k_L(t)$. Тогда, следуя методике Фойгта–Рейсса нахождения упругих свойств неоднородного тела [18], запишем выражения для двух новых пар эффективных по времени модулей $g_{c,L}^{1,2}$ и $k_{c,L}^{1,2}$:

$$g_{c,L}^1(t) = \bar{\gamma} g_c(t) + (1 - \bar{\gamma}) g_L(t), \quad k_{c,L}^1(t) = \bar{\gamma} k_c(t) + (1 - \bar{\gamma}) k_L(t), \quad (3)$$

$$\frac{1}{g_{c,L}^2(t)} = \bar{\gamma} \frac{1}{g_c(t)} + (1 - \bar{\gamma}) \frac{1}{g_L(t)}, \quad \frac{1}{k_{c,L}^2(t)} = \bar{\gamma} \frac{1}{k_c(t)} + (1 - \bar{\gamma}) \frac{1}{k_L(t)}. \quad (4)$$

Здесь $\bar{\gamma}$ — удельное объемное содержание компонента, свойства которого обуславливаются парой ЭМ кастильянского типа.

Для определения $\bar{\gamma}$ рассмотрим предельные свойства соотношений (3), (4). Для простоты зададим $k_c(t) = k_L(t) = K_0 = \text{const}$ (предполагаем, что объемная релаксация отсутствует). Рассмотрим $g_L(t) \rightarrow g_c(t)$ (в соответствии со свойствами ЭМ это имеет место в моменты времени, близкие к нулю и бесконечности). С учетом этого из (3), (4) следует, что $g_{c,L}^1(t) \rightarrow g_{c,L}^2(t)$, то есть композит содержит единственный компонент, занимающий весь объем тела. Поскольку в данном случае параметр $\bar{\gamma}$ должен равняться единице, то объемное содержание компонента можно задать как некоторую функцию времени, принимающую при $0 \leq t \leq \infty$ значение между нулем и единицей: $0 \leq \bar{\gamma}(t) \leq 1$, $\bar{\gamma}(0) = \bar{\gamma}(\infty) = 1$. Учитывая эти выводы, представим $\bar{\gamma}(t)$ в виде:

$$\bar{\gamma}(t) = 1 - \alpha \frac{g_c(t) - g_L(t)}{g_c(t)}, \quad \alpha > 0. \quad (5)$$

Здесь параметр α выражается различным образом. Исходя из его физического смысла, очевидно, что при $\alpha \rightarrow 0$ свойства вязкоупругого тела обуславливаются модулем $g_c(t)$, а при $\alpha \rightarrow (1 - g_L(t)/g_c(t))^{-1}$ преобладает компонент со свойствами, определяемыми модулем $g_L(t)$. Легко видеть, что найденные посредством (3), (4) эффективные по времени характеристики обладают свойствами, присущими эффективным по времени модулям типа Лагранжа и Кастильяно.

При численной реализации краевых задач вязкоупругости преимущества применения приближенных представлений вида (2)–(4) очевидны. Ключевым моментом в этом случае должны служить оценки величины относительной погрешности, вносимой приближенными определяющими уравнениями. Для эффективных по времени модулей лагранжевого и кастильянского типов подобные оценки приведены в [19]. Выбор значения параметра α будет рассмотрен в разделе 6.

4. Действие сосредоточенной силы на вязкоупругое полупространство

Упругое решение задачи Буссинеска о действии сосредоточенной силы P на полупространство [20] дает в цилиндрических координатах (r, z) следующее осесимметричное распределение перемещений и напряжений:

$$\begin{aligned} u(r, z) &= \left[\frac{r z}{4\pi R^3} \frac{1}{G} - \frac{r}{4\pi R(R+z)} f_1(v, G) \right] P, & w(r, z) &= \left[\frac{1}{2\pi R} f_2(v, G) - \frac{z^2}{4\pi R^3} \frac{1}{G} \right] P, \\ \sigma_r(r, z) &= \left[\frac{1}{2\pi R(R+z)} f_3(v, G) - \frac{3 r^2 z}{2\pi R^5} \right] P, & \sigma_\varphi(r, z) &= - \left(\frac{R}{R+z} - \frac{z}{R} \right) \frac{1}{2\pi R^2} f_3(v, G) P. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь: r, z — радиальная и осевая координаты произвольной точки полупространства; $R^2 = r^2 + z^2$; v, G — мгновенно упругие коэффициент Пуассона и модуль сдвига;

$$f_1(v, G) = (1 - 2v)/G, \quad f_2(v, G) = (1 - 2v)/G, \quad f_3(v, G) = (1 - v). \quad (7)$$

Осевое (σ_z) и касательное (τ_{rz}) напряжения не зависят от упругих постоянных, следовательно, они не будут зависеть и от времени.

Зададим операторы сдвиговой релаксации G^* и ползучести G^{*-1} как

$$G^*x \equiv G(1 - \lambda \mathcal{E}_{\lambda+\gamma}^*)x, \quad G^{*-1}x \equiv \frac{1}{G}(1 + \lambda \mathcal{E}_\gamma^*)x, \quad \mathcal{E}_\gamma^*x \equiv \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)}x(\tau)d\tau, \quad (8)$$

где x — некоторая функция времени; γ, λ — параметры функций релаксации и ползучести. Для построения аналитического решения задачи линейной вязкоупругости в (7) необходимо сделать замены $v \rightarrow v^*, G \rightarrow G^*$ и далее произвести расшифровку функций операторов v^*, G^* .

Введем операторы вида:

$$\omega^* = 2G^*/(3K_0), \quad g_{1/2}^* = 1/\left(1 + \frac{\omega^*}{2}\right). \quad (9)$$

Здесь K_0 — модуль объемного сжатия.

Принимая во внимание формулы взаимосвязи физико-механических характеристик среды, выразим оператор v^* через оператор связанной ползучести $g_{1/2}^*$ следующим образом: $v^* = g_{1/2}^*(1 - \omega^*)/2$. В последнее соотношение входит произведение двух интегральных операторов типа Вольтерра. Учитывая (9), преобразуем это произведение в разность:

$$\frac{1}{2}\omega^*g_{1/2}^* = 1 - g_{1/2}^*. \quad (10)$$

Тогда, вследствие выражений (7), получим:

$$f_1(v^*, G^*) = \frac{1}{K_0}g_{1/2}^*, \quad f_2(v^*, G^*) = \frac{1}{2}\left(G^{*-1} + \frac{1}{K_0}g_{1/2}^*\right), \quad f_3(v^*, G^*) = 2 - \frac{3}{2}g_{1/2}^*. \quad (11)$$

Из (11) видно, что все три операторные функции оказались выраженными через оператор связанной ползучести Ильюшина, который представляется в виде [10]:

$$g_{1/2}^*x = \frac{2}{2 + \omega_0}[1 + \lambda\mu\mathcal{E}_q^*]x, \quad q = \lambda + \gamma - \lambda\mu, \quad \mu = \frac{\omega_0}{2 + \omega_0}, \quad \omega_0 = \frac{2G}{3K_0}. \quad (12)$$

Таким образом, формулы (6) в совокупности с (11), (12) дают аналитическое решение задачи Буссинеска о нагружении вязкоупругого полупространства силой $P(t)$.

Приближенное решение этой же задачи на основе $g_C(t), g_L(t), g_{C,L}^1(t), g_{C,L}^2(t)$ получим из выражений (11) путем замен:

$$f_1^k = \frac{3}{3K_0 + g_k(t)}, \quad f_2^k = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{g_k(t)} + \frac{3}{3K_0 + g_k(t)}\right), \quad f_3^k = 2 - \frac{3}{2}\frac{3K}{3K_0 + g_k(t)}, \quad (13)$$

где индекс $k = 1, 2, 3, 4$, и для $g_k(t)$ имеет место соответствие:

$$g_1(t) = g_C(t), \quad g_2(t) = g_L(t), \quad g_3(t) = g_{C,L}^1(t), \quad g_4(t) = g_{C,L}^2(t). \quad (14)$$

5. Действие сосредоточенной силы на вязкоупругий диск (задача Герца)

Пусть плоский вязкоупругий диск диаметром D подвергается сжатию двумя соосными сосредоточенными силами F (Рис. 1). Требуется рассчитать напряженно-деформированное состояние в точке M .

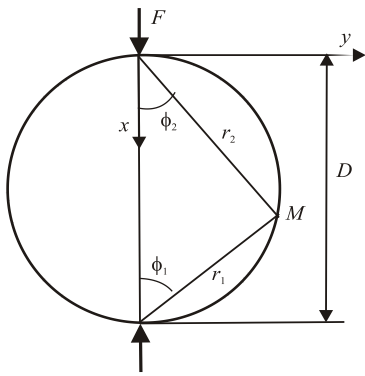


Рис. 1. Схема сжатия диска

В работе [20] приведено аналитическое упругое решение этой задачи, из которого следует, что напряжения, возникающие в диске, не зависят от упругих констант (следовательно, они не будут зависеть и от времени), а выражения для упругих перемещений точки M имеют следующий вид: $u = -\frac{2F}{\pi} \left(\varphi_2 \ln \frac{r_1}{r_2} + \varphi_3 \cos \psi \right)$, $v = -\frac{F}{2} \left(\varphi_1 + \frac{4}{\pi} \varphi_2 \sin \psi \right)$. Здесь $\varphi_2 = \frac{1-\nu^2}{E}$, $\varphi_1 = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}$, $\varphi_3 = \frac{\nu(1+\nu)}{E}$; E, ν — упругие модуль Юнга и коэффициент Пуассона; $\psi = 2\phi_1$; $\phi_1 + \phi_2 = \pi/2$.

Переход от функций упругих констант к функциям интегральных операторов дает: $\varphi_1 \rightarrow \varphi_1^* = \frac{(1+\nu^*)(1-2\nu^*)}{E^*}$, $\varphi_2 \rightarrow \varphi_2^* = \frac{1-\nu^{*2}}{E^*}$, $\varphi_3 \rightarrow \varphi_3^* = \frac{\nu^*(1+\nu^*)}{E^*}$. Принимая объемное поведение материала диска упругим и учитывая (13), находим

$$\varphi_1^* = \frac{1}{2K_0} g_{1/2}^*, \quad \varphi_2^* = \frac{1}{4} \left(G^{*-1} + \frac{1}{K_0} g_{1/2}^* \right), \quad \varphi_3^* = \frac{1}{4} \left(G^{*-1} - \frac{1}{K_0} g_{1/2}^* \right). \quad (15)$$

Приближенное вязкоупругое решение на основе эффективных по времени модулей (14) получается путем замен:

$$\varphi_{1,k}^* F \approx \frac{1}{23K_0 + g_k(t)} F(t), \quad \varphi_{2,k}^* F \approx \frac{1}{4} \left(\frac{1}{g_k(t)} + \frac{3}{3K_0 + g_k(t)} \right) F(t), \quad \varphi_{3,k}^* F \approx \frac{1}{4} \left(\frac{1}{g_k(t)} - \frac{3}{3K_0 + g_k(t)} \right) F(t). \quad (16)$$

6. Анализ численных результатов

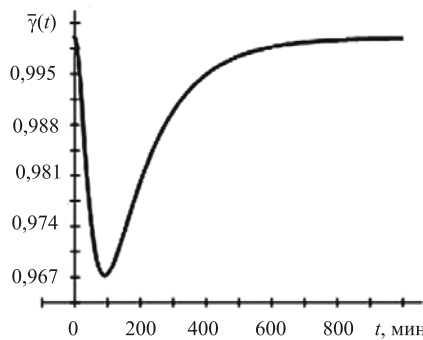


Рис. 2. Типичная кривая изменения во времени удельного объемного содержания любого из компонентов со свойствами, определяемыми модулями (2)

Численные расчеты в рамках аналитических и приближенных решений задач Буссинеска и Герца были проведены при следующих значениях параметров функций ползучести и релаксации (12) и упругих констант материала: $\lambda = 0,0138 \text{мин}^{-1}$, $G_0 = 120 \text{МПа}$, $\gamma = 0,0069 \text{мин}^{-1}$, $K_0 = 360 \text{МПа}$. Граничная нагрузка задавалась в виде ступенчатой функции $P(t) = P_0 h(t)$, где $P_0 = 100 \text{МПа}$.

Единственным неопределенным параметром, необходимым для нахождения приближенных решений вязкоупругой задачи на основе эффективных по времени модулей смешанного типа, является параметр α , входящий в выражение для функции $\bar{\gamma}(t)$. На рисунке 2 приведена типичная кривая изменения во времени этой функции, рассчитанная по формуле (9) при $\alpha = 1$.

Будем исходить из того, что параметр α должен представлять механические характеристики вязкоупругого материала наряду с $G_0, K_0, \gamma, \lambda$.

Анализ кривых изменения во времени функций $\bar{\gamma}(t)$ для разных способов задания вязкоупругих свойств позволил авторам установить следующее соотношение между координатами их минимума t_{\min} и α :

$$\alpha t_{\min} = 1/3. \quad (17)$$

При известных функциях времени $g_C(t), g_L(t)$ величина t_{\min} находится из решения уравнения $g'_C(t_{\min}) g_L(t_{\min}) - g'_L(t_{\min}) g_C(t_{\min}) = 0$.

Особенностью расчетов с использованием эффективных по времени модулей смешанного типа является тот факт, что при представлении внешней нагрузки в виде ступенчатой функции приближенные решения для перемещений практически совпадают с точными в случае модулей кастильянового типа. Противоположная картина наблюдается у напряжений — здесь минимальное отклонение получается на основе модулей лагранжевого типа. Назначение параметра α в виде (17) позволяет минимизировать погрешности как перемещений, так и напряжений.

В таблице 1 для задачи, в которой рассматривается действие сосредоточенной силы на вязкоупругое полупространство, приведены значения максимальных относительных отклонений числовых значений приближенных решений от точных для радиальных (u), осевых (w) перемещений и радиального (σ_r) напряжения в зависимости от параметров α и t_{\min} . Расчеты проведены при $\eta = 10$, где $\eta = G_0/G_\infty$ — параметр, определяющий отношение мгновенно упругого модуля к длительному.

Таблица 1. Максимальные относительные отклонения числовых значений приближенных решений от точных решений при $\eta = 10$

t_{\min} , мин	α	Относительные отклонения, %					
		Δu		Δw		$\Delta \sigma_r$	
		Эффективные модули смешанного типа, при которых производились расчеты					
		$g_{C,L}^1$	$g_{C,L}^2$	$g_{C,L}^1$	$g_{C,L}^2$	$g_{C,L}^1$	$g_{C,L}^2$
5	0,0600	2,00	4,200	1,40	1,35	3,30	3,30
10	0,0300	1,00	2,100	1,46	1,41	3,35	3,35
20	0,0160	0,60	1,200	1,51	1,50	3,40	3,40
50	0,0060	0,28	0,470	1,52	1,51	3,40	3,40
100	0,0030	0,15	0,200	1,53	1,51	3,45	3,45
150	0,0020	0,16	0,210	1,55	1,55	3,50	3,50
200	0,0016	0,17	0,215	1,55	1,55	3,50	3,50

Идентичную качественную картину представляет таблица 2, где приведены значения максимальных относительных отклонений при расчетах функций φ_i ($i = 1, 2, 3$) по формулам (19), (20) для задачи Герца.

Таблица 2. Максимальные относительные отклонения числовых значений приближенных решений для функций φ_i от точных решений при $\eta = 10$

t_{\min} , мин	α	Относительные отклонения, %					
		$\Delta \varphi_1$		$\Delta \varphi_2$		$\Delta \varphi_3$	
		Эффективные модули смешанного типа, при которых производились расчеты					
		$g_{C,L}^1$	$g_{C,L}^2$	$g_{C,L}^1$	$g_{C,L}^2$	$g_{C,L}^1$	$g_{C,L}^2$
5	0,0600	1,50	1,50	1,50	3,30	2,10	4,40
10	0,0300	1,59	1,57	0,75	1,65	1,10	2,20
20	0,0160	1,57	1,53	0,46	0,90	0,73	1,35
50	0,0060	1,58	1,57	0,40	0,88	0,50	1,33
100	0,0030	1,59	1,59	0,30	0,87	0,28	0,13
150	0,0020	1,57	1,55	0,36	0,90	0,72	1,31
200	0,0016	1,57	1,55	0,36	0,90	0,72	1,31

На рисунке 3 показаны зависимости от времени относительных отклонений приближенных величин радиальных перемещений (Рис. 3, а, б) и напряжений (Рис. 3, в, г) (см. соотношения (11)–(13)) в задаче Буссинеска от их точных значений (6). Параметр α вычислялся по формуле (17). Из рисунков видно, что погрешность решений на основе эффективных модулей смешанного типа не превышает 5%.

Изменения во времени относительных отклонений приближенных значений функций $\varphi_i(t) = \varphi_i^*(t)F$ и $\bar{\varphi}_{i,k}(t) = \varphi_{i,k}^*(t)F$ ($i = 1, 2, 3; k = 1, 2, 3, 4$) в задаче Герца (15), (16) от их точных значений приведены на рисунке 4. Нетрудно заметить, что для функции $\varphi_1(t)$ минимальное расхождение между приближенным и точным решением дает расчет с модулем лагранжевого типа, а расчеты с эффективными модулями смешанного типа $g_{C,L}^n$, ($n = 1, 2$) приводят к погрешности, не превышающей 5%. Для функций $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$ наблюдается обратная картина: минимальное расхождение имеет место в расчете с модулем кастильянового типа, а расчеты с лагранжевым модулем характеризуются наибольшей погрешностью ($\approx 120\%$); погрешность в расчетах с модулями смешанного типа близка к погрешности расчетов на основе модуля кастильянового типа.

На рисунке 5 приведены кривые изменения во времени эффективных модулей $g_k(t)$ ($k = 1, 2, 3, 4$). Из представленных графиков вытекают следующие выводы:
– эффективные модули смешанного типа по своим свойствам идентичны модулям лагранжевого и кастильянового типов;

- кривые изменения во времени эффективных модулей $g_{C,L}^1, g_{C,L}^2$ практически совпадают;
- эффективные модули $g_{C,L}^n$ ($n=1, 2$) удовлетворяют неравенствам $g_C(t) \geq g_{C,L}^n(t) \geq g_L(t)$ для любых $t \in [0, \infty]$.

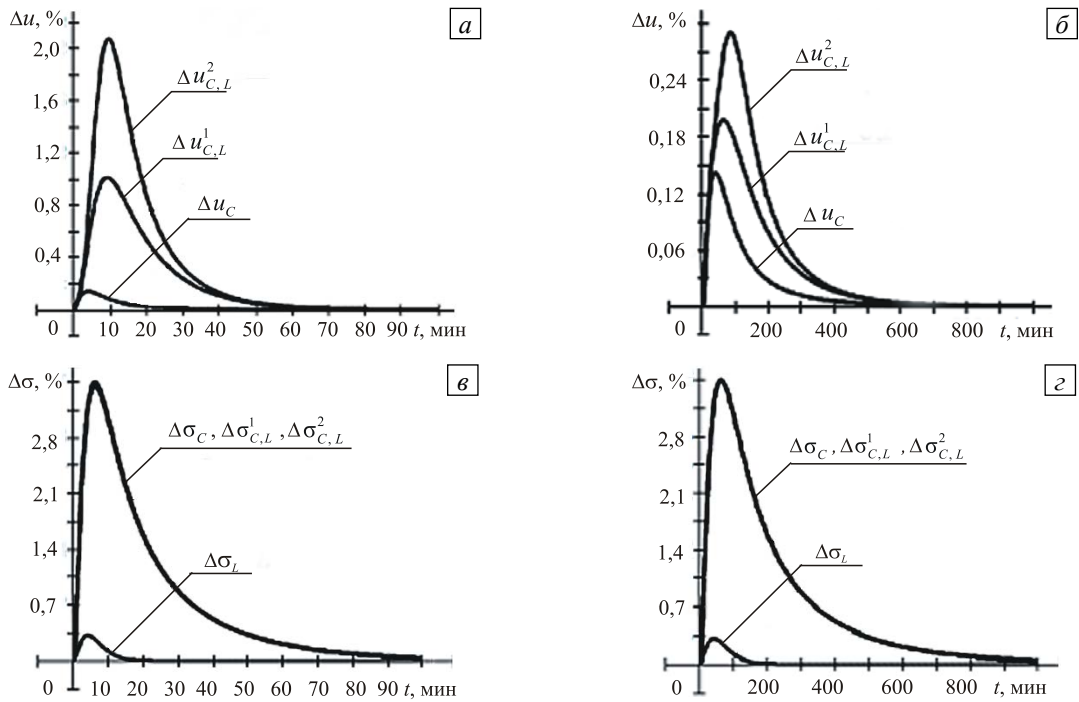


Рис. 3. Графики изменения во времени относительных отклонений величин радиального перемещения u (а, б) и радиального напряжения $\Delta\sigma$ (в, г) для задачи Буссинеска при двух значениях времени t_{\min} , мин: 10 (а, в) и 100 (б, г); отклонения Δu рассчитаны на основе модулей $g_C, g_{C,L}^1, g_{C,L}^2$, отклонения $\Delta\sigma$ – на основе модулей $g_k(t)$

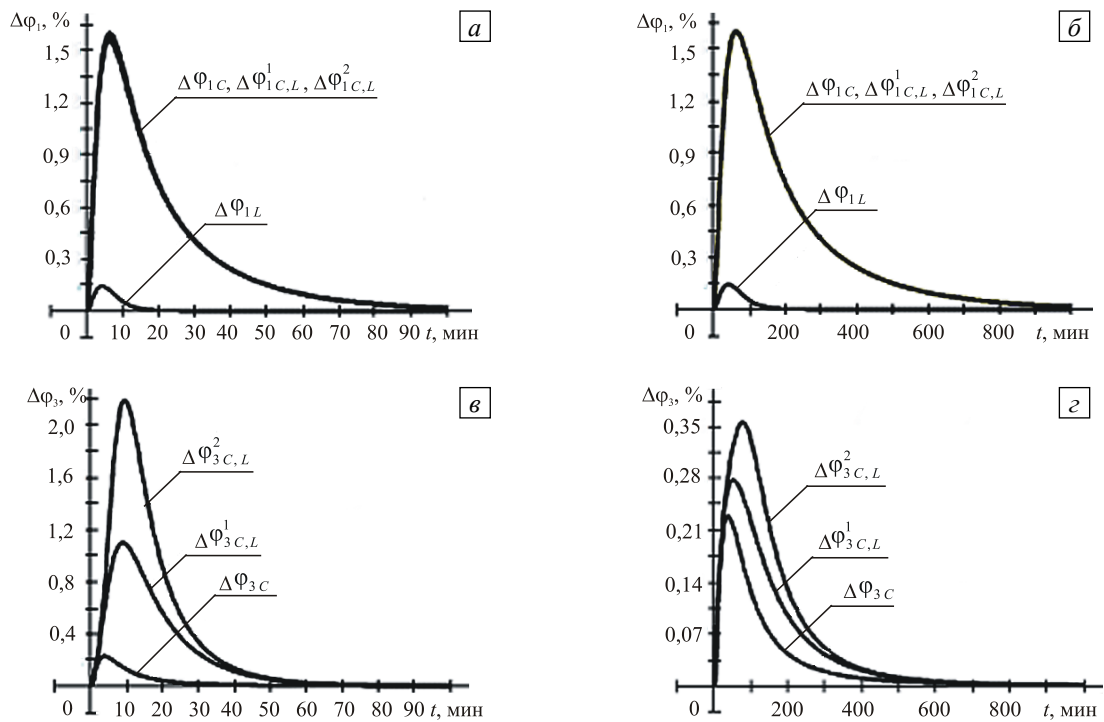


Рис. 4. Графики изменения во времени относительных отклонений значений функций ϕ_1 (а, б) и ϕ_3 (в, г) для задачи Герца при двух значениях времени t_{\min} , мин: 10 (а, в) и 100 (б, г); отклонения $\Delta\phi_1$ рассчитаны на основе модулей $g_k(t)$, отклонения $\Delta\phi_3$ – на основе модулей $g_C, g_{C,L}^1, g_{C,L}^2$

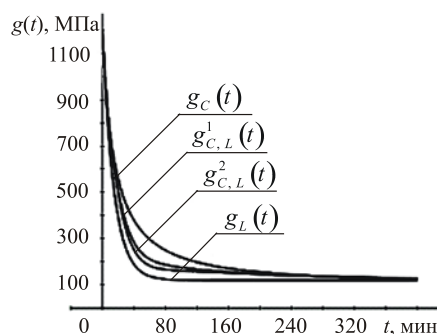


Рис. 5. Значения $g_L(t)$ при $\eta=10$ и $\alpha(17)$

7. Выводы

Получены выражения и установлены свойства новых эффективных модулей смешанного типа, которые позволяют решать достаточно широкий круг задач расчета напряженно-деформированного состояния вязкоупругих тел.

Выражение объемного содержания одного из компонент, свойства которого описываются эффективными по времени модулями лагранжевого или кастильянового типов, найдено в виде функции времени, параметры которой задаются на основе механических характеристик линейно вязкоупругих тел.

Расчеты с эффективными модулями смешанного типа показали вполне удовлетворительную сходимость по сравнению с точными решениями, по крайней мере, для двух краевых задач линейной вязкоупругости с историями воздействия нагрузки, заданной в виде ступенчатой функции.

Найденные эффективные модули смешанного типа, как и модули лагранжевого и кастильянового типов, не зависят от способа аппроксимации материальных функций релаксации и ползучести.

Вопрос о применимости предлагаемого подхода к более общим, чем ступенчатые, историям нагружения нуждается в дополнительной проработке, в частности, в определении оценок погрешности приближенных решений при их численной реализации.

Литература

1. Дэй У.А. Термодинамика простых сред с памятью. – М.: Мир, 1974. – 190 с.
2. Кравчук А.С., Майборода В.П., Уржумцев Ю.С. Механика полимерных и композиционных материалов. – М.: Наука, 1985. – 304 с.
3. Труделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред – М.: Мир, 1975. – 592 с.
4. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука, 1970. – 280 с.
5. Бленд Д.Р. Теория линейной вязкоупругости. – М.: Мир, 1965. – 199 с.
6. Ильюшин А.А. Метод аппроксимаций для расчета конструкций по линейной теории термовязкоупругости // Механика полимеров. – 1968. – № 2. – С. 210-221.
7. Адамов А.А., Матвеев В.П., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н. Методы прикладной вязкоупругости. – Екатеринбург: УрО РАН, 2003. – 411 с.
8. Хуторянский Н.М. Метод гранично-временных интегральных уравнений в нестационарных динамических задачах вязкоупругости // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Всесоюз. межвуз. сб. / Горьк. ун-т, 1979. – № 12. – С. 11-17.
9. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Костромина П.П. Влияние разгрузочных щелей на напряженное состояние и ползучесть породного массива в окрестности выработки // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2011. – Т. 4, № 2. – С. 110-118. DOI
10. Павлов С.М., Светашков А.А. Итерационный метод решения задач линейной вязкоупругости // Известия ВУЗов. Физика. – 1993. – Т. 36, № 4. – С. 129-137.
11. Куликов Р.Г., Труфанов Н.А. Итерационный метод решения квазистатических нелинейных задач вязкоупругости // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2009. – Т. 2, № 3. – С. 44-56. DOI
12. Коваленко А.Д., Кильчинский А.А. О методе переменных модулей в задачах линейной наследственной упругости // Прикладная механика. – 1970. – Т. 6, № 12. – С. 27-34.
13. Мальев В.И., Труфанов Н.А. Метод квазиконстантных операторов в теории вязкоупругости анизотропных нестареющих материалов // Изв. АН СССР. МТТ. – 1987. – № 6. – С. 148-154.
14. Мальцев Л.Е., Кренкин В.И. Метод непосредственного решения задач вязкоупругости // Механика полимеров. – 1977. – № 4. – С. 606-613.
15. Светашков А.А. Определение эффективных характеристик неоднородных вязкоупругих тел // ЖВТ. – 2001. – Т. 6, № 1. – С. 52-64.
16. Светашков А.А. Эффективные по времени модули линейной вязкоупругости // Механика композитных материалов. – 2000. – № 1. – С. 96-107.
17. Светашков А.А., Куприянов Н.А. Применение энергетического метода к определению эффективных по времени модулей линейной вязкоупругости // Физ. мезомех. – 2010. – Т. 13, № 3. – С. 69-73.
18. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1982. – 334 с.
19. Светашков А.А., Куприянов Н.А. Оценка погрешности расчетов напряженно-деформированного состояния линейно-вязкоупругих тел с эффективными по времени модулями // Физ. мезомех. – 2011. – Т. 14, № 1 – С. 101-106.
20. Рекач В.Г. Руководство к решению задач по теории упругости. – М.: Высшая школа, 1966. – 229 с.
21. Бугаков И.И. Ползучесть полимерных материалов (теория и приложения). – М.: Наука, 1973. – 288 с.

Поступила в редакцию 16.12.11; опубликована в электронном виде 22.10.12

Сведения об авторах

Светашков Александр Андреевич, дфмн, проф., Национальный исследовательский Томский политехнический университет (ТПУ), 634050, Томск, пр. Ленина, д. 30; E-mail: svetashkov@tpu.ru

Куприянов Николай Амвросьевич, ктн, доцент, ТПУ; E-mail: kupr88@gmail.com

Манабаев Кайрат Камитович, асс., ТПУ; E-mail: kai1985@mail.ru