

DOI: 10.7242/1999-6691/2012.5.3.29  
УДК 519.6:532.517+621.7

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПОВЕРХНОСТНО-АКТИВНОГО ВЕЩЕСТВА НА КОНВЕКТИВНЫЙ МАССОПЕРЕНОС ПРИ ПЛАВЛЕНИИ ПОВЕРХНОСТИ МЕТАЛЛА ЛАЗЕРНЫМ ИМПУЛЬСОМ

В.Н. Попов

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия*

Предложена математическая модель процесса легирования поверхности металла с помощью импульсного лазерного излучения, в которой учитывается зависимость температурного градиента поверхностного натяжения от концентрации поверхностно-активного вещества в расплаве и температуры разогрева. Проведено численное моделирование, результаты которого выявили развитие многовихревых течений, способствующих проникновению легирующего материала в глубину расплава.

*Ключевые слова:* легирование металла, лазерное излучение, конвективный тепло-массообмен, численное моделирование

## NUMERICAL STUDY OF THE EFFECT OF A SURFACE ACTIVE AGENT ON CONVECTIVE MASS TRANSFER IN LASER SURFACE MELTING OF METAL

V.N. Popov

*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russia*

A mathematical model is proposed to describe the process of surface alloying of metals by laser pulses. The model takes into account the dependence of the surface tension gradient induced by temperature on the concentration of a surface active agent in the melt and on the heating temperature. Numerical simulation reveals the probability of occurrence of multi-vortex flows that promote the penetration of the alloying material into the metal.

*Key words:* metal alloying, laser radiation, convective heat and mass transfer, numerical simulation

### 1. Введение

Лазерное излучение находит широкое применение при модификации поверхностей деталей для улучшения их эксплуатационных свойств, таких как твердость, термо- и износостойкость, антифрикционность, коррозионностойкость и тому подобных. Легирующие элементы либо вводятся в расплав газовым потоком, либо предварительно наносятся на поверхность материала в виде покрытия или слоя порошка и проникают в него при подплавлении. Процессы, происходящие в поверхностном слое металлов при воздействии лазерного излучения, изучаются довольно продолжительное время [1–7]. Известно, что одним из главных факторов, определяющих качество легирования с применением лазерного излучения, является термокапиллярная конвекция. Наряду с этим, в последние годы появились работы, обсуждающие влияние присутствующих в расплаве примесей поверхностно-активных веществ (ПАВ) на температурный градиент поверхностного натяжения [7–11], который определяет структуру течений в образующейся жидкой лунке.

В настоящей работе с использованием численного моделирования исследуется распределение легирующего материала, проникающего в металлическую подложку с ее поверхности при импульсном лазерном воздействии. Считается, что процесс имеет нестационарный характер и охватывает разогрев металла, его плавление, тепло- и массообмен в расплаве и далее, после окончания импульса, затвердевание. В качестве подложки выступает сплав железа с углеродом (0,42 % по массе), в качестве легирующего материала — сера. Эта система выбрана ввиду наличия у входящих в нее материалов известных значений теплофизических параметров и физических констант [11, 12], необходимых для реализации модели.

### 2. Математическая модель

Рассматривается физическая задача воздействия лазерным лучом радиуса  $r_0$ , направленным перпендикулярно, на поверхность металлической подложки, температура которой ниже температуры кристаллизации. Импульс имеет продолжительность  $t_H$ , а плотность его интенсивности описывается распределением Гаусса. Поверхность подложки покрыта слоем легирующего материала. Под воздействием лазерной энергии происходит разогрев металла и его плавление. В образовавшейся и увеличивающейся со временем жидкой лунке развиваются два вида конвекции: капиллярная и термогравитационная. За счет формирующихся течений легирующий материал, взаимодействуя с расплавом, проникает

с его поверхности в глубину проплавленной лунки. Для расплава используются условия прилипания на твердом фронте кристаллизации. Предполагается, что при применяемых режимах нагрева небольшие величины конвективных скоростей обуславливают плоскую форму свободной поверхности жидкости [13]. После завершения импульса за счет теплообмена с окружающей средой и отвода тепла в неразогретый материал подложки расплав остывает и затвердевает. Границы  $r_g$ ,  $z_g$  расчетной области выбраны таким образом, что их положение не оказывает влияния на исследуемые процессы. Фазовый переход происходит в некотором температурном интервале  $\Delta T$  вблизи температуры затвердевания материала подложки  $T_s$  (здесь и далее температуры  $T$  измеряются по шкале Кельвина). Считается, что теплофизические характеристики твердой и жидкой сред одинаковы.

Запишем математическую формулировку рассматриваемой задачи в безразмерных величинах. Распределение температурного поля в твердой и жидкой фазах материала подложки описывается уравнением, имеющим в цилиндрической системе координат следующий вид:

$$c_{ef} \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial r} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = \frac{1}{Pr} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right], \quad 0 \leq r \leq r_g, \quad -z_g \leq z \leq 0, \quad (1)$$

Здесь  $\theta$  — температура;  $t$  — время;  $Pr = \nu/a$  — число Прандтля, где  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $a$  — температуропроводность;  $u, w$  — компоненты вектора скорости расплавленного металла в радиальном ( $r$ ) и вертикальном ( $z$ ) направлениях, соответственно (в твердом металле  $u \equiv 0$ ,  $w \equiv 0$ ). Переход к безразмерным параметрам осуществлен с помощью размера  $r_0$ , скорости  $v_0 = \nu/r_0$ , времени  $t_0 = r_0^2/\nu$  и температуры  $T_s$ :  $r = r/r_0$ ,  $z = z/r_0$ ,  $u = u/v_0$ ,  $w = w/v_0$ ,  $t = t/t_0$ ,  $\theta = T/T_s$ . Эффективная теплоемкость, учитывающая скрытую теплоту фазового перехода  $k$ , описывается соотношением  $c_{ef} = 1 + \delta(\theta)k/(T_s c_p)$ , в котором  $\delta(\theta) = 1$  (при  $\theta \in [1 - \Delta\theta/2, 1 + \Delta\theta/2]$ ) или  $\delta(\theta) = 0$  (если  $\theta \notin [1 - \Delta\theta/2, 1 + \Delta\theta/2]$ ),  $\Delta\theta$  — температурный интервал «размазывания» фазовой границы,  $c_p$  — удельная теплоемкость.

Запишем следующие граничные условия для уравнения (1):

– на оси симметрии

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = 0, \quad r = 0, \quad -z_g \leq z \leq 0; \quad (2)$$

– на внешней боковой границе расчетной области

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = 0, \quad r = r_g, \quad -z_g \leq z \leq 0; \quad (3)$$

– на верхней границе ( $z = 0$ ) при воздействии импульса  $t \leq t_H$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = q(r), \quad 0 \leq r \leq 1; \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = \alpha(\theta_c - \theta), \quad 1 < r \leq r_g \quad (4a)$$

и после завершения импульса ( $t > t_H$ )

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \alpha(\theta_c - \theta), \quad 0 \leq r \leq r_g; \quad (4b)$$

– на нижней границе расчетной области

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0, \quad 0 \leq r \leq r_g, \quad z = -z_g. \quad (5)$$

Здесь  $q(r) = q_0 \exp(-2r^2) r_0 / (\lambda T_s)$  — плотность мощности теплового источника (в безразмерном виде);  $\alpha = \alpha_0 r_0 / \lambda$ ;  $\theta_c = T_c / T_s$ . При этом  $q_0$  — максимальная плотность мощности потока;

$\alpha_0 = \varepsilon\sigma_0(T^2 + T_c^2)(T + T_c)$ ;  $\sigma_0$  — постоянная Стефана–Больцмана;  $\varepsilon$ ,  $\lambda$  — степень черноты и теплопроводность материала подложки;  $T_c$  — температуры окружающей среды.

При плавлении металла в области температур  $\theta > 1$  с границей «расплав – твердая фаза»  $f(r, z, t)$  течение в жидкости описывается уравнениями Навье–Стокса в приближении Буссинеска

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial w}{\partial z^2} + \text{Gr}(\theta - 1), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial ru}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $p$  — давление ( $p = p/p_0$ ,  $p_0 = \rho v_0^2$ ,  $\rho$  — плотность расплава);  $\text{Gr} = \beta_p g r_0^3 T_s / \nu^2$  — число Грасгофа ( $g$  — ускорение свободного падения,  $\beta_p$  — коэффициент объемного теплового расширения).

Граничные условия для уравнений (6) примем следующие:

– на поверхности  $f(r, z, t)$

$$u = 0, \quad w = 0; \quad (7)$$

– на оси симметрии  $r = 0$ ,  $-z_f \leq z \leq 0$  ( $z_f(t)$  — координата границы фазового перехода при  $r = 0$ )

$$u = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0; \quad (8)$$

– на поверхности жидкости  $z = 0$ ,  $0 \leq r < r_f$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\text{Mn}}{\text{Pr}} \frac{\partial \theta}{\partial r}, \quad w = 0, \quad (9)$$

где  $r_f = r_f(t)$  — радиус свободной поверхности лунки расплавленного металла;

$\text{Mn} = [(\partial\sigma/\partial T)T_s r_0] / (\rho\nu a)$  — число Марангони;  $\sigma$  — поверхностное натяжение.

Согласно физическим свойствам большинства металлов в расплавленном состоянии влияние концентрации разного рода примесей на изменение поверхностного натяжения при численном моделировании обычно не учитывается [11]. Однако в ряде случаев при взаимодействии с расплавом поверхностно-активных веществ существует зависимость параметра  $\partial\sigma/\partial T$  от изменения содержания примеси [10]. Так, для некоторых расплавов выражение, описывающее поверхностное натяжение, имеет вид:

$$\sigma = \sigma_0 - k_\sigma (T - T_s) - TR\Gamma_s \ln \left\{ 1 + S_i \exp \left[ -\Delta H^0 / (RT) \right] C \right\},$$

где  $\sigma_0$  — поверхностное натяжение в чистом металле в точке плавления;  $k_\sigma = -\partial\sigma_0/\partial T$  — температурный градиент поверхностного натяжения для чистого металла;  $R$  — универсальная газовая постоянная;  $C$  — концентрация примеси на поверхности расплава;  $S_i$  — константа, соответствующая энтропии сегрегации;  $\Delta H^0$  — стандартная теплота адсорбции;  $\Gamma_s$  — избыток примеси в поверхностном слое, приходящийся на единицу поверхности. Тогда

$$\frac{\partial\sigma}{\partial T} = -k_\sigma - R\Gamma_s \ln(1 + KC) - \frac{KC}{1 + KC} \frac{\Gamma_s \Delta H^0}{T}, \quad K = S_i \exp \left[ -\Delta H^0 / (RT) \right]. \quad (10)$$

Из (10) следует, что при  $\Delta H^0 < 0$  выражение  $\partial\sigma/\partial T$ , в зависимости от соотношения величин  $T$  и  $C$ , может принимать значения не только меньше, но и больше нуля.

Распределение безразмерной концентрации  $C$  легирующего вещества, которое вовлекается в жидкую лунку течением расплава с его свободной поверхности, описывается уравнением конвективной диффузии.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial r} + w \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{1}{Sc} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial C}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right], \quad (11)$$

где  $Sc = \nu/D$  — число Шмидта;  $D$  — коэффициент диффузии;  $C = C/C_0$ ,  $C_0$  — количество легирующего вещества на поверхности подложки.

Граничные условия для (11) поставим следующие:

– на поверхности «расплав – твердая фаза»  $f(r, z, t)$ , где  $\mathbf{n}$  — нормаль к поверхности,

$$\frac{1}{Sc} \frac{\partial C}{\partial \mathbf{n}} = 0; \quad (12)$$

– на оси симметрии  $r = 0$ ,  $-z_f \leq z \leq 0$

$$\frac{1}{Sc} \frac{\partial C}{\partial r} = 0; \quad (13)$$

– на зеркале расплавленного металла  $z = 0$ ,  $0 \leq r < r_f$

$$\frac{1}{Sc} \frac{\partial C}{\partial z} = Bi_D (1 - C), \quad (14)$$

где  $Bi_D$  отражает скорость проникновения легирующего вещества в расплав. Отметим, что результатом решения диффузионной задачи может быть только качественная картина распределения легирующей добавки, так как в постановке задачи не рассматривается механизм её проникновения в расплав с поверхности подложки.

Начальные условия для уравнения теплопереноса (1) имеют вид:

$$\theta = \theta_0. \quad (15)$$

Предполагается, что в только что расплавленном металле

$$u = 0, \quad w = 0, \quad C = 0. \quad (16)$$

### 3. Алгоритм решения задачи

При реализации модели (1)–(16), которая включает в себя уравнения Навье–Стокса и конвективного тепло- и массопереноса, применялся конечно-разностный алгоритм. Дискретизация расчетной области на  $I \times K$  ячеек осуществлялась при помощи пространственной сетки вида:  $r_i = \Delta x \cdot i$ ,  $i = 0, \dots, I$ ;  $z_k = \Delta z \cdot k$ ,  $k = 0, \dots, K$ ;  $\Delta r = r_g/I$ ,  $\Delta z = z_g/K$ . Для временной переменной использовалась равномерная сетка с шагом  $\tau$ . Разностные уравнения строились посредством неявной аппроксимации балансных соотношений, получаемых интегрированием уравнений (1), (6), (11) с учетом соответствующих граничных условий. При аппроксимации (6) в области расплавленного материала, по аналогии с методами типа MAC и SIMPLE [14, 15], составляющие скорости  $u$ ,  $w$  определялись в серединах боковых граней ячеек, а давление  $p$  — в центрах ячеек. Распределение температуры и концентрации растворенного вещества описывалось их значениями в узлах сетки.

Алгоритм включал следующий порядок действий. Первоначально вычислялось температурное поле в подложке под влиянием энергии лазерного луча. После появления жидкой лунки на каждом временном шаге устанавливалась граница фазового перехода. Подстановка найденных значений температуры в уравнения количества движения делала возможным определение составляющих поля скоростей. Далее, с использованием метода искусственной сжимаемости [16] рассчитывалось давление. Производилось несколько итераций для согласования друг с другом найденных распределения давления и скоростей до выполнения неравенства  $\max |\nabla \cdot \mathbf{u}| \leq \Delta$ , где  $\Delta$  — заданное малое число. На последнем этапе подсчитывалось распределение легирующей примеси в расплаве. Решение алгебраических систем, получаемых при аппроксимации уравнений движения и теплопереноса, осуществлялось итерационным методом блочной последовательной верхней релаксации [17].

После завершения лазерного импульса решение задачи продолжалось до момента полного затвердевания материала подложки. Конвективное перераспределение примеси происходило только в расплаве, а в затвердевшей области фиксировались последние вычисленные значения.

#### 4. Результаты численных экспериментов

Численное исследование процесса проводилось при следующих параметрах:  $r_0 = 0,001$  м,  $z_g = 0,0006$  м,  $r_g = 0,0015$  м;  $t_H = 0,0037$  с;  $T_c = 300$  К;  $T_0 = 300$  К;  $\Delta T = 10$  К;  $q_0 = 4 \cdot 10^8$  Вт/м<sup>2</sup>. Теплофизические свойства сплава железа:  $\rho = 7065$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_p = 787$  Дж/(кг·К),  $\lambda = 27$  Вт/(м·К),  $\kappa = 2,77 \cdot 10^5$  Дж/кг,  $T_s = 1775$  К,  $\nu = 8,5 \cdot 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/с,  $k_g = 4,3 \cdot 10^{-4}$  Н/(м·К),  $\beta_p = 1,18 \cdot 10^{-4}$  1/К,  $D = 2,5 \cdot 10^{-9}$  м<sup>2</sup>/с,  $\varepsilon = 0,5$ ,  $\Gamma_s = 1,3 \cdot 10^{-8}$  моль/м<sup>2</sup>,  $\Delta H^0 = -1,88 \cdot 10^8$  Дж/моль,  $R = 8314,3$  Дж/(моль·К),  $S_l = 3,18 \cdot 10^{-3}$  [10–12].

Безразмерные параметры, используемые в расчетах:  $Pr = 0,175$ ,  $Gr = 2,848 \cdot 10^3$ ,  $Mn_0 = 2,62 \cdot 10^4$  (для чистого металла),  $\alpha = 7 \cdot 10^{-3}$ ,  $Sc = 340$ ,  $Bi_D = 0,065$ ,  $\Delta = 10^{-4}$ . Вычисления проводились на пространственных сетках с количеством ячеек  $I \times K$  от  $120 \times 150$  до  $240 \times 300$  (различие получаемых результатов не превышало 2%). Значение временного шага  $\tau = 10^{-4}$  выбрано из условий устойчивости численного счета и минимизации количества итераций.

Далее на рисунках представлены варианты решений задачи, полученные при одинаковых параметрах расчета для постоянного и меняющегося температурного градиента поверхностного натяжения.

В случае постоянного значения  $\partial\sigma/\partial T$  (Рис. 1) установлено, что, начиная с момента подплавления подложки, в области максимального воздействия теплового источника в расплаве вблизи свободной поверхности развивается расходящееся от центра течение, которое формирует интенсивный нисходящий поток у границы фазового перехода. В центральной части лунки образуется восходящее движение жидкости. По мере прогрева подложки размер лунки увеличивается, но её форма и структура течений сохраняются. Рис. 1, а отображает поле скоростей в момент завершения лазерного импульса. Здесь и далее стрелки на рисунке показывают направление, а их длина характеризует интенсивность потока. Существующие течения приводят к тому, что легирующая добавка не проникает в расплав глубже 5 мкм в центральной области лунки, и только часть материала опускается с помощью нисходящего потока на глубину около 20 мкм вдоль фазовой границы (Рис. 1, б). После отключения источника энергии температурные градиенты в жидкости уменьшаются, интенсивность конвекции снижается, расплав быстро затвердевает (0,4 мс), чему способствует низкая начальная температура подложки. За время кристаллизации распределение примеси существенно не меняется.

Рисунок 2 иллюстрирует результаты, полученные при меняющемся в зависимости от разогрева расплава и концентрации примеси температурном градиенте поверхностного натяжения. Расчеты показали, что с момента подплавления подложки под влиянием энергии лазерного луча, первоначально вблизи свободной поверхности, возникает расходящееся течение. Рост концентрации примеси ПАВ приводит к изменению температурного градиента поверхностного натяжения, вследствие чего формируется течение, направленное

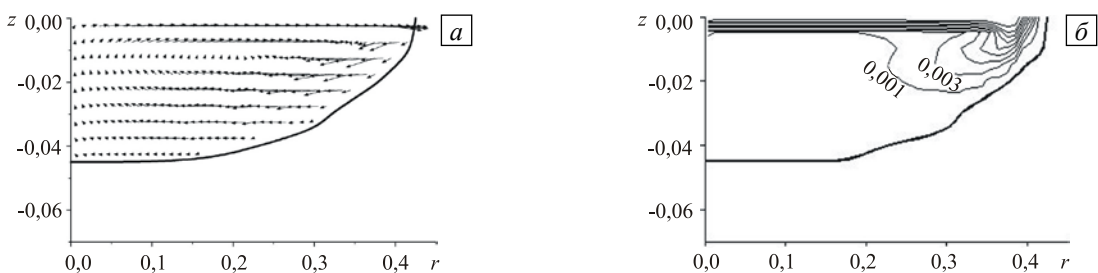


Рис. 1. Поле скоростей (а) и изоконцентраты (б) при постоянном температурном градиенте поверхностного натяжения в отсутствие в расплаве легирующей добавки (ПАВ)

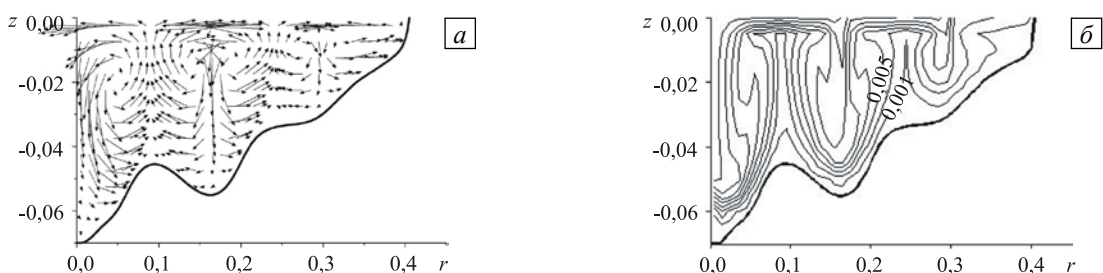
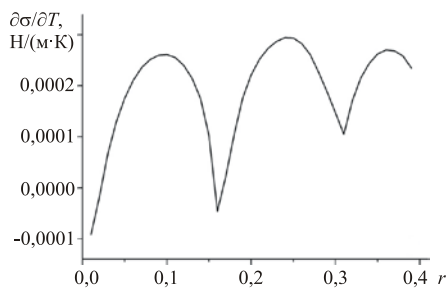


Рис. 2. Поле скоростей (а) и изоконцентраты (б) в расплаве при наличии ПАВ



**Рис. 3.** Температурный градиент поверхностного натяжения при наличии в расплаве ПАВ

к центру системы. Увлекаемая этим потоком легирующая добавка переносится в центральной части лунки с поверхности вглубь расплава. К моменту прекращения импульса вдоль свободной поверхности жидкости имеет место существенная немонотонность параметра  $\partial\sigma/\partial T$  (Рис. 3), что приводит к возникновению пяти тороидальных вихрей (Рис. 2, а). Такая структура течения способствует переносу тепла вглубь расплава, к границе фазового перехода, существенному изменению формы границы, а также распространению легирующей добавки во всем объеме лунки (Рис. 2, б). После прекращения импульса в течение времени затвердевания металла распределение примеси существенно не меняется.

## 5. Заключение

В результате численного моделирования выявлено, что взаимодействие ПАВ с жидким металлом приводит к формированию многовихревой структуры течений, способствующей распределению примеси в расплаве. На основании этого можно сделать вывод, что поверхностно-активные вещества, являясь компонентами расплава, способны существенно влиять на процессы легирования.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00575-а) и Комплексного интеграционного проекта СО, УрО, ДВО РАН «Численно-аналитические исследования новых моделей задач математической физики».

## Литература

1. Веденов А.А., Гладуш Г.Г. Физические процессы при лазерной обработке материалов. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 208 с.
2. He X., Fuerschbach P.W., DebRoy T. Heat transfer and fluid flow during laser spot welding of 304 stainless steel // J. Phys. D: Appl. Phys. – 2003. – V. 36. – P. 1388-1398. DOI
3. Uglov A.A., Smurov I.Yu., Tagirov K.I., Guskov A.G. Simulation of unsteady-state thermocapillary mass transfer for laser doping of metals // Int. J. Heat Mass. Tran. – 1992. – V. 35, N. 4. – P. 783-793. DOI
4. Smurov I., Covelli L., Tagirov K., Aksenov L. Peculiarities of pulse laser alloying: Influence of spatial distribution of the beam // J. Appl. Phys. – 1992. – V. 71, N. 7. – P. 3147-3158. DOI
5. Майоров В.С. Лазерное упрочнение металлов // Лазерные технологии обработки материалов: современные проблемы фундаментальных исследований и прикладных разработок / Под ред. В.Я. Панченко. – М.: Физматлит, 2009. – С. 439-469.
6. Багмутов В.П., Захаров И.Н. Моделирование тепловых процессов при поверхностной обработке неоднородных металлических тел высокотемпературным движущимся импульсным источником // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2011. – Т. 4, № 1. – С. 5-16. DOI
7. Гладуш Г.Г., Лиханский В.В., Лобойко А.И. Влияние поверхностно-активных веществ на тепло- и массоперенос при плавлении поверхности вещества лазерным импульсом // Квант. электроника. – 1997. – Т. 24, № 3. – С. 274-278. DOI
8. Зуев А.Л., Костарев К.Г. Особенности концентрационно-капиллярной конвекции. // УФН. – 2008. – Т. 178, № 10. – С. 1065-1085. DOI
9. Бирях Р.В., Рудаков Р.Н. Влияние интенсивности адсорбционно-десорбционных процессов на концентрационную конвекцию около капли в горизонтальном канале // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 24-31. DOI
10. Sahoo P., DebRoy T., McNallan M.J. Surface tension of binary metal-surface active solute systems under conditions relevant to welding metallurgy // Metall. Mater. Trans. B. – 1988. – V. 19, N. 3. – P. 483-491. DOI
11. Ehlen G., Ludwig A., Sahn P.R. Simulation of time-dependent pool shape during laser spot welding: Transient Effects // Metall. Mater. Trans. A. – 2003. – V. 34, N. 12. – P. 2947-2961. DOI
12. Kawai Y. Diffusion of sulfur in liquid iron. I: Diffusion in pure iron // Sci. Rep. RITU. Ser. A. – 1957. – V. 9. – P. 78-83.
13. Höche D., Müller S., Rapin G., Shinn M., Remdt E., Gubisch M., Schaaf P. Marangoni convection during free electron laser nitriding of titanium // Metall. Mater. Trans. B. – 2009. – V. 40, N. 4. – P. 497-507. DOI
14. Harlow F.H., Welch J.E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface // Phys. Fluids. – 1965. – V. 8, N. 12. – P. 2182-2189. DOI
15. Patankar S.V., Spalding D.B. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows // Int. J. Heat Mass Tran. – 1972. – V. 15, N. 10. – P. 1787-1806. DOI
16. Chorin A.J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems // J. Comput. Phys. – 1967. – V. 2, N. 1. – P. 12-26. DOI
17. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решений сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 592 с.

Поступила в редакцию 31.10.11; опубликована в электронном виде 22.10.12

## Сведения об авторе

Попов Владимир Николаевич, дфмн, снс, гнс, Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН (ИТПМ СО РАН), 630090, Новосибирск, ул. Институтская, 4/1; E-mail: popov@itam.nsc.ru