DOI: 10.7242/1999-6691/2012.5.3.30
УДК 539.3

О РЕКОНСТРУКЦИИ НЕОДНОРОДНЫХ СВОЙСТВ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТЕЛ

А.О. Ватульян[1,2], В.В. Дударев[1,2]

[1]*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия*
[2]*Южный математический институт, Владикавказ, Россия*

Рассмотрена обратная задача реконструкции неоднородных законов изменения характеристик электроупругого тела. Представлена слабая постановка, на основе которой возможно построение операторных уравнений, связывающих искомые и заданные функции в обратной задаче. Подход проиллюстрирован на решении задачи реконструкции неоднородного модуля податливости для продольно поляризованного электроупругого стержня. Прямая задача исследования продольных колебаний неоднородного стержня сведена к уравнению Фредгольма второго рода. Обратная задача реконструкции переменной податливости изучена в рамках дополнительной информации об амплитудно-частотной характеристике свободного конца консольно защемленного стержня. Построен итерационный процесс, на каждом шаге которого поправки определяются из интегрального уравнения Фредгольма первого рода, причем его численное решение строится с использованием регуляризующего метода А.Н. Тихонова с автоматическим выбором параметра регуляризации. Представлены результаты вычислительных экспериментов по восстановлению монотонных и немонотонных законов изменения модуля податливости.

Ключевые слова: неоднородность, модуль податливости, электроупругость, стержень, обратная задача, некорректная задача

ON RECONSTRUCTION OF INHOMOGENEOUS PROPERTIES OF PIEZOELECTRIC SOLIDS

A.O. Vatulyan[1,2] and V.V. Dudarev[1,2]

[1]*Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia*
[2]*Southern Mathematical Institute, Vladikavkaz, Russia*

The problem of reconstruction of the inhomogeneous laws of electroelastic body characteristics is considered. The weak statement of the problem is presented, which makes it possible to derive operator equations for the inverse problem. The proposed approach is illustrated on an example problem of reconstruction of the inhomogeneous compliance module for a longitudinally polarized electroelastic rod. The solution of the direct problem of the longitudinal vibrations of the rod is reduced to a Fredholm equation of the second kind. The inverse problem is studied using additional information on the amplitude-frequency characteristic of the free end of a cantilevered rod. The iterative process is presented. At each step of the process, corrections are determined by the Fredholm integral equation of the first kind, and its numerical solution is constructed using a Tikhonov regularization method with automatic selection of the regularization parameter. The results of computational experiments on reconstruction of the monotonic and nonmonotonic laws of the compliance module changes are presented.

Key words: heterogeneity, compliance module, electroelasticity, rod, inverse problem, ill-posed problem

1. Введение

Развитие методов определения свойств исследуемых элементов конструкций — одно из важных направлений современной механики деформируемого твердого тела. Зачастую при моделировании считается, что материал однороден, и его свойства характеризуются набором физических постоянных. В то же время в некоторых разделах механики гипотеза однородности является неадекватной, и свойства исследуемого объекта зависят от координат. В частности, это присуще конструкциям из пьезоактивных материалов, свойства которых характеризуются набором функций. Вид этих функций устанавливается из экспериментов, а обработка экспериментальных данных требует привлечения аппарата коэффициентных обратных задач, что представляет собой достаточно сложную математическую проблему.

Эффективность и точность работы современного измерительного оборудования напрямую зависит от констант и переменных, входящих в определяющие уравнения модели [1], описывающей поведение материала основного функционального элемента того или иного устройства. В основе работы некоторых диагностических приборов и датчиков лежат принципы, базирующиеся на явлении прямого пьезоэффекта, и материал измерительного элемента ведет себя в соответствии с моделью классической линейной теории электроупругости [1, 2]. Наиболее распространенные функциональные элементы имеют вид простейших изделий (пластин, стержней, цилиндров) и изготовлены из пьезокерамики. Ставшее актуальным в последние годы создание пьезоэлементов с требуемыми свойствами является сложным технологическим процессом, моделирование которого требует решения обратных задач. В силу многоступенчатости технологических операций (переход через несколько температурных режимов, напыление, формовка и тому подобное) в конечном изделии практически всегда присутствуют отклонения от установленных норм, в частности, наблюдается неоднородность поляризации и упругих свойств. Знание реальных характеристик неоднородного пьезоэлемента позволяет оценить его функциональные свойства и возможность использования в конкретном приборе.

В настоящее время задача идентификации свойств неоднородных электроупругих материалов даже для стержневых элементов конструкций изучена недостаточно [3]. С другой стороны, существует ряд работ, посвященных решению аналогичной проблемы в рамках линейной теории упругости [4–6]. В этих работах сформулированы общие соотношения, позволяющие переходить к решению более простых задач, представлены способы формирования итерационных процессов, обсуждаются вопросы численной реализации и приводятся результаты вычислительных экспериментов.

Кроме того, имеется ряд исследований, в которых изучается вопрос об определении закона изменения пьезомодуля в зависимости от координаты [7, 8]. Так, например, в работах [3, 7, 8] рассмотрен ряд обратных задач для электроупругого стержня с неоднородной продольной поляризацией при постоянном модуле упругости. При этом реконструкция неизвестной функции производится на основе информации о токе в цепи. Отметим, что переменность коэффициентов дифференциальных операторов не дает возможности просто сформулировать операторные соотношения, связывающие заданные и искомые функции; задача реконструкции является существенно нелинейной, и для ее решения требуется осуществление некоторого итерационного процесса. Построение таких вычислительных схем основано на слабой постановке задач электроупругости и билинейности оператора электроупругости [9]. В то же время практически не исследованным остается вопрос об определении переменного модуля податливости для стержней из пьезоктивных материалов, которому и посвящена настоящая работа.

Решается задача установления закона изменения модуля податливости для электроупругого стержня. В качестве диагностического способа выбран метод акустического зондирования, базирующийся на анализе амплитудно-частотной характеристики части границы тела.

2. Слабая постановка задач исследования колебаний неоднородных электроупругих тел

Рассмотрим установившиеся с частотой ω колебания электроупругого тела объемом V с кусочно-гладкой границей $S = S_u \cup S_\sigma$, $S = S_\pm \cup S_H$. Запишем общие уравнения движения, определяющие соотношения и смешанные граничные условия [1]:

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0\,, \tag{1}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{k,l} + e_{kij}\varphi_{,k}\,, \tag{2}$$

$$D_{j,j} = 0\,, \tag{3}$$

$$D_i = e_{ikl} u_{k,l} - \varepsilon_{kl}\varphi_{,k}\,, \tag{4}$$

$$D_n|_{S_H} = 0\,, \qquad \varphi|_{S_\pm} = \pm\varphi_0\,, \tag{5}$$

$$u_i|_{S_u} = 0\,, \qquad \sigma_{ij} n_j|_{S_\sigma} = p_i\,, \tag{6}$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; u_i — компоненты вектора перемещения; C_{ijkl} — компоненты тензора упругих постоянных; ρ — плотность; e_{ikl} — компоненты тензора пьезоэлектрических постоянных; φ — потенциал электрического поля; D_i — компоненты вектора электрической индукции; ε_{kl} — компоненты тензора диэлектрических постоянных; $\pm\varphi_0$ — подведенная к электродам разность потенциалов; n_j — компоненты единичного вектора внешней нормали к границе S; p_i — компоненты активной нагрузки, приложенной к телу. Части поверхности S_+ и S_- электродированы, а часть S_H — неэлектродирована. Запятая в нижних индексах означает производную по соответствующей координате.

Сформулируем слабую постановку задачи. Умножим уравнения движения (1) и (3) на пробные функции ψ и v_i, удовлетворяющие главным граничным условиям $\psi|_{S_\pm} = \pm\varphi_0$, $v_i|_{S_u} = 0$, и оставим без изменения определяющие соотношения (2), (4). Далее проинтегрируем полученные выражения по объему V, а результат сложим. Применяя формулу Гаусса–Остроградского и используя граничные условия (5), (6), окончательно получим:

$$\int_V L\left(u_i, v_i, C_{ijkl}, e_{kij}, \varphi, \psi, \varepsilon_{ij}, \rho\right) dV = F\left(v_i\right), \tag{7}$$

где $L\left(u_i, v_i, C_{ijkl}, e_{kij}, \varphi, \psi, \varepsilon_{ij}, \rho\right) = C_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j} + e_{kij}\left(\varphi_{,k} v_{i,j} + \psi_{,k} u_{i,j}\right) - \varepsilon_{ij}\varphi_{,i}\psi_{,j} - \rho\omega^2 u_i v_i$ — трилинейная форма (линейная по каждому из аргументов: u_i, v_i, C_{ijkl}, e_{kij}, φ, ψ, ε_{ij}, ρ); $F\left(v_i\right) = \int_{S_\sigma} p_i v_i ds + \int_{S_+} D_n\varphi_0 ds - \int_{S_-} D_n\varphi_0 ds$ — линейный функционал.

Отметим, что обратную задачу нахождения неизвестных переменных характеристик электроупругого тела можно рассматривать как задачу определения входящих в исходную краевую задачу коэффициентов в зависимости от заданной дополнительной и априорной информации о них (положительность, ограниченность, монотонность и тому подобное). Обратимся к одной из возможных постановок обратной задачи. Пусть граничные значения полевых характеристик представляются как функции частоты колебаний. При этом не накладывается ограничений на область, в которой они известны, например, смещения могут быть заданы или в области приложения нагрузки $u_i(x,\omega)|_{S_\sigma} = f_i(x,\omega)$, $\omega \in [\omega^-,\omega^+]$, или вне ее. Под решением такой обратной задачи понимается множество элементов (u_i и искомые коэффициенты — модули упругости, пьезоэлектрические постоянные и так далее), удовлетворяющих равенству (7) для любых пробных функций ψ и v_i. Следует отметить, что представленная задача является нелинейной и некорректной, что вызывало бы существенные затруднения при построении ее решения, если бы не трилинейность формы L. Свойство трилинейности позволяет значительно упростить процедуру решения путем построения последовательности слабых постановок и интегральных уравнений первого рода с гладкими ядрами, которые дают возможность реализовать итерационную процедуру решения обратной задачи. Далее эта процедура будет более подробно описана на примере задачи для стержня.

3. Постановка и решение прямой задачи для стержня

В рамках представленной выше слабой трактовки задачи электроупругости рассмотрим колебания электроупругого стержня длиной $2l$, у которого, вследствие влияния технологических операций, модуль податливости s не постоянен, а является функцией продольной координаты. Запишем уравнения движения, граничные условия и определяющие соотношения, отвечающие классической теории электроупругости [3]:

$$\sigma' + \rho\omega^2 u = 0, \tag{8}$$

$$u' = s\sigma - d\varphi', \tag{9}$$

$$D' = 0, \tag{10}$$

$$D = d\sigma - э\varphi', \tag{11}$$

$$\sigma(l) = p, \tag{12}$$

$$u(-l) = 0, \tag{13}$$

$$\varphi(\pm l) = 0, \tag{14}$$

где σ — компонента тензора напряжений; u — компонента продольного перемещения вдоль оси стержня x; d — пьезомодуль; φ — потенциал электрического поля; D — компонента вектора электрической индукции; $э$ — диэлектрическая постоянная. Граничные условия (12)–(14) соответствуют задаче колебаний электроупругого стержня, консольно защемленного на левом конце, с коротко замкнутыми электродами. Продольные колебания вызываются периодической во времени и имеющей амплитуду p нагрузкой, действующей на правом конце. Величины ρ, d, $э$ — постоянные, считающиеся известными. Символ «$'$» означает дифференцирование по продольной координате x.

Поскольку модуль податливости принят в виде некоторой функции переменной x, то решение прямой задачи построения смещения $u(x)$, как и в случае упругого стержня [5], сведем к решению интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с непрерывным ядром. Для простоты вывода этого уравнения и наглядности рассуждений обезразмерим задачу путем введения новой переменной $\xi \in [0,1]$, такой, что $x = l(2\xi - 1) \in [-l,l]$, и следующих обозначений: $s = s_0 f(\xi)$, $k_0^2 = d^2/(s_0\, э)$, $k^2 = s_0 k_0^2 \rho\omega^2 4l^2$, где $f(\xi)$ — безразмерная функция, описывающая закон изменения модуля податливости, k_0^2 — параметр, характеризующий коэффициент электромеханической связи [3], k — спектральный параметр, прямо пропорциональный частоте колебаний ω.

Подставим в (9) интегральные выражения для функций σ и φ, полученные из уравнения движения (8) и соотношений (10), (11); при этом необходимые константы интегрирования могут быть определены из граничных условий (12), (14) или выражены через функцию u. После выполнения подстановки проинтегрируем соотношение (9), приведем подобные члены и учтем введенные обозначения:

$$u(\xi) = \int_0^\xi \left(k_0^{-2} f(s) - 1\right) \int_s^1 k^2 u(\chi)\, d\chi\, ds + \int_0^\xi 2 s_0 p f(s)\, ds + \xi \int_0^1 \int_s^1 k^2 u(\chi)\, d\chi\, ds .$$

Изменив порядок интегрирования в двойных интегралах, окончательно получим искомое уравнение Фредгольма второго рода относительно неизвестной функции $u(\xi)$:

$$u(\xi)=\int_0^1 u(\chi)K(\chi,\xi)d\chi+b(\xi), \tag{15}$$

где $K(\chi,\xi)=k^2\left(\int_0^{\min(\chi,\xi)}\left(k_0^{-2}f(s)-1\right)ds+\xi\chi\right)$ — ядро интегрального оператора, представляющее собой непрерывную функцию: $b(\xi)=2s_0 p\int_0^{\xi}f(s)ds$.

Проверка правильности вывода уравнения (15) проведена для однородного случая при $f(\xi)=1$ путем подстановки аналитического решения исходной задачи колебаний электроупругого стержня $u(\xi)=B\sin\kappa\xi$, $B=-2s_0 p\left(k_0^{-2}-1\right)/\left(\sin\kappa-\kappa k_0^{-2}\cos\kappa\right)$, $\kappa^2=\left(k_0^{-2}-1\right)k^2$. В результате было получено тождественное соотношение.

Решение уравнения (15) находилось далее численно на основе метода коллокаций с использованием квадратурной формулы трапеций. Точность составленной вычислительной схемы проверялась путем сравнением с аналитическим решением исходной задачи (8)–(14) также при $f(\xi)=1$. При этом в частотном диапазоне, не содержащем резонансных частот, относительное расхождение сопоставляемых решений составило менее $0{,}05\%$ при 40 узловых неизвестных.

4. Обратная задача для стержня

Обратная к рассмотренной выше задача заключается в отыскании закона изменения модуля податливости по некоторой дополнительной информации и относится к классу коэффициентных обратных задач [4]. В качестве дополнительной информации выступают данные об амплитудно-частотной характеристике $w(\omega)$ нагружаемого конца стержня.

Из вида общих соотношений и уравнений движения (8)–(11) следует, что сформулированная обратная задача является существенно нелинейной. Одним из наиболее эффективных подходов к отысканию решения подобных задач является метод построения итерационного процесса, основанный на процедуре линеаризации [3, 4].

Слабая постановка задачи легко получается из общего соотношения (7):

$$\int_{-l}^{l}L(c,d_1,d_2,\rho,u,v,\varphi,\psi)dx=F, \tag{16}$$

где $L=cu'v'+d_1(u'\psi'+v'\varphi')+d_2\varphi'\psi'-\rho\omega^2uv$, $F=v(l)p$, $d_1=cd$, $d_2=cd^2-э$, $c=1/s$, $э=\varepsilon+cd^2$. Следует отметить, что форма L имеет симметричную структуру относительно переменных $(u,\varphi)\leftrightarrow(v,\psi)$. Применяя обычные преобразования, проведем общую линеаризацию (16), положив $c=c_0+\varepsilon c_1$, $u=u_0+\varepsilon u_1$, $\varphi=\varphi_0+\varepsilon\varphi_1$, $d_1=d_{10}+\varepsilon d_{11}$, $d_2=d_{20}+\varepsilon d_{21}$, где ε — формальный параметр. При условиях $v=u_0$, $\psi=\varphi_0$ окончательно получим:

$$\int_{-l}^{l}\left(c_1u_0'^2+2d_{11}u_0'\varphi_0'+d_{21}\varphi_0'^2\right)dx+p\left(w(\omega)-u_0(1,\omega)\right)=0, \qquad \omega\in\left[\omega^-,\omega^+\right]. \tag{17}$$

Используя уравнение (17), можно построить итерационный процесс для определения поправки неизвестной функции по отношению к некоторому начальному приближению. Отметим, что из одного операторного уравнения (17) невозможно однозначно найти сразу все неизвестные поправки (c_1, d_{11}, d_{21}). При восстановлении нескольких функций следует составить соответствующее количество таких соотношений, согласующихся с различными видами действующей нагрузки и областью ее приложения; при этом в операторных уравнениях изменятся ядра интегральных операторов и правые части.

Поскольку в рамках представленной проблемы требуется установить закон изменения только модуля податливости, а параметры d, ρ, $э$ считаются постоянными, то уравнение (17) преобразуем к виду:

$$\int_{-l}^{l} s_1 \sigma_0^2 dx = p\left(w(\omega) - u(1,\omega)\right), \qquad \omega \in \left[\omega^-, \omega^+\right],$$

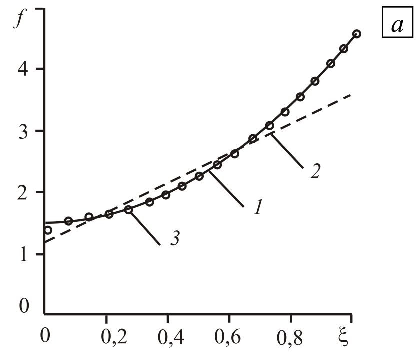
или в безразмерных обозначениях

$$\int_{0\xi}^{1} f_1(\xi) \left(k_0^{-2} k^2 \int^{1} u_0 d\xi + 2 s_0 p \right)^2 d\xi = 2 s_0 p \left(w(\kappa) - u(1,\kappa) \right), \qquad \kappa \in [\kappa^-, \kappa^+]. \tag{18}$$

Уравнение (18) есть интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода относительно функции поправки $f_1(\xi)$ к закону изменения модуля податливости $f(\xi)$. При обращении этого оператора необходимо использовать регуляризующую процедуру [10]. Отметим также, что проблема выбора частотного диапазона $\kappa \in \left[\kappa^-, \kappa^+\right]$ также является важной задачей с точки зрения организации наиболее эффективного проведения реконструкции закона.

5. Численные результаты

Решение обратной задачи восстановления закона изменения модуля податливости $f(\xi)$ отыскивалось численно в ходе реализации итерационного процесса. Следует отметить, что организация итерационного процесса требует задания начального приближения. В настоящей работе начальное приближение $f_0(\xi)$ определялось из условия минимума функционала невязки $J = \int_{\kappa^-}^{\kappa^+} \left(u(1,\kappa) - w(\kappa) \right)^2 d\kappa$ в классе линейных функций на некотором компакте, построенном исходя из априорной информации об ограниченности и положительности восстанавливаемой функции $f(\xi)$. Далее, на каждом шаге итерационного процесса производилась поправка к предыдущему приближению, которая находилась как решение интегрального уравнения (18). Отметим, что при численной реализации решения (18) применялся метод регуляризации А.Н. Тихонова с автоматическим выбором параметра регуляризации [11], а частотный диапазон выбирался между первой и второй резонансными частотами.



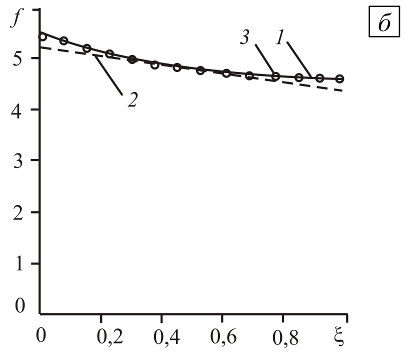


Рис. 1. Реконструкция монотонных законов изменения функции $f(\xi)$: $f(\xi) = 1{,}5 + 3\xi^2$, $f_0(\xi) = 2{,}4\xi + 1{,}2$, $k \in [0{,}68;1{,}53]$, 5 итераций (*а*); $f(\xi) = 4{,}5 + e^{-2{,}5\xi}$, $f_0(\xi) = 5{,}2 - 0{,}83\xi$, $k \in [0{,}45;1{,}00]$, 6 итераций (*б*); график исходной функции (кривая *1*), начальное приближение $f_0(\xi)$ (*2*), восстановленная функция $f(\xi)$ (точки *3*)

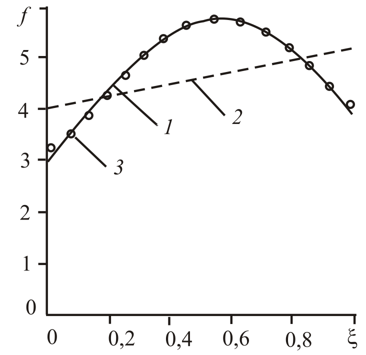


Рис. 2. Реконструкция немонотонного закона: $f(\xi) = 4{,}5 + e^{-2{,}5\xi}$, $f_0(\xi) = \xi + 3{,}5$, $k \in [0{,}47;1{,}13]$, 10 итераций; график исходной функции (кривая *1*), начальное приближение $f_0(\xi)$ (*2*), восстановленная функция $f(\xi)$ (точки*3*)

Вычислительные эксперименты показали, что наиболее точно восстанавливаются монотонные функции; существенно немонотонные зависимости реконструируются менее эффективно. Об этом свидетельствуют графики, приведенные на рисунках 1 и 2. Так, реконструкция различных законов изменения функции $f(\xi)$ для монотонных законов имеет погрешность восстановления, не превышающую 2–3 %, для немонотонных — 5–7 %. Дополнительная информация об амплитудно-частотных характеристиках $w(k)$ для конечного числа частот из отрезка $\kappa \in \left[\kappa^-, \kappa^+\right]$ считалась заданной без погрешности. Во всех представленных экспериментах измерения производились для пяти частот внутри выбранного диапазона, параметр $k_0^2 = 4$.

6. Заключение

Для смешанных граничных условий представлена слабая постановка задачи исследования колебаний электроупругого тела, на основе которой достаточно просто осуществляется построение операторных уравнений для нахождения поправок в итерационных процессах при решении коэффициентных обратных задач. Путем сведения к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода решена прямая задача продольных колебаний консольно защемленного неоднородного электроупругого стержня под действием силы, приложенной к свободному концу. Для этого же стержня сформулирована обратная задача о реконструкции неоднородного закона изменения модуля податливости. В качестве априорной информации использованы свойства ограниченности и положительности восстанавливаемой характеристики, а в качестве дополнительной информации — данные об амплитудно-частотной характеристике нагружаемого конца стрежня для счетного числа частот. Отыскание решения этой задачи реализовано численно в рамках итерационного процесса. Необходимое соотношение для вычисления поправок (интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода) построено исходя из сформулированной общей слабой постановки задачи исследования колебаний электроупругого тела. Проведенные численные эксперименты по реконструкции показали достаточную эффективность созданной вычислительной схемы. Наиболее успешная реконструкция наблюдалась в частотных диапазонах, находящихся между первой и второй резонансными частотами.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 10-01-00194-а), Южного математического института ВНЦ РАН и ПрРСО-А (г. Владикавказ) и в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (госконтракт № П596).

Литература

1. *Партон В.З., Кудрявцев Б.А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – М.: Наука, 1988. – 472 с.
2. *Домаркас В.И., Кажис Р.И.* Контрольно-измерительные пьезоэлектрические преобразователи. – Вильнюс: Минтис, 1975. – 258 с.
3. *Ватульян А.О., Соловьев А.Н.* Прямые и обратные задачи для однородных и неоднородных упругих и электроупругих тел. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2008. – 176 с.
4. *Ватульян А.О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. – М.: Физматлит, 2007. – 223 с.
5. *Бочарова О.В., Ватульян А.О.* О реконструкции плотности и модуля Юнга для неоднородного стержня // Акустический журнал. – 2009. – Т. 55, № 3. – С. 275-282.
6. *Ватульян А.О.* К теории обратных задач в линейной механике деформируемого тела // ПММ. – 2010. – Т. 74, № 6. – С. 909-916.
7. *Ватульян А.О. Домброва О.Б., Жиров В.Е.* Обратные задачи для неоднородно поляризованных пьезоэлектрических стержней // ПММ. – 2007. – Т. 71, № 1. – С. 93-101.
8. *Ватульян А.О. Домброва О.Б., Жиров В.Е.* К определению неоднородной поляризации для электроупругого стержня // Изв. высших учебных заведений, Сев.-Кавк. регион. – 2002. – № 4. – С. 7-9.
9. *Ватульян А.О.* Об идентификации неоднородных свойств в механике связанных полей // Актуальные проблемы механики сплошных сред: Сб. науч. тр. межд. конф., Армения, Дилижан, 4-8 октября 2010. – Т. 1. – С. 155-157.
10. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Итеративные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1989. – 128 с.
11. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 284 с.

Поступила в редакцию 17.10.11; опубликована в электронном виде 22.10.12

Сведения об авторах

Ватульян Александр Ованесович, дфмн, проф., зав.каф., Южный федеральный университет (ЮФУ), 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8а; E-mail: vatulyan@math.rsu.ru

Дударев Владимир Владимирович, мнс., Южный математический институт (ЮМИ) ВНЦ РАН и ПРСО-А, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, д. 22; E-mail: dudarev_vv@mail.ru