

DOI: 10.7242/1999-6691/2012.5.3.33

УДК: 532.5.013.3

ЭФФЕКТЫ АСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ В КОНВЕКЦИИ

А.Б. Мелентьев, Е.Л. Тарунин

Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия

Исследуются эффекты асимметричных модуляций гравитации в горизонтальном слое и замкнутой полости, подогреваемых снизу, а также эффекты асимметричных вращательных колебаний замкнутой полости, подогреваемой снизу. Получены зависимости критической амплитуды модуляций от параметра асимметрии в случае невесомости и предельных характеристик течения от параметра асимметрии. Показано влияние асимметричности вращательных колебаний замкнутой полости на критическое значение амплитуды и на бифуркационную диаграмму.

Ключевые слова: асимметричные колебания, поступательные и вращательные колебания, тепловая конвекция

EFFECTS OF ASYMMETRIC MODULATIONS IN CONVECTION

A.B. Melentyev and E.L. Tarunin

Perm State National Research University, Perm, Russia

This study examines the effects of asymmetric gravity modulation in a horizontal layer and a closed cavity heated from below, and the effects of asymmetric rotational oscillations of a closed cavity heated from below. The critical modulation amplitude is obtained as a function of the asymmetry parameter for microgravity, and the limiting flow characteristics as a function of the asymmetry parameter. It is shown that the asymmetry of rotational oscillations of the closed cavity influences the critical amplitude and the bifurcation diagram.

Key words: asymmetric oscillations, translational and rotational oscillations, heat convection

1. Введение

Для управления поведением механических систем часто используют модуляцию какого-либо параметра. Наиболее полно в классической механике исследованы гармонические колебания, а асимметричные колебания рассматривались значительно реже. В то же время известно, что именно этот вид колебаний дает некоторые интересные эффекты. Существует несколько вариантов асимметричных колебаний [1]. В данной работе используется вариант, который предложен в [2]. Позднее (см. [3]) такой вид колебаний исследовался в различных задачах динамики, и были выявлены эффекты влияния асимметрии на порог устойчивости системы и ее поведение на резонансных частотах.

Вопрос о роли асимметричных колебаний в задачах гидродинамики и тепловой конвекции почти не исследовался. Авторам известны лишь две работы [4, 5], в которых показано, что несимметричность вибраций в задаче движения тонкого слоя вязкопластичной жидкости по наклонной твердой поверхности существенно снижает пороговое значение амплитуды модуляций [4], и отмечено влияние асимметричных модуляций на интегральные характеристики в надкритической области при подогреве снизу [5]. Заметим, что при исследовании модуляций в конвекции часто в расчет принимается высокочастотный предел модуляций [6–10]. В представляемой статье рассматривается случай конечных частот.

2. Вертикальные колебания

Асимметричные колебания с параметром асимметрии $\zeta = \omega_1/\omega_2 = (t_0 - t_1)/t_1$ имеют вид:

$$f(t) = \begin{cases} a \cos(\omega_1 t), & 0 \leq t < t_1, \\ -a \cos[\omega_2(t - t_1)], & t_1 \leq t < t_0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь: t — время; a — амплитуда колебаний; ω_1, ω_2 — циклические частоты колебаний на первой и второй частях периода соответственно; t_0 — период колебаний; t_1 — продолжительность первой части периода. В дальнейшем будет использоваться циклическая частота колебаний на полном периоде $\Omega = 2\pi/t_0$. В задачах с модуляцией параметра приходится иметь дело также со второй производной функции колебаний:

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \begin{cases} -a\omega_1^2 \cos \omega_1 t, & 0 \leq t < t_1, \\ a\omega_2^2 \cos[\omega_2(t - t_1)], & t_1 \leq t < t_0. \end{cases} \quad (2)$$

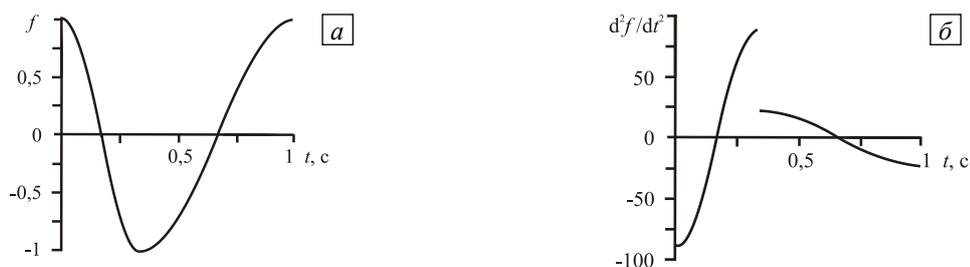


Рис. 1. График функции $f(t)$ (а) и её второй производной (б) на одном периоде ($t_0 = 1$ с; $a = 1$; $\zeta = 2$)

При этом $f(t)$ — непрерывная функция, а её вторая производная является разрывной. Графически функции (1) и (2) представлены на рисунке 1 для параметра асимметрии $\zeta = 2$.

На примерах бесконечного горизонтального слоя жидкости со свободными границами (Рис. 2, а) и заполненного жидкостью бесконечного горизонтального цилиндра квадратного сечения с твёрдыми границами (Рис. 2, б), подогреваемых снизу, исследуем эффекты, вызванные их вертикальными колебаниями. В случае слоя для описания поведения жидкости используем систему уравнений упрощённой модели Лоренца и полную систему уравнений конвекции в приближении Буссинеска.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений модели Лоренца имеет следующий безразмерный вид [12]:

$$\begin{cases} \dot{X} = \text{Pr}(r + M(t))Y - \text{Pr} X, \\ \dot{Y} = X - Y - XZ, \\ \dot{Z} = -bZ + XY. \end{cases} \quad (3)$$

На рисунке 2 и в уравнениях (3) X, Y, Z — амплитуды трех Лоренцовских мод (X характеризует скорость вращения конвективных валов, а Y и Z — искажения поля температуры), $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$ — их производные по времени; $\text{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля (ν — динамическая вязкость, χ — коэффициент температуропроводности); $b = 4(1 + \lambda^{-2})^{-1}$ — геометрический параметр ($\lambda = L/H$ — безразмерная длина рассматриваемой конвективной ячейки (для слоя — это область между осью y и штриховой линией $x = \lambda$), где L — длина рассматриваемой конвективной ячейки, H — толщина слоя); $r = \text{Ra}/\text{Ra}_*$ — нормированное значение числа Рэлея ($\text{Ra} = g\beta H^3 / (\nu\chi)$ и Ra_* — число Рэлея и его критическое, в отсутствие колебаний, значение, где g — ускорение свободного падения, β — коэффициент теплового расширения, θ — разница температур T между горизонтальными границами ячейки), $M(t)$ — функция амплитудных модуляций силы

тяжести:
$$M(t) = \begin{cases} \hat{a} \omega_1^2 [\cos \omega_1 t] / \omega^2, & 0 \leq t < t_1, \\ -\hat{a} \omega_2^2 [\cos \omega_2 (t - t_1)] / \omega^2, & t_1 \leq t < t_0 \end{cases}$$
 ($\hat{a} = a \Omega^2 \beta \theta H^3 / (\nu \chi \text{Ra}_*)$ — амплитуда модуляций,

где a — амплитуда колебаний слоя, ω — частота модуляций, соответствующая Ω , $\omega_1, \omega_2, t_0, t_1$ — безразмерные аналоги соответствующих частот и периодов колебаний. Для обезразмеривания используются масштабы: для частот и времени — $[t] = \pi^2 (1 + \lambda^{-2}) H^2 / (\nu \text{Pr})$; для амплитуд X, Y, Z — $[\chi / [\sqrt{2} \lambda (1 + \lambda^{-2})]]$, $[\theta \pi / \sqrt{2}]$, $[\theta \pi]$; для расстояния — $[H]$. Линейные размеры рассматриваемой конвективной ячейки в слое определяются из условия минимума нейтральной кривой ($\lambda = 2\sqrt{2}$) — зависимости критической амплитуды \hat{a} от обратной частоты модуляции ω^{-1} , построенной в рамках линейной теории устойчивости в отсутствие модуляций [13].

Система (3) решалась методом Рунге–Кутты 4-го порядка с автоматическим подбором шага и заданной

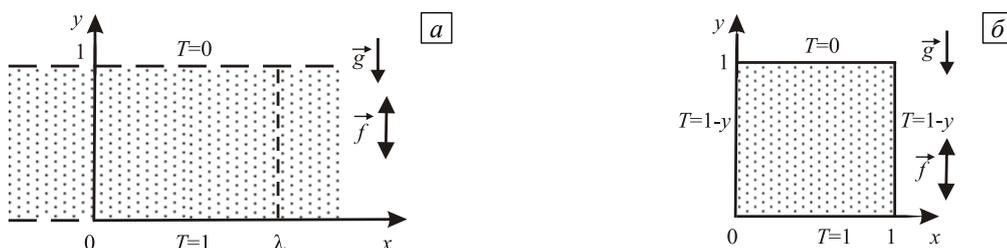


Рис. 2. Конвективная ячейка в случае вертикальных колебаний слоя (а) и цилиндра квадратного сечения (б)

погрешностью решения не более 10^{-6} . Счёт производился до установления значения суммы амплитуд X, Y, Z с относительной точностью 10^{-6} . В качестве начального состояния использовалось возмущение $X_0 = 0,1$.

Для подтверждения результатов, а также для более точного и подробного описания поведения системы использовался двумерный вариант полной системы уравнений конвекции в приближении Буссинеска [13], который в переменных функции тока, вихря скорости и температуры имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \Delta \varphi + (\text{Gr} + \text{Gr}_m(t)) \frac{\partial T}{\partial x}, \\ \Delta \psi + \varphi = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\Delta T}{\text{Pr}}. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь: ψ — функция тока; φ — вихрь скорости; T — температура (функции ψ, φ, T , соответственно, имеют масштабы $[v]$, $[v/H^2]$, $[\theta]$, расстояние — $[H]$); Pr — число Прандтля; $\text{Gr} = g\beta\theta H^3/\nu^2$ — число Грасгофа; $\text{Gr}_m(t)$ — функция модуляции: $\text{Gr}_m(t) = \begin{cases} \omega_1^2 \text{Gr}_A [\cos(\omega_1 t)]/\omega^2, & 0 \leq t < t_1, \\ -\omega_2^2 \text{Gr}_A [\cos(\omega_2(t-t_1))]/\omega^2, & t_1 \leq t < t_0; \end{cases}$ $\text{Gr}_A = a\Omega^2\beta\theta H^3/\nu^2$ — безразмерная амплитуда модуляций с частотой ω ; $\omega_1, \omega_2, t_0, t_1$ — безразмерные частоты и периоды колебаний в масштабе времени $[t] = H^2/\nu$. Граничные условия для системы (4) отвечали непроницаемым горизонтальным границам ($\psi|_{y=0, y=1} = 0, \varphi|_{y=0, y=1} = 0$) с заданной постоянной температурой $T|_{y=0} = 1, T|_{y=1} = 0$. На вертикальных границах полагалось условие периодичности решения.

Решение системы уравнений (4) осуществлялось по алгоритму двухполевого метода [14] совместно с методом конечных разностей для температуры и вихря скорости (аппроксимация функций выполнялась по явной схеме) и методом последовательной верхней релаксации для функции тока. Расчётная сетка содержала 90×30 узлов и обеспечивала погрешность интегральных характеристик решения менее 1%. При расчёте течений большой интенсивности применялась сетка 156×60 с целью обеспечения устойчивости схемы центрально разностной аппроксимации [14]. Счёт производился до установления суммы амплитуд интегральных характеристик (максимума функции тока ψ_m , числа Нуссельта Nu и кинетической энергии E_k [13, 14]) с относительной точностью 10^{-6} . В качестве начального использовалось состояние с заданным в центре ячейки вихрем. Кроме того, для сокращения времени вычислений часто использовался метод продолжения по параметру.

В случае цилиндра (в дальнейшем — замкнутой полости) движение жидкости также описывалось системой уравнений (4). Граничные условия соответствовали условиям прилипания на контуре полости Γ ($\psi|_{\Gamma} = 0, \partial\psi/\partial n|_{\Gamma} = 0$) и фиксированным значениям температуры ($T|_{\Gamma} = 1 - y$). Для решения системы использовался упомянутый алгоритм двухполевого метода. Расчётная сетка 40×40 обеспечивала погрешность интегральных характеристик решения менее 1%. Счёт производился до установления суммы амплитуд интегральных характеристик ψ_m, Nu, E_k с относительной точностью 10^{-6} . Подобные постановки задач рассматривались ранее в работах [15, 16] для симметричных колебаний.

Прежде чем перейти к выявлению роли асимметрии вертикальных колебаний слоя в поле силы тяжести, рассмотрим в слое режимы конвекции в условиях невесомости ($g = 0$) для жидкости с числом Прандтля $\text{Pr} = 1$. По аналогии с работой [13] с помощью метода Флоке из амплитудных уравнений для модуляций авторами получены нейтральные кривые, соответствующие первой области неустойчивости при трёх значениях параметра асимметрии ζ (см. Рис. 3, а). Кривые согласуются с результатами работы [5]. Внутри области неустойчивости вертикальными и горизонтальными пунктирными линиями показаны «разрезы», которые будут рассмотрены при анализе решения. Отчётливо видно, что с ростом параметра асимметрии понижается порог конвективной устойчивости при наличии модуляций.

Выполненные расчёты позволили найти для модели Лоренца (3) зависимость критического (минимального) значения амплитуды модуляции \hat{a}^* от параметра асимметрии:

$$\hat{a}^*(\zeta) \approx 5,086 - 0,348\zeta = 5,086 \cdot (1 - 0,0684\zeta), \quad 1 \leq \zeta \leq 5. \quad (5)$$

Для полных уравнений (4) получена аналогичная зависимость для $\text{Gr}_A^*(\zeta)$:

$$\text{Gr}_A^*(\zeta) \approx 3344 - 228,7\zeta = 5,086 \cdot 657,49 \cdot (1 - 0,0684\zeta), \quad 1 \leq \zeta \leq 5. \quad (6)$$

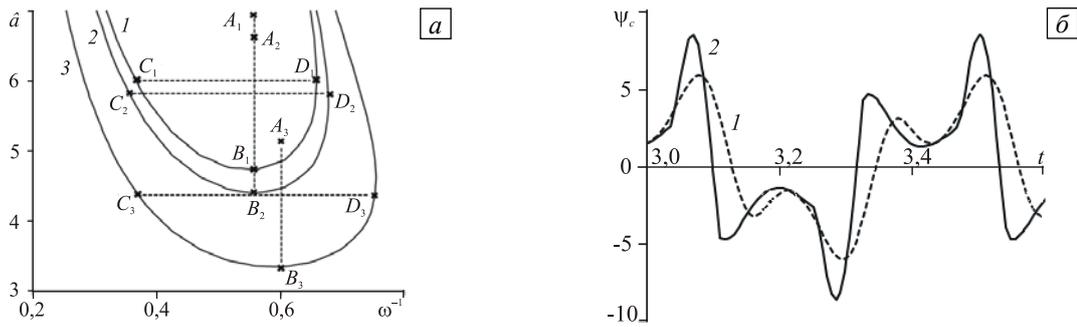


Рис. 3. Нейтральные кривые при значениях параметра асимметрии ζ : 1 (кривая 1), 2 (2), 5 (3) (а); зависимость функции тока в центре конвективной ячейки ψ_c от времени для параметров $t_0 = 0,217$, $Gr_A = 3945$ при значениях ζ : 1 (кривая 1), 2 (2), соответствующих точке пересечения «разрезов» A_1B_1 и C_1D_1 (б)

Обсудим нелинейные установившиеся режимы конвекции внутри областей неустойчивости. Отметим, что для получения установившихся колебаний с хорошей точностью в расчётах требуется принимать во внимание около 10 периодов модуляции. Типичный режим установившихся колебаний функции тока в центре конвективной ячейки ψ_c при $\zeta = 2$ представлен на рисунке 3, б сплошной линией 2. Для сравнения пунктирной линией 1 изображена соответствующая зависимость для симметричной модуляции ($\zeta = 1$). Как видно, в течение одного периода колебаний функция тока в центре конвективной ячейки меняет знак. Наблюдается существенное увеличение амплитуды колебаний (на $\approx 44\%$) в случае параметра асимметрии $\zeta = 2$.

Рассмотрим характеристики установившегося конвективного течения при значениях параметров, которые соответствуют горизонтальным и вертикальным «разрезам» рисунка 3, а. Зависимости амплитуды на горизонтальных «разрезах» имеют вид парабол, опирающихся на границы нейтральных кривых (C_iD_i). Расчёты позволили получить приближённую зависимость максимальных значений характеристики интенсивности течения X_* в модели Лоренца от параметра асимметрии для горизонтальных «разрезов»

$$X_*(\zeta) \approx 1,908 + 0,42(\zeta - 1), \quad 1 \leq \zeta \leq 5 \quad (7)$$

и соответствующую зависимость для максимума функции тока в случае решения системы (4):

$$\psi_m^*(\zeta) \approx 5,914 + 1,192(\zeta - 1), \quad 1 \leq \zeta \leq 5. \quad (8)$$

Отметим, что при значительном росте значений максимальных характеристик ($>80\%$) средние за период значения изменяются незначительно (не более чем на 3%).

Для вертикальных «разрезов», показанных на рисунке 3, а, обработка результатов расчётов методом наименьших квадратов привела к зависимости максимума переменной X за период от амплитуды модуляций в модели Лоренца в виде корневого закона [13]:

$$X_m(\hat{a}, \zeta) = c_x(\zeta) \sqrt{\hat{a} - \hat{a}^*(\zeta)}, \quad c_x(\zeta) \approx 1,643 + 0,537(\zeta - 1), \quad 1 \leq \zeta \leq 5. \quad (9)$$

Соответствующая зависимость для максимума функции тока при решении полных уравнений получила вид:

$$\psi_m(Gr_A, \zeta) = c_\psi(\zeta) \sqrt{Gr_A - Gr_A^*(\zeta)}, \quad c_\psi(\zeta) \approx 0,2 + 0,06(\zeta - 1), \quad 1 \leq \zeta \leq 5. \quad (10)$$

Далее, от случая невесомости ($g = 0$) перейдём к рассмотрению конвекции при ненулевом значении числа Рэлея и фиксированном значении числа Прандтля $Pt = 10$. Ориентируясь на поиск резонансных эффектов, определим частоту ω_0 «собственных» колебаний системы. В качестве «собственной» выберем частоту затухающих колебаний установления в отсутствие модуляции. С помощью вычислительных экспериментов для модели Лоренца была найдена зависимость «собственной» частоты от нормированного числа Рэлея r :

$$\omega_0(r) \approx 0,22 + 2,11\sqrt{r - 1,4}, \quad 1,5 < r < 20. \quad (11)$$

Аналогичные зависимости для варианта полных уравнений конвекции (4) в слое записываются как

$$\omega_0(Gr_0) \approx 0,0234 \cdot Gr_0 - 0,334, \quad 131,5 \leq Gr_0 \leq 263, \quad (12)$$

а для задачи с замкнутой полостью в следующем виде:

$$\omega_0(Gr) \approx 0,69 \cdot \sqrt{Gr - 5820} - 3,77, \quad 7 \cdot 10^3 < Gr < 40 \cdot 10^3. \quad (13)$$

В дальнейших вычислительных экспериментах исследовались нелинейные установившиеся режимы конвекции при наличии модуляции с частотой, близкой к «собственным» частотам (11)–(13). В результате получены амплитудные кривые для модели Лоренца, представленные на рисунке 4. Отметим, что для всех рассмотренных случаев (модель Лоренца, слой, замкнутая полость) аналитический вид амплитудных зависимостей характеристик интенсивности течения качественно аналогичен, о чем свидетельствует содержимое таблицы 1.

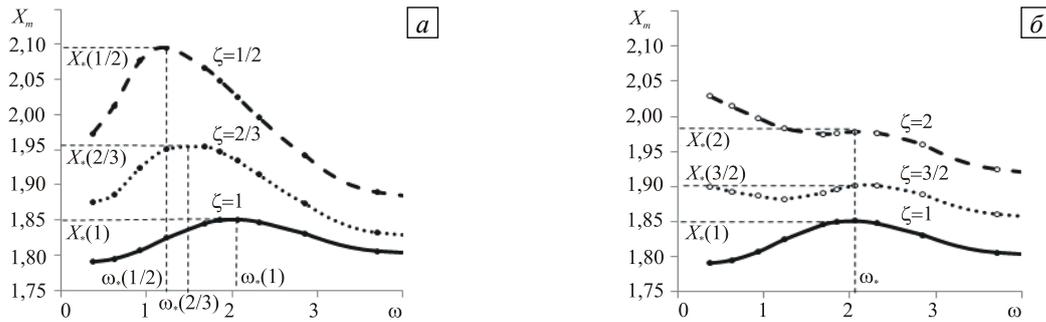


Рис. 4. Амплитудные кривые – зависимость максимальных значений X от частоты модуляции ω для значений параметра асимметрии $\zeta < 1$ (а) и $\zeta > 1$ (б)

Таблица 1. Зависимости максимумов характеристик интенсивности течения от параметра асимметрии

Вид модели	Диапазон параметра асимметрии	
	$0,5 \leq \zeta \leq 1$	$1 \leq \zeta \leq 2$
Модель Лоренца	$X_*(\zeta) \approx 2,78 \cdot (0,32\zeta^2 - 0,66\zeta + 1)$	$X_*(\zeta) \approx 1,72 \cdot (0,074\zeta + 1)$
Горизонтальный слой	$\psi_m(\zeta) \approx 0,914 \cdot (0,35\zeta^2 - 0,7\zeta + 1)$	$\psi_m(\zeta) \approx 0,553 \cdot (0,08\zeta + 1)$
Замкнутая полость	$\psi_m^*(\zeta) \approx 7,15 \cdot (0,22\zeta^2 - 0,49\zeta + 1)$	$\psi_m^*(\zeta) \approx 5,075 \cdot (0,031\zeta + 1)$

Для всех трёх моделей интенсивность течения возрастает с отклонением параметра асимметрии от значения 1 (см. Рис. 4). В диапазоне $\zeta < 1$ наблюдается смещение максимума амплитудной кривой в область низких частот (см. Рис. 4, а), при $\zeta > 1$ — «размытие» максимума и увеличение амплитуд колебаний с низкой частотой (см. Рис. 4, б).

3. Вращательные колебания

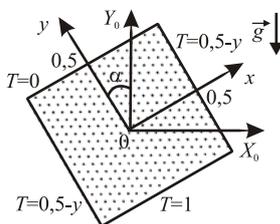


Рис. 5. Геометрия области в случае вращательных колебаний замкнутой полости

Рассмотрим задачу плоского конвективного течения в бесконечном горизонтальном цилиндре квадратного сечения, подогреваемом снизу, при наличии вращательных колебаний вокруг оси цилиндра (см. Рис. 5). Особенностью постановки задачи является добавление в уравнение движения слагаемых, соответствующих силам, возникающим при вращении системы [17, 18]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \text{Pr} \Delta \vec{v} + \text{Gr} T (\vec{i} \sin \alpha(t) + \vec{j} \cos \alpha(t)) - \\ - (\vec{\omega}(t) \times \vec{r} + \dot{\vec{\omega}}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}) + 2\vec{\omega}(t) \times \vec{v}), \\ \text{div} \vec{v} = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) T = \Delta T. \end{cases} \quad (14)$$

Здесь: $\vec{v} = (u, v)$ — вектор скорости движения жидкости в плоскости сечения; p — давление в жидкости; T — температура; Pr — число Прандтля, Gr — число Грасгофа; \vec{i}, \vec{j} — горизонтальный и вертикальный

единичные векторы в системе отсчёта, связанной с поперечным сечением цилиндра; α — угол поворота; $\vec{\omega}$ — угловая скорость; $\vec{\dot{\omega}}$ — угловое ускорение; $\vec{r} = (x, y)$ — радиус-вектор точки в плоскости поперечного сечения. Угол поворота цилиндра влево–вправо из положения, когда ось y противоположна по направлению силе тяжести, изменяется по закону:

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_0 \cos \omega_1 t, & 0 \leq t < t_1, \\ -\alpha_0 \cos \omega_2 (t - t_1), & t_1 \leq t < t_0. \end{cases}$$

Здесь: α_0 — амплитуда вращательных колебаний; $\omega_1, \omega_2, t_1, t_0$ — безразмерные частоты и периоды колебаний в масштабе времени $[t] = H^2/\nu$. Другие параметры имеют масштабы: расстояние — $[H]$; скорость ν — $[\nu/H]$; температура T — $[\theta]$; давление p — $[\rho_0 \nu^2/H^2]$. Число Прандтля возьмем постоянным: $Pr = 1$. Решим задачу при условиях прилипания на границе сечения Γ ($\vec{v}|_{\Gamma} = 0$) и заданной температуре ($T|_{\Gamma} = 0,5 - y$).

Далее система уравнений (14) переводилась в переменные вихря и функции тока (с масштабами, идентичными масштабам системы (4)) и решалась по алгоритму двухполюсового метода [14]. Расчётная сетка 20×20 узлов обеспечивала погрешность интегральных характеристик решения менее 2%. Проводились также проверочные расчёты на сетках 30×30 и 40×40 узлов. В качестве начального использовалось состояние с заданным в центре сечения вихрем, закрученным в положительном или отрицательном направлении. Для оптимизации расчетного времени также использовался метод продолжения по параметру.

Прежде чем перейти к обсуждению результатов, отметим, что случай высоких частот и малых амплитуд симметричных колебаний был рассмотрен в статье [17] и подробно описан в монографии [18].

Для облегчения анализа колебательных режимов вначале рассмотрим бифуркационную диаграмму стационарных конвективных режимов, полученную авторами с помощью вычислительных экспериментов для фиксированного значения угла поворота $\alpha = 5^\circ$ (см. Рис. 6). Кружки и треугольники соответствуют результатам расчётов. Из рисунка, видно, что режим вращения жидкости в направлении против часовой стрелки существует во всем диапазоне чисел Грасгофа, а при значениях $Gr \geq Gr^*$ появляется еще и режим с вращением по часовой стрелке.

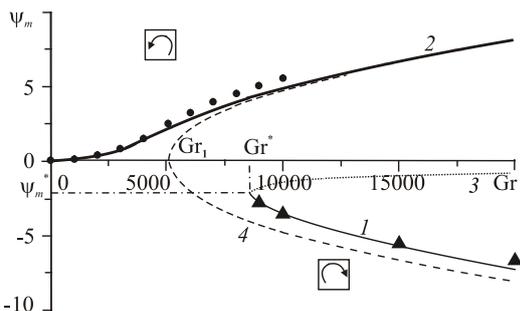


Рис. 6. Зависимость предельного значения функции тока от числа Грасгофа (стационарное решение) для $\alpha = 5^\circ$

Теория ветвления [19] подсказывает, что для описания полученной зависимости максимума функции тока установившегося режима конвекции от числа Грасгофа наилучшим образом подходит кубическая парабола:

$$\psi_m^3 - 4 \cdot 10^{-3} (Gr - Gr_1) \psi_m - 2,3 \cdot 10^{-3} Gr = 0.$$

Этот вид аппроксимации данных вычислительных экспериментов показан на рисунке сплошными линиями 1 и 2; пунктирная линия 3 соответствует неустойчивой ветви. Штриховая линия 4 изображает бифуркационную диаграмму для случая $\alpha = 0$. Здесь Gr_1 — ее критическое число Грасгофа.

С помощью вычислительных экспериментов определен соответствующий Gr^* критический угол поворота цилиндра как функция числа Грасгофа:

$$\alpha_s(Gr) = 2 \cdot 10^{-12} Gr^3 - 2 \cdot 10^{-7} Gr^2 + 3,4 \cdot 10^{-3} \cdot Gr - 14,098, \quad 6 \cdot 10^3 < Gr < 3 \cdot 10^4.$$

Далее рассмотрим вращательные колебания с амплитудой $\alpha_0 = 5^\circ$. Полученная бифуркационная диаграмма установившихся колебательных режимов показана на рисунке 7, а. Пунктирная линия обозначает случай $\alpha = 0$, заштрихованная область — значения, которые принимает функция тока в установившемся режиме симметричных колебаний. Из рисунка видно, что при числах Грасгофа, меньших Gr_1^* , есть лишь один установившийся режим со сменой направления вращения за период, а при $Gr > Gr_1^*$ существуют два режима без смены направления вращения за период. Согласующееся с Gr_1^*

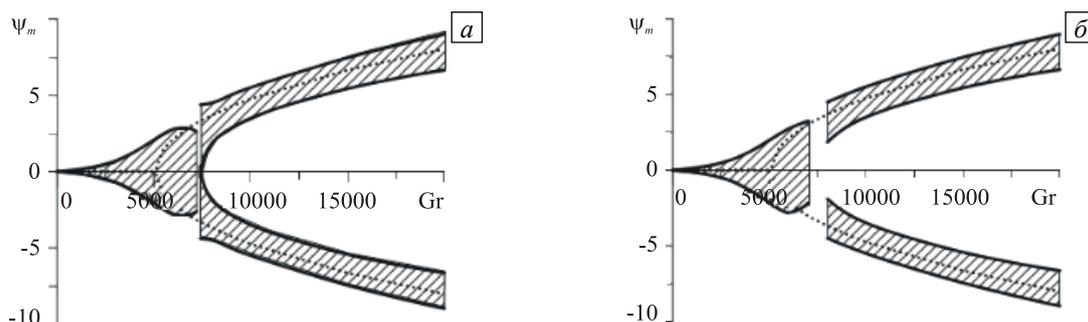


Рис. 7. Зависимость амплитуды установившихся колебаний функции тока от числа Грагофа при модуляции угла поворота $\alpha(t)$ с параметрами $\alpha_0 = 5^\circ$ и $t_0 = 1$ для симметричных ($\zeta = 1$) (а) и асимметричных ($\zeta = 2$) (б) модуляций

критическое значение амплитуды вращательных колебаний α_0^* , установленное в результате вычислительных экспериментов, имеет вид:

$$\alpha_0^*(Gr, t_0) \approx 11 + 0,9/t_0 + \text{th}((1 + 2,076/t_0) \cdot (Gr/Gr_1 - 1)), \quad 6 \cdot 10^3 \leq Gr \leq 2 \cdot 10^4, \quad 0,1 \leq t_0 \leq 1.$$

Перейдём к рассмотрению установившихся колебаний при асимметричных модуляциях. В этом случае также были построены бифуркационные диаграммы для параметров асимметрии $1 < \zeta \leq 5$ и периода $0,1 \leq t_0 \leq 1$. В качестве примера на рисунке 7, б приведена бифуркационная диаграмма при $\zeta = 2$. Из сравнения частей рисунка 7 видно, что асимметрия влияет на бифуркационную диаграмму колебательных режимов лишь в области параметров, близких к Gr_1^* ($7000 < Gr < 8000$). В точке $Gr = 7000$ максимум ψ_m для $\zeta = 2$ на 18% больше максимума при $\zeta = 1$, а минимум по модулю — меньше на 21%.

Выяснено, что при значении параметра асимметрии $\zeta = 1/2$ бифуркационная диаграмма совпадает с диаграммой, полученной при $\zeta = 2$, зеркально отражённой относительно горизонтальной оси Gr. Вычислительные эксперименты показали, что симметрия диаграмм сохраняется и при других ζ . Также обнаружено, что для периодов колебаний $t_0 \geq 0,5$ асимметрия незначительно влияет на критическое значение амплитуды α_0^* , однако с ростом частоты колебаний асимметрия диаграммы становится заметнее, а ее анализ — сложнее, особенно вблизи значений числа Грасгофа, соответствующих критическому значению амплитуды. Так для периода колебаний $t_0 < 0,5$ наблюдается понижение критического значения амплитуды с параметром асимметрии $\zeta < 1$ (например, при $t_0 = 0,1$, $\zeta = 1/3$ на $\approx 30\%$), а для $\zeta > 1$ — повышение критического значения амплитуды (например, при $t_0 = 0,1$, $\zeta = 3$ на $\approx 25\%$). Данные замечания относительно поведения критической амплитуды справедливы при начальных условиях, соответствующих положительной закрутке вихря (против часовой стрелки). В случае начальных условий с отрицательной закруткой вихря критическое значение амплитуды для $\zeta < 1$ повышается (на $\approx 25\%$ при $t_0 = 0,1$, $\zeta = 1/3$), а для $\zeta > 1$ понижается (на $\approx 30\%$ при $t_0 = 0,1$, $\zeta = 3$).

4. Выводы

Показано, что асимметрия модуляций понижает порог устойчивости горизонтального слоя, подогреваемого снизу. Найдены зависимости предельных значений характеристик течения в установившихся нелинейных режимах конвекции от параметра асимметрии в задачах вертикальных колебаний слоя и полости, показывающие повышение амплитуд колебаний с увеличением параметра асимметрии.

Обнаружено различие эффектов для параметров асимметрии $\zeta > 1$ и $1 < \zeta$ (в механических задачах при высоких частотах эти эффекты отсутствуют [3]). В задаче исследования вертикальных колебаний слоя и полости обнаружено, что для $\zeta < 1$ наблюдается смещение максимума интенсивности течения на амплитудной кривой в сторону низких частот при отклонении параметра асимметрии от 1, а для $\zeta > 1$ наблюдается «размытие» максимума и рост интенсивности течения в диапазоне низких частот. В задаче исследования вращательных колебаний полости показано, что для малых периодов колебаний ($t_0 < 0,5$) при положительном начальном вихре критическое значение амплитуды понижается для $\zeta < 1$

и повышается для $\zeta > 1$; при отрицательном начальном вихре повышение наблюдается для $\zeta < 1$ и понижение — для $\zeta > 1$.

Показано, что асимметрия вращательных колебаний полости приводит к потере симметрии бифуркационной диаграммы, причём, диаграммы для значений параметра асимметрии $\zeta = \zeta_1$ и $\zeta = 1/\zeta_1$ являются подобными относительно горизонтальной оси.

Литература

1. Блехман И.И. Вибрационная механика. – М.: Физматлит, 1994. – 400 с.
2. Жуховицкий Е.М., Тарунин Е.Л., Шапошников И.Г. К теории инерцоида // Ученые записки Перм. ун-та. – Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 1972. – № 257. – С. 89-98.
3. Тарунин Е.Л. Обзор особенностей асимметричных колебаний // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. – Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2005. – № 37. – С. 169-187.
4. Любимов Д.В., Перминов А.В. Воздействие несимметричных вибраций на движение тонкого слоя вязкопластичной жидкости // МЖГ. – 2011. – № 1. – С. 30-41.
5. Тарунин Е.Л. Эффекты асимметричных колебаний // Гидродинамика: Сб. трудов Перм. пед. ун-та. – Пермь, 2007. – С. 236-249.
6. Любимова Т.П., Паршакова Я.Н. Влияние вращательных вибраций на течения и тепломассообмен при выращивании кристаллов германия вертикальным методом Бриджмена // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2008. – Т. 1, № 1. – С. 57-67. DOI
7. Любимова Т.П., Файзрахманова И.С. Численное моделирование влияния магнитного поля на процесс выращивания кристаллов вертикальным методом Бриджмена // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2008. – Т. 1, № 3. – С. 85-95. DOI
8. Бурнышева А.В., Любимов Д.В., Любимова Т.П. Спектр возмущений плоской поверхности раздела жидкостей в поле высокочастотных касательных вибраций в условиях невесомости // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2011. – Т. 4, № 3. – С. 21-31. DOI
9. Любимов Д.В., Любимова Т.П., Иванцов А.О. Влияние вибраций на гидродинамику расплава при выращивании кристаллов бесконтактным методом Бриджмена // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2011. – Т. 4, № 4. – С. 52-62. DOI
10. Колчанова Е.А., Любимов Д.В., Любимова Т.П. Влияние эффективной проницаемости среды на устойчивость двухслойной системы «однородная жидкость – пористая среда» в поле вибраций высокой частоты // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2012. – Т. 5, № 2. – С. 225-232. DOI
11. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Физматлит, 2003. – Т. 3. – 728 с.
12. Любимов Д.В., Любимова Т.П., Марышев Б.С. Влияние шума на возникновение конвекции в модулированном поле тяжести // МЖГ. – 2010. – № 6. – С. 30-37.
13. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1972. – 392 с.
14. Тарунин Е.Л. Вычислительный эксперимент в задаче свободной конвекции: учеб. пособие. – Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, 1990. – 228 с.
15. Бурдэ Г.И. О конечно-амплитудной конвекции, возникающей в модулированном поле тяжести // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1972. – № 6. – С. 124-134.
16. Бурдэ Г.И. Численное исследование конвекции, возникающей в модулированном поле внешних сил // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1970. – № 2. – С. 196-201.
17. Иванова А.А., Козлов В.Г. Вибрационная тепловая конвекция при непоступательных колебаниях полости // МЖГ. – 2003. – № 3. – С. 26-43.
18. Gershuni G.Z., Lyubimov D.V. Thermal vibrational convection. – N.Y.: Wiley, 1998. – 358 p.
19. Вайнберг А.А., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

Поступила в редакцию 26.06.12; опубликована в электронном виде 22.10.12

Сведения об авторах

Мелентьев Анатолий Борисович, инж., Пермский государственный национальный исследовательский университет (ПГНИУ), 614990, Пермь, ул. Букирева, д. 15; E-mail: a.b.melentyev@mail.ru

Тарунин Евгений Леонидович, дфмн, проф., ПГНИУ; E-mail: tarunin@psu.ru