

DOI: [10.7242/1999-6691/2012.5.2.28](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2012.5.2.28)
УДК 539.3

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЕ АЛГОРИТМЫ РАСЧЁТА СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ТРЁХМЕРНЫХ ОБОЛОЧЕК

С.В. Лекомцев

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

В рамках двух конечно-элементных реализаций исследованы собственные колебания тонкостенных конструкций. В первой из них оболочка представлена как совокупность плоских элементов, находящихся одновременно под действием мембранных и изгибающих сил. Вторая основана на уравнениях теории упругости. Дискретизация области проводится с помощью 8-узловой конечного элемента с несовместными формами перемещений. В качестве примеров рассмотрены цилиндрические, эллиптические и открытые оболочки. Проанализировано влияние граничных условий и различных геометрических параметров на собственные частоты колебаний. Выявлены достоинства и недостатки каждого из подходов.

Ключевые слова: собственные колебания, МКЭ, теория оболочек, теория упругости, цилиндрические, эллиптические, открытые оболочки

FINITE-ELEMENT ALGORITHMS FOR CALCULATION OF NATURAL VIBRATIONS OF THREE-DIMENSIONAL SHELLS

S.V. Lekomtsev

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

The natural oscillations of thin-walled structures are studied using two variants of the finite-element method. In the first variant, the shell is represented as a set of planar elements, which are under the action of both membrane and bending forces. The second variant is based on the equations of the theory of elasticity. Domain discretization is carried out using the 8-node finite element and incompatible displacement modes. In the numerical experiments, cylindrical, elliptical and open shells are considered. The influence of different boundary conditions and geometrical parameters on natural vibration frequencies is taken into account. The advantages and disadvantages of each approach are discussed.

Key words: natural vibrations, finite-element method, theory of shells, linear theory of elasticity, cylindrical, elliptical, open shells

1. Введение

В последние десятилетия метод конечных элементов стал доминирующим среди методов, используемых для исследования напряженно-деформированного состояния, динамики и устойчивости тонкостенных конструкций, состоящих из пластин и оболочек малой и средней толщины. С применением техники конечно-элементного моделирования на сегодняшний день выполнено большое количество расчетов. Различные трудности, с которыми приходилось сталкиваться исследователям, и необходимость их преодоления привели к тому, что появились разнообразные, предназначенные специально для оболочек, конечные элементы, построенные на основе либо оболочечных теорий, либо трёхмерных уравнений теории упругости.

В настоящее время для анализа оболочек могут быть использованы комбинации из конечных элементов (КЭ), имеющих, как правило, свою область применения. Эффективными являются изопараметрические подходы, в которых оболочка трактуется как трёхмерное тело, которое обладает такими особенностями, как малая толщина и искривлённая боковая поверхность. Кроме того, поведение оболочки в этих подходах описывается в рамках определённых гипотез, принимающих во внимание вышеупомянутые особенности. Если сложная форма срединной поверхности конструкции не допускает аналитического представления, то её моделирование производится набором элементов простой геометрии, например, плоских или пологих. То есть исходная поверхность заменяется некоторой «гранёной» поверхностью, где каждая из граней считается отдельным плоским конечным элементом оболочки [1, 2] или заменяется набором слегка искривлённых сегментов [3, 4]. На первый взгляд последний вариант предпочтительнее предыдущего, потому что позволяет более точно описать оболочечную конструкцию. Однако в [5] отмечается, что в этом случае наблюдается сходимость не к точному решению задачи, а к некоторому другому по причине плохой аппроксимации смещения элемента как твёрдого целого. В то же время использование плоских элементов даёт при сокращённом численном интегрировании сходимость к точному решению задачи [5].

Несмотря на разнообразие разработанных оболочечных КЭ, определение напряжённо-деформируемого состояния базируется на нескольких теориях. Достаточно распространена схема расчёта тонких оболочек на основе гипотез Кирхгофа–Лява. Для этого случая в [5] на ряде тестовых задач проведено сравнение различных конечно-элементных аппроксимаций. Хорошее совпадение с аналитическим решением

при достаточно грубой сетке обеспечивает высокоточный треугольный конечный элемент, в котором для аппроксимации всех трёх компонент вектора перемещений авторы работы [5] прибегают к полиномам пятой степени [6], а также элемент (Strain element), предложенный в [7]. В последнем аппроксимации точно представляют смещение элемента как твёрдого целого и его независимые деформированные состояния. Это позволяет получить наивысшую точность при расчёте цилиндрических оболочек [5]. В [8] предлагается применять бикубические совместные аппроксимации, которые хорошо описывают смещение элемента как твёрдого целого и состояние «чистого изгиба» для поверхности с произвольной геометрией. Такой КЭ не обеспечивает высокую скорость сходимости, как предыдущие, но при достаточной степени дискретизации исследуемой области может привести к достоверным результатам. Новая конечно-элементная модель, основанная на гипотезах Кирхгофа–Лява и предназначенная для расчёта оболочек и оболочечных конструкций с произвольной геометрией, предложена в [5]. Её отличительными особенностями являются использование изопараметрической кубической аппроксимации на макрочетырёхугольнике и определение неизвестных функций как декартовых проекций вектора перемещений. Данный конечный элемент оказался эффективным и обеспечил высокую скорость сходимости.

Достаточно часто при решении практических задач применяются уравнения теории оболочек с учётом деформации поперечного сдвига. Наибольшее распространение в технике конечно-элементного моделирования получил вариант этой теории, основанный на гипотезе Тимошенко о прямой нормали, поскольку в этом случае максимальный порядок дифференциальных операторов, участвующих в получении основных соотношений для деформаций, не превышает первый [9]. Краткий обзор и сравнение конечно-элементных реализаций, базирующихся на гипотезах Тимошенко и Кирхгофа–Лява, продемонстрирован в [5] на тестовой задаче деформирования цилиндрической панели под действием собственного веса. Вне зависимости от выбранных гипотез, для оболочек скорость сходимости плоских треугольных КЭ напрямую зависит от степени аппроксимации мембранных перемещений. Так, на достаточно грубой сетке квадратичные полиномы [2, 10] позволяют получить решение, незначительно отличающееся от аналитического. Аналогичные элементы, где мембранные перемещения описываются с помощью линейных функций [11, 12], дают плохие результаты в плане точности и не обладают такой скоростью сходимости. Отмечается [5], что при искривлённых конечных элементах, применяемых для тонких оболочек, построенных с учетом гипотез Кирхгофа–Лява, оптимальны аппроксимации всех неизвестных полиномами не выше третьей степени.

Среди четырёхугольных КЭ для оболочек, рассматриваемых в рамках гипотез Тимошенко, эффективным и простым в реализации является элемент с билинейной аппроксимацией перемещений и углов поворота, который имеет шесть узловых степеней свободы [1]. Поскольку в соотношениях, определяющих деформации элемента, отсутствует жёсткость на кручение в касательной к элементу плоскости, то для регулирования отклонения вращения нормали в выражение энергии добавляется дополнительное слагаемое. Для интегрирования нового слагаемого используется одноточечная схема Гаусса. В остальных случаях численное интегрирование проводится по выборочно-редуцированной схеме.

Трёхмерное поле перемещений в оболочке может быть исследовано на основе уравнений теории упругости. Элементы низкого порядка, такие как призма или кирпичик, широко применяются в задачах статики и динамики благодаря сочетанию в них вычислительной эффективности и надёжности. Однако эти элементы не применимы для тонкостенных конструкций, так как при дискретизации с их помощью не принимаются во внимание кинематические ограничения и предположения, характерные для оболочечных теорий: малость толщины по сравнению с другими геометрическими размерами и то, что оболочка в целом несёт нагрузку за счёт мембранных и изгибающих усилий. Всё это приводит к недостоверности полученных результатов. В [13] для расчёта оболочек средней толщины применяется трёхмерный изопараметрический элемент, где малая толщина КЭ по сравнению с его линейными размерами учитывается естественным образом с помощью задания пониженной (линейной) степени аппроксимации в поперечном направлении. Такой подход даёт высокую точность тогда, когда отношение линейных размеров к толщине не превосходит десяти. По мере уменьшения толщины при применении таких элементов может возникнуть ряд трудностей. Во-первых, как отмечается в [14], «...наличие трёх степеней свободы в каждом узле приводит к большим коэффициентам жёсткости для перемещений по толщине оболочки. Это... может явиться причиной плохой обусловленности системы уравнений, если толщина мала по сравнению с остальными размерами элемента». Во-вторых, нормали к срединной поверхности после деформации не остаются прямыми при наличии нескольких узлов по толщине. В связи с этим в [15] предложен подход, обходящий эти трудности, поскольку вводится гипотеза прямых нормалей и не учитывается вклад в энергию деформации напряжений, перпендикулярных к срединной поверхности. Вместо координат узловых точек, лежащих на верхней и нижней лицевых поверхностях оболочки, определяются координаты соответствующей точки на срединной поверхности и компоненты вектора единичной нормали. Трёхмерный 16-узловой элемент вырождается в 8-узловой. Таким образом получается эффективный инструмент для анализа толстых оболочек и оболочек средней толщины.

Для улучшения характеристик трёхмерных элементов, применяемых для расчёта тонкостенных конструкций, в [16, 17] предложено использовать несовместные формы перемещений, которые

моделируют более гибкое поведение оболочки и в результате дают более достоверное решение. На основе этой концепции разработаны ANS (Assumed Natural Strain) и EAS (Enhanced Assumed Strain) методы, которые, не прибегая к пониженной схеме интегрирования, преодолевают проблему «заклинивания», заключающуюся для оболочек в появлении ложных сдвиговых и мембранных деформаций при чистом изгибе. Оба метода реализованы в [18] для трёхмерного 8-узлового элемента.

В данной работе собственные колебания тонкостенных конструкций исследованы с помощью двух подходов [14]. В первом из них оболочка представляется как набор плоских элементов. Второй подход основан на уравнениях теории упругости. Дискретизация области проводится с помощью 8-узлового конечного элемента с несовместными формами перемещений, что позволяет избежать дополнительных вычислений и трудностей, вызванных введением локальной системы координат, связанной с боковой поверхностью оболочки, где задаются определяющие соотношения и проводится интегрирование. На сегодняшний день наиболее ресурсоёмкими являются линейные и нелинейные задачи гидро / аэроупругости [19, 20] и пьезоупругости [21], а также класс нестационарных задач. В таких задачах производительность резко падает при увеличении размерности матриц решаемых систем уравнений. Далее анализируются результаты нескольких конечно-элементных реализаций, осуществленных автором настоящей статьи, и проводится их сравнение с результатами (в том числе и экспериментальными) других исследователей с целью выявления границ применимости каждой из реализаций и определения наиболее оптимальной из них с точки зрения вычислительной эффективности.

2. Численная реализация

2.1. Оболочечный конечный элемент

При описании оболочки произвольной геометрии предполагается, что криволинейная поверхность достаточно точно аппроксимируется совокупностью плоских треугольных элементов. Такое представление делает возможным воссоздание не только цилиндрических или коробчатых конструкций, но и поверхностей с более сложным изменением кривизны. Каждый из плоских элементов находится одновременно под действием мембранных и изгибающих сил. При условии малости деформаций перемещения, вызванные мембранными усилиями, не оказывают влияния на изгибные деформации и наоборот [14]. Таким образом, каждое напряжённое состояние может быть рассмотрено независимо. Для математической формулировки задачи исследования собственных колебаний системы используется принцип возможных перемещений с учётом работы сил инерции. Выполняя стандартные процедуры метода конечных элементов [14], имеем: $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = 0$. Здесь \mathbf{M} и \mathbf{K} — соответственно, обобщённые матрицы масс и жёсткости конечно-элементной системы; подматрицы жёсткости и масс отдельного конечного элемента формируются в локальной системе координат, связанной с элементом; \mathbf{u} — вектор обобщённых перемещений.

Представляя возмущённое движение оболочки в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{d}e^{i\omega t},$$

где \mathbf{d} — некоторые функции координат, ω — характеристический показатель, $i = \sqrt{-1}$, получим уравнение, описывающее гармонические колебания дискретной системы:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{d} = 0.$$

Вектор перемещений элемента оболочки \mathbf{d} содержит восемнадцать неизвестных, по шесть в каждом узле l : $\mathbf{d}_l = \{\mathbf{d}_l^m \ \mathbf{d}_l^b \ \theta_{z_l}\}^T = \{u_l \ v_l \ w_l \ \theta_{x_l} \ \theta_{y_l} \ \theta_{z_l}\}^T$, $l = i, j, k$, где θ — поворот относительно соответствующей оси декартовой системы координат, связанной с оболочкой; индексами m и b обозначены мембранные и изгибные составляющие.

Типичные подматрицы жёсткости и масс имеют следующий блочный вид [14]:

$$\mathbf{K}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ij}^m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{ij}^b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ij}^m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_{ij}^b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Компоненты вектора перемещений внутри элемента находятся через узловые неизвестные с помощью функций форм стандартным для метода конечных элементов образом. Для аппроксимации мембранных

перемещений используется линейная зависимость, а для изгибных — несовместные функции формы (см. соответствующие выражения в [14]).

В узловые параметры, которые определяют деформации, не входит поворот θ_z вокруг оси z . Если все элементы, имеющие общий узел, будут компланарны, то жёсткость в направлении θ_z станет нулевой. Вследствие этого любое возмущение, способствующее повороту, отразится на окончательном решении. При варьировании этот поворот не учитывается, а в матрицу жёсткости элемента добавляются нулевые строка и столбец. В дальнейшем вместо некоторых нулей вводится фиктивный момент M_z . В [14] отмечается, что это можно сделать для всех элементов, даже некомпланарных, воспользовавшись выражениями:

$$\begin{Bmatrix} M_{z_i} \\ M_{z_j} \\ M_{z_k} \end{Bmatrix} = \alpha E h \Delta \begin{bmatrix} 1 & -0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 1 & -0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z_i} \\ \theta_{z_j} \\ \theta_{z_k} \end{Bmatrix},$$

где Δ — площадь треугольного элемента; $\alpha = 0,03$ — некоторый коэффициент [14], E — модуль упругости, h — толщина оболочки. Такое представление фиктивных коэффициентов жёсткости не нарушает равновесия элемента в локальной системе координат.

Уравнения движения и геометрию конструкции удобнее задавать в глобальных декартовых координатах. Преобразование узловых перемещений и сил осуществляется с помощью матрицы \mathbf{L} , которая имеет вид: $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$. Здесь λ — матрица направляющих косинусов между осями глобальной и локальной координатных систем. Для перехода в глобальную систему подматрицы \mathbf{K}_{ij} и \mathbf{M}_{ij} подвергаются преобразованиям: $\bar{\mathbf{K}}_{ij} = \mathbf{L}^T \mathbf{K}_{ij} \mathbf{L}$; $\bar{\mathbf{M}}_{ij} = \mathbf{L}^T \mathbf{M}_{ij} \mathbf{L}$.

2.2. Трёхмерный конечный элемент упругого тела

В том случае, когда геометрия тонкостенной конструкции допускает дискретизацию боковой поверхности с помощью прямоугольных областей, можно использовать 8-узловой конечный элемент в виде кирпича. Но получаемые результаты будут достоверными лишь при условии сопоставимости размеров его граней с толщиной оболочки, что приведёт к достаточно большим размерам матриц в решаемой системе уравнений. Учёт некоторых особенностей конечно-элементной реализации позволяет прибегнуть к экономичным формам хранения разреженных матриц, например ленточным или профильным, и соответствующим вычислительным процедурам. Подход, предложенный в [16, 17], делает возможным значительное улучшение характеристик элемента за счёт добавления внутренних несовместных форм перемещений N_i^n : $\mathbf{d} = \sum_{i=1}^8 N_i(s, t, r) \mathbf{d}_i + \sum_{i=1}^3 N_i^n(s, t, r) \mathbf{a}_i$. Здесь (s, t, r) — естественные координаты элемента; $N_i(s, t, r) = (1/8)(1 + s_i s)(1 + t_i t)(1 + r_i r)$ — совместные функции формы; (s_i, t_i, r_i) — естественные координаты i -го узла, $N_1^n = 1 - s^2$; $N_2^n = 1 - t^2$; $N_3^n = 1 - r^2$; \mathbf{a}_i — неизвестные константы.

На этапе построения конечно-элементных соотношений несовместные члены перемещений влекут за собой появление дополнительного слагаемого в выражении, определяющем деформации элемента: $\varepsilon^e = \mathbf{B} \mathbf{d}^e + \mathbf{G} \mathbf{a}^e$. Здесь \mathbf{B} — матрица градиентов; \mathbf{G} — матрица, содержащая производные от несовместных форм перемещений.

Матрица жёсткости элемента принимает вид:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{dd} & \mathbf{K}_{d\alpha} \\ \mathbf{K}_{\alpha d} & \mathbf{K}_{\alpha\alpha} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{K}_{dd} = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV^e; \quad \mathbf{K}_{d\alpha} = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{G} dV^e = \mathbf{K}_{\alpha d}^T; \quad \mathbf{K}_{\alpha\alpha} = \int_{V^e} \mathbf{G}^T \mathbf{D} \mathbf{G} dV^e.$$

Параметр $\mathbf{a} = \{\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_9\}$ может быть исключен на этапе формирования матриц элемента:

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{K}_{dd} - \mathbf{K}_{d\alpha} \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{-1} \mathbf{K}_{\alpha d}.$$

Для обеспечения сходимости на конечно-элементной сетке, 8-узловые элементы которой не являются правильной призмой, производные от несовместных форм узловых перемещений следует вычислять таким образом [22]:

$$\left\{ \frac{\partial N_i^n}{\partial x} \quad \frac{\partial N_i^n}{\partial y} \quad \frac{\partial N_i^n}{\partial z} \right\}^T = \frac{\det \mathbf{J}_0}{\det \mathbf{J}} \mathbf{J}_0^{-1} \left\{ \frac{\partial N_i^n}{\partial s} \quad \frac{\partial N_i^n}{\partial t} \quad \frac{\partial N_i^n}{\partial r} \right\}^T,$$

где \mathbf{J} — матрица Якоби; \mathbf{J}_0 — матрица Якоби, вычисленная в центре элемента ($r = t = s = 0$).

Несомненным достоинством конечных элементов, описанных в данном разделе, является нелинейная аппроксимация перемещений без введения дополнительных узлов. Это позволяет получать результаты с достаточной точностью при количестве степеней свободы в несколько раз меньшем, чем при использовании обычного 8-узлового элемента.

Постановка задачи исследования собственных колебаний осуществляется аналогично (см. раздел 2.1).

3. Численные результаты

С целью определения наиболее оптимальных параметров конечно-элементной сетки для всех систем, представленных далее, была проведена оценка сходимости решения. Установлено, что для оболочечного подхода (3D shell) вполне достаточно 6500–7000 узловых неизвестных. Достоверное решение для идентичной конструкции в рамках постановки на основе положений теории упругости (3D solid) достигается при числе степеней свободы в 2–3 раза большем. При решении задачи на собственные значения повышение вычислительной эффективности осуществляется с помощью алгоритма на основе метода Ланцоша для симметричных разреженных матриц. Такой подход позволяет не только сократить время вычислений, но и значительно снизить необходимый объём оперативной памяти за счёт хранения только ненулевых элементов матриц.

3.1. Собственные колебания цилиндрических оболочек

В качестве первого объекта исследования рассматривается цилиндрическая оболочка, свободно опёртая на обоих краях ($x = 0, L: v = w = \theta_y = \theta_z = 0$). Такой выбор обусловлен тем, что в литературе достаточно подробно изучены собственные колебания подобных конструкций. Это может оказаться полезным на этапе проверки достоверности конечно-элементных реализаций 3D shell и 3D solid, обсуждаемых в данной статье. Вычисленные собственные частоты колебаний стальной цилиндрической оболочки и экспериментальные результаты, полученные в работе [23], представлены в таблице 1. Физико-механические и геометрические характеристики исследуемой конструкции были следующими: $E = 2,01 \cdot 10^{11}$ Н/м²; коэффициент Пуассона $\nu = 0,29$; плотность материала $\rho_m = 7812$ кг/м³; средний радиус $R = 0,0377$ м; толщина $h = 2,29 \times 10^{-4}$ м; отношение длины к среднему радиусу $L/R = 6,2$. Также для сравнения показаны значения собственных частот, взятые из [24] и [25], где динамика конструкции исследуется в рамках теории оболочек и теории упругости соответственно, а численное решение построено с применением полуаналитического варианта метода конечных элементов, основанного на представлении решения в виде ряда Фурье по окружной координате. При использовании такого подхода номер гармоники j в разложении соответствует количеству полуволн в окружном направлении, а номер моды m — числу полуволн в продольном. В трёхмерной постановке спектр собственных частот расположен в произвольном порядке, и для корректного сопоставления с [23–25] необходимо построение форм колебаний.

Таблица 1. Сравнение частот колебаний (Гц) стальной цилиндрической оболочки, свободно опёртой на обоих краях

Число полуволн		Авторские результаты		Результаты других авторов		
m	j	3D solid	3D shell	Эксперимент [23]	[24]	[25]
1	3	650,2	650,6	640	638,5	640,7
	4	692,3	673,1	688	661,9	663,5
	5	1009,6	956,5	995	951,5	951,3
	6	1465,7	1360,9	1430	1366,6	1363,8
	7	2031,4	1849,2	1938	1871,5	1865,5
2	3	2131,0	2123,7	2070	2100,3	2101,0
	4	1450,7	1428,8	1430	1387,4	1391,2
	5	1400,3	1311,4	1313	1256,5	1265,1
	6	1743,4	1541,0	1570	1493,1	1503,5

Обе численные реализации обеспечивают достоверность результатов в сравнении с экспериментом в пределах относительной погрешности 5%. Однако при подходе на основе теории оболочек (3D shell) для этого требуется в два раза меньше узловых неизвестных. В некоторых случаях ($m = 2, j = 6$) формулировка на основе уравнений трёхмерной теории упругости (3D solid) не позволяет получить собственные частоты, близкие к экспериментальным, даже при большом количестве степеней свободы.

Второй объект для рассмотрения — это цилиндрическая оболочка, жёстко закреплённая на одном крае ($x=0: u=v=w=\theta_x=\theta_y=\theta_z=0$) со следующими физико-механическими характеристиками: $E=2,05 \cdot 10^{11}$ Н/м²; $\nu=0,30$; $\rho_m=7800$ кг/м³; $R=0,07725$ м; $h=1,5 \cdot 10^{-3}$ м; $L/R=2,99$. В таблице 2 представлены результаты в сравнении с экспериментальными данными [26], где для исследования собственных колебаний оболочки применяется вырожденный конечный элемент Ахмада [15]. Также проведено сравнение с решением в двумерной постановке [25] и [27]. За исключением $m=1, j=2$, результаты достаточно хорошо согласуются с экспериментом. Это можно объяснить тем, что данная форма колебаний плохо прослеживалась в эксперименте, выполненном авторами [26].

Таблица 2. Сравнение частот колебаний (Гц) консольно закреплённой стальной цилиндрической оболочки

Число полуволн		Авторские результаты		Результаты других авторов			
m	j	3D solid	3D shell	[25]	[26]	[27]	Эксперимент [26]
1	2	821,8	810,4	817,5	814,6	815,1	708
	3	635,9	629,3	627,2	633,6	634,7	616
	4	952,0	939,3	928,0	947,6	947,5	945
	5	1501,6	1463,2	1446,0	1481,1	1477,6	1479
	6	2214,2	2121,1	2101,8	2158,0	2148,7	2151
2	3	2056,5	2019,2	2028,7	2029,6	2017,2	1969
	4	1684,3	1636,0	1637,9	1650,3	1616,7	1628
	5	1897,6	1820,4	1809,2	1842,1	1787,5	1851

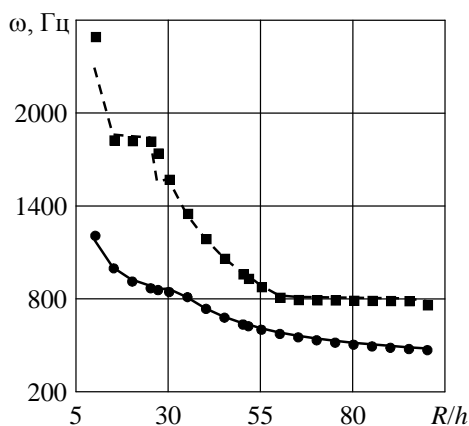


Рис. 1. Собственные частоты колебаний консольно закреплённой стальной оболочки: ● — ω_1 3D shell; — ω_1 3D solid; ■ — ω_3 3D shell; - - ω_3 3D solid

для ω_3 при $R/h=10$, и оно, ввиду ограничений теории оболочек, будет увеличиваться при дальнейшем уменьшении отношения R/h (на рисунке не приведено).

В следующих примерах проанализировано влияние на собственные частоты колебаний отношения L/R . Результаты для разных видов граничных условий изображены на рисунке 2. Оболочка имеет характеристики: $E=8,975 \cdot 10^5$ Н/м²; $\nu=0,50$; $\rho_m=850$ кг/м³; $R=0,00785$ м; $h=1,78 \cdot 10^{-4}$ м. В случае её консольного закрепления разница между подходами 3D shell и 3D solid значительна (Рис. 2, а). С относительной погрешностью менее 2% совпадает лишь первая минимальная собственная частота и только при $L/R \geq 12$. Из рисунка 2, б видно, что для жёстко закреплённой с обоих краёв оболочки подход на основе уравнений трёхмерной теории упругости ($\nu=0,4999$) качественно описывает картину верно, но даёт значительно завышенные значения.

С целью выявления причин такого сильного различия в результатах для геометрически идентичной конструкции выполнен ряд численных экспериментов. Установлено, что подход на основе оболочечной теории более достоверно описывает поведение резиновой конструкции. На рисунке 2, в, г представлены собственные частоты колебаний алюминиевой цилиндрической оболочки ($E=7,1 \cdot 10^{10}$ Н/м²; $\nu=0,33$;

Собственные частоты колебаний оболочек сильно зависят от отношений R/h и L/R . Пределы применимости оболочечной теории, используемой в данной работе, ограничены величиной $R/h=10$. Подход в рамках трёхмерной теории упругости позволяет исследовать толстостенные конструкции, однако верхняя граница этого отношения не известна. На рисунке 1 показаны первая и третья низшие собственные частоты при разных величинах R/h (конфигурация исследуемой системы и свойства материала такие же, как и в предыдущем примере). Полученный спектр содержит как симметричные, так и антисимметричные составляющие, представленные парой одинаковых значений. При этом формы колебаний отличаются друг от друга поворотом по окружной координате. В этом и последующих примерах для цилиндрических оболочек ω_3 соответствует третьей симметричной составляющей, то есть шестой собственной частоте в полученном спектре. Из рисунка 1 видно, что в рассматриваемом диапазоне изменения $R/h=[10;100]$ подход на основе трёхмерной теории упругости описывает поведение тонкостенной конструкции так же хорошо, как и оболочечный. Различие наблюдается

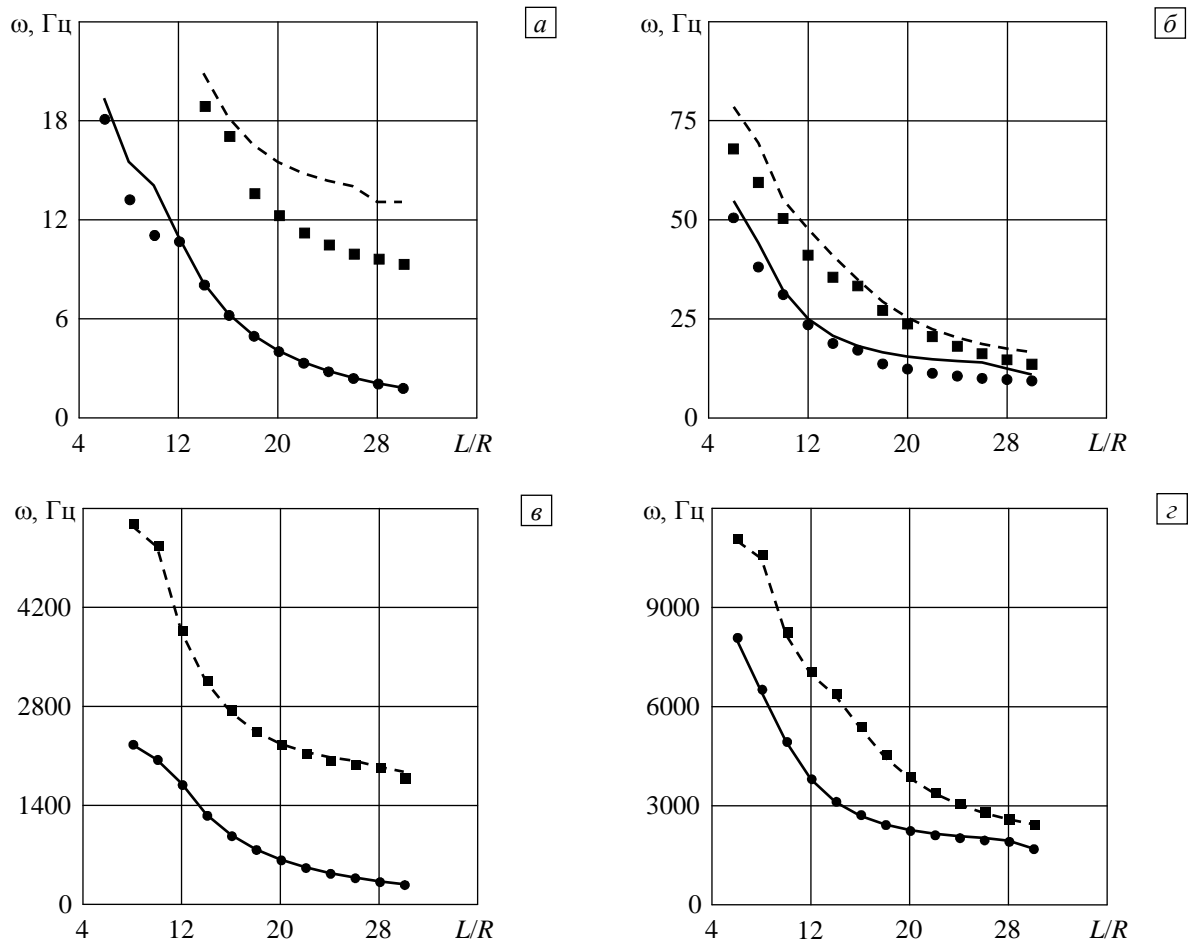


Рис. 2. Собственные частоты колебаний резиновой (а, б) и алюминиевой (в, г) оболочек: консольной (а, в) и жёстко закреплённой на обоих краях (б, г); ● – ω_1 3D shell; — ω_1 3D solid; ■ – ω_3 3D shell; - - - ω_3 3D solid

разница между значениями полученных частот достигает 2%. С точки зрения вычислительной эффективности наиболее оптимальным является применение 3D shell подхода. Для оболочек с отношением $L/R \geq 14$ он требует значительно меньшего числа элементов по длине. В некоторых случаях имеет место количество степеней свободы в 8 раз меньшее, чем при использовании 8-узлового конечного элемента с несовместными формами перемещений.

3.2. Собственные колебания эллиптических оболочек

Интересным объектом для исследования являются оболочки некругового профиля, например, эллиптического (Рис. 3, а), у которых величины полуосей R_x и R_y выступают в качестве варьируемых параметров. При их определённых значениях можно добиться снижения или, наоборот, повышения минимальной собственной частоты относительно цилиндрической конфигурации без изменения формы колебаний. Полученные результаты приведены в таблице 3. При R_x , равном $0,75R$ и $1,5R$, имеют место, соответственно, повышение и понижение минимальной собственной частоты. При этом форма колебаний не меняется и совпадает с режимом при $m = 1, j = 3$, который наблюдался для цилиндрической оболочки (см. Табл. 2).



Рис. 3. Основные параметры сечений эллиптической (а) и открытой (б) оболочек

Таблица 3. Частоты колебаний ω_i (Гц) консольно закреплённой стальной оболочки некругового профиля при разных размерах полуоси R_x

$R_y = R = 0,07725$										
R_x	0,5R		0,75R		R		1,5R		2R	
Подход	3D shell	3D solid	3D shell	3D solid	3D shell	3D solid	3D shell	3D solid	3D shell	3D solid
i										
1	548,49	554,69	699,90	696,81	629,89	632,11	533,52	536,38	434,46	438,55
2	602,36	610,84	702,30	697,17	629,94	632,11	534,03	536,80	434,66	438,68
3	772,87	766,09	711,55	719,20	810,88	820,06	607,79	609,86	447,75	453,09
4	782,58	776,89	729,37	735,46	811,09	820,06	608,59	610,46	449,14	454,64
5	1162,26	1179,50	1191,63	1180,50	941,44	941,84	864,54	870,57	662,52	668,84
6	1456,77	1449,40	1192,01	1181,80	941,59	941,84	905,64	913,74	662,93	669,88
7	1470,13	1461,50	1527,44	1541,90	1468,42	1479,10	940,75	948,78	779,22	787,42
8	1493,80	1513,40	1691,41	1688,10	1468,87	1479,10	941,08	949,17	841,06	852,54
9	1503,37	1521,10	1706,05	1688,30	1637,66	1660,90	1331,67	1352,20	920,97	933,68
10	1630,30	1641,40	1806,88	1814,50	1638,95	1660,90	1335,03	1352,70	974,03	985,17

В таблице 4 показано изменение собственных частот колебаний в зависимости от вида граничных условий (ГУ), задаваемых на краях эллиптической оболочки со следующими характеристиками: $E = 2,05 \cdot 10^{11}$ Н/м²; $\nu = 0,30$; $\rho_m = 7800$ кг/м³; $h = 5 \cdot 10^{-4}$ м; $L = 0,2$ м; $R_x = 2 \cdot 10^{-2}$ м; $R_y = 1 \cdot 10^{-2}$ м. Приняты обозначения: F — свободный край; S — свободное опирание ($v = w = \theta_y = \theta_z = 0$); C — закрепление по всем степеням свободы ($u = v = w = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$).

Таблица 4. Частоты колебаний ω_i (Гц) эллиптической оболочки при разных видах граничных условий

ГУ	C-F		S-S		C-C	
Подход	3D shell	3D solid	3D shell	3D solid	3D shell	3D solid
i						
1	523,63	538,47	1434,77	1390,20	1710,87	1689,60
2	889,81	901,86	1438,12	1447,80	1828,37	1806,60
3	1310,75	1281,50	1498,47	1463,00	2596,38	2650,20
4	1332,43	1302,20	2398,15	2387,50	3042,21	3070,50
5	1736,47	1713,20	2406,79	2422,10	3360,86	3391,90
6	1855,21	1832,40	2636,20	2615,50	3676,46	3616,80
7	2741,51	2797,40	3679,35	3650,50	3781,88	3694,00
8	3162,57	3189,00	3711,66	3653,40	3969,78	3897,90
9	3491,39	3521,90	3816,44	3781,10	4011,43	3952,20
10	3634,24	3573,60	3880,02	3851,60	4456,36	4493,30

Первые две формы колебаний оболочки, у которой правый край не закреплён, представляют собой перемещение свободного края в направлении полуосей эллипса R_y и R_x соответственно. При остальных видах граничных условий минимальная частота соотносится с режимом сдвливания конструкции с двух сторон в направлении полуоси R_y . Конечно-элементные реализации 3D shell и 3D solid позволяют получать результаты, максимальная относительная разница между которыми не превосходит 3%. Как и в предыдущих случаях, более ресурсоёмким оказался подход 3D solid с применением 8-узлового конечного элемента, имеющего несовместные формы перемещений.

3.3. Собственные колебания открытых цилиндрических оболочек

В ряде инженерных решений применяются открытые цилиндрические оболочки (Рис. 3, б). Поведение таких конструкций даже при малой величине угла ϕ сильно отличается от аналогов, имеющих замкнутую конфигурацию. Далее в примерах рассматривается открытая оболочка с геометрией и свойствами материала, идентичными цилиндрической оболочке, частоты колебаний которой содержит таблица 2. Для двух вариантов граничных условий (C-F и C-C) первые десять минимальных частот спектра приведены в таблице 5 при различных значениях угла раскрытия ϕ . Представляет интерес сравнительный анализ замкнутой (Табл. 2) и открытой конфигураций. Сопоставление результатов для оболочки, жёстко закреплённой с одного края, показывает, что при $\phi = 15^\circ$ минимальная собственная частота ω_1 снижается почти в 3 раза. Дальнейшее увеличение угла раскрытия не оказывает столь значительного влияния на низшие частоты, но заметно влияет на более высокие. Сделанные выводы справедливы также для оболочки, жёстко закреплённой с обоих краев. Отметим, что имеет место качественное различие режимов, соответствующих минимальной частоте ω_1 .

Таблица 5. Частоты колебаний ω_i (Гц) открытой цилиндрической оболочки при разных величинах угла φ

φ, град ГУ i	15		30		45		60		90	
	C-F	C-C	C-F	C-C	C-F	C-C	C-F	C-C	C-F	C-C
1	260,61	659,35	256,77	651,02	259,34	652,81	252,23	651,39	240,95	650,56
2	262,07	659,45	261,90	651,42	260,53	654,52	267,34	652,90	278,67	653,58
3	611,38	1237,11	591,20	1217,19	608,43	1220,82	588,18	1218,61	596,04	1217,90
4	618,01	1237,58	665,87	1217,26	640,49	1223,91	683,98	1219,46	708,36	1220,21
5	726,81	1528,36	724,48	1525,10	726,19	1537,59	726,83	1515,20	725,11	1564,40
6	734,63	1588,88	732,29	1570,98	729,67	1557,57	740,19	1639,62	766,57	1608,37
7	774,45	1632,93	749,48	1693,53	818,26	1744,70	856,84	1706,47	1118,24	1891,72
8	839,86	1820,55	907,77	1784,50	994,47	1846,03	1012,87	1889,38	1208,12	1893,00
9	995,23	1867,07	1142,72	1890,76	1117,36	1898,31	1318,40	1895,76	1320,31	2005,99
10	1257,16	1925,48	1199,38	1891,08	1320,68	1909,95	1319,38	2061,30	1321,39	2317,75

Первые собственные формы колебаний замкнутой и открытой ($\varphi = 15^\circ$) цилиндрических оболочек изображены на рисунке 4. В случае консольного закрепления угловые точки на свободном крае синхронно перемещаются в радиальном направлении (Рис. 4, *з*), при этом сечения $x = L$ открытой и замкнутой конфигураций сильно отличаются друг от друга (Рис. 4, *в*, *з*). При граничных условиях вида C-C колебания этих оболочек качественно также различны (Рис. 4, *а*, *б*).

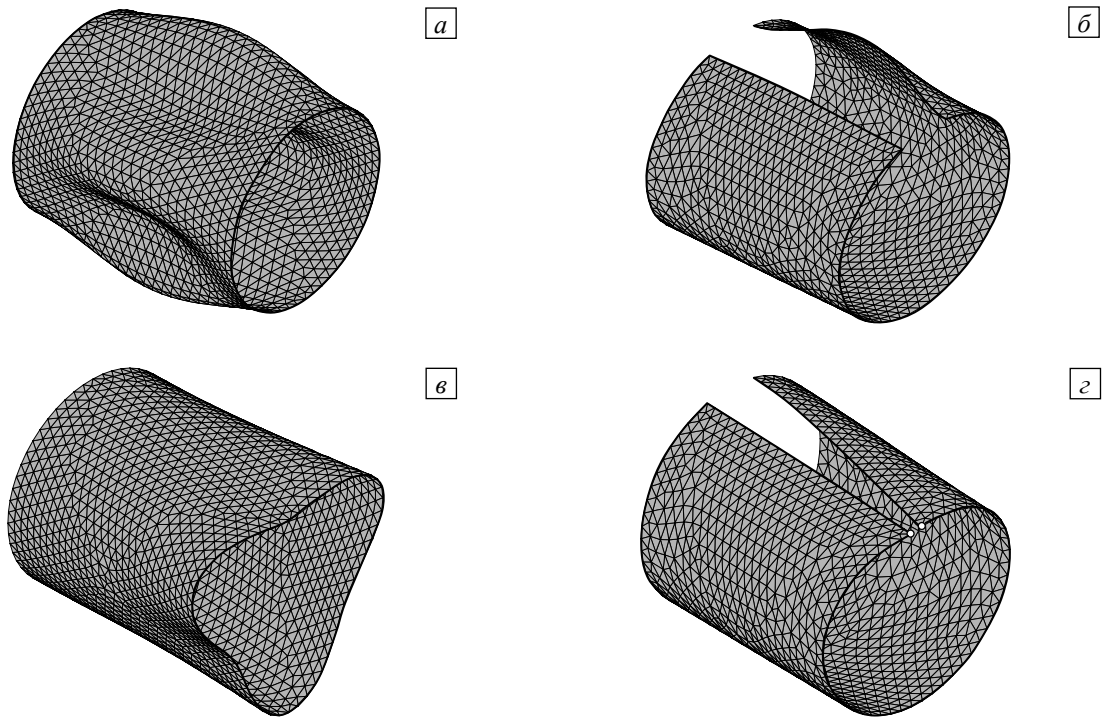


Рис. 4. Первые собственные формы колебаний цилиндрической и открытой ($\varphi = 15^\circ$) оболочек при разных видах граничных условий: C-C (*а*, *б*); C-F (*в*, *з*)

Наряду с ограничениями, задаваемыми на краях, незамкнутые оболочки можно закреплять вдоль открытых образующих. Качественно другие формы колебаний оболочки такой конфигурации, при прочих равных условиях, влекут за собой существенное снижение собственных частот (Табл. 6). Первой форме соответствует раскачивание влево и вправо относительно линий закрепления, второй — раскачивание вдоль них. В рассмотренном диапазоне изменения угла раскрытия наблюдается увеличение всех частот колебаний. Эта зависимость носит немонотонный характер. Типичным для неё является значительный рост частот при угле $\varphi \in (60^\circ; 90^\circ)$.

Как и ранее, колебания открытых оболочек исследовались в рамках двух подходов. Некоторые данные представлены в таблице 6. Видно, что результаты достаточно хорошо согласуются между собой. При анализе рассмотренных в данном разделе конфигураций оболочек оказалось, что с точки зрения ресурсоёмкости трёхмерный 8-узловой КЭ с несовместными формами перемещений сопоставим с оболочечным. Во всех численных экспериментах количество узловых неизвестных для двух подходов было практически одинаковое.

Таблица 6. Частоты колебаний ω_i (Гц) незамкнутой цилиндрической оболочки, жёстко закреплённой вдоль открытых краёв

φ, град	15	30	45	60	90	90
Подход	3D shell				3D shell	3D solid
i						
1	45,91	62,08	86,06	122,27	270,55	267,32
2	110,87	151,39	208,89	291,63	595,18	590,71
3	127,26	166,56	221,06	298,93	601,60	597,79
4	244,90	312,63	404,00	530,68	987,74	986,55
5	262,72	334,97	434,00	574,15	1104,85	1101,30
6	435,40	546,75	698,26	908,61	1694,61	1697,60
7	438,00	548,40	698,45	911,52	1702,05	1709,30
8	652,20	804,57	1009,21	1292,40	2147,98	2154,60
9	654,51	812,28	1025,87	1325,87	2205,88	2216,90
10	906,78	1117,67	1402,48	1800,40	2280,76	2302,60

4. Заключение

Представлены результаты исследования собственных колебаний трёхмерных тонкостенных конструкций, выполненного в рамках конечно-элементных реализаций, основанных на уравнениях классической теории оболочек и трёхмерной теории упругости. В последнем случае характеристики стандартного 8-узлового конечного элемента в форме призмы улучшались путём введения несовместных членов перемещений. Установлено, что каждый из подходов имеет свои положительные и отрицательные стороны. В частности, применимость реализации 3D shell ограничивается толщиной оболочки, тогда как в 3D solid увеличение толщины не играет роли. С другой стороны, подход на основе уравнений теории упругости обладает худшей сходимостью на конечно-элементной сетке и для получения решения с заданной точностью требует большего количества степеней свободы. Его главным достоинством является универсальность — возможность применения не только в узком классе задач, но и в случаях геометрически сложных конструкций, где с тонкостенными телами сопрягаются объекты произвольной геометрии.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00323-а).

Литература

1. Kanok-Nukutchai W. A simple and efficient finite element for general shell analysis // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1979. – V. 14, N. 2. – P. 179-200. DOI
2. Olson M.D., Bearden T.W. A simple flat triangular shell element revisited // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1979. – V. 14, N. 1. – P. 51-68. DOI
3. Олсон М.Д. Исследование произвольных оболочек с помощью пологих оболочечных конечных элементов // Тонкостенные оболочечные конструкции. Теория, эксперимент, проектирование. – М.: Машиностроение. – 1980. – С. 409-437.
4. Cowper G.R., Lindberg G.M., Olson M.D. A shallow shell finite element of triangular shape // Int. J. Solids Struct. – 1970. – V. 6, N. 8. – P. 1133-1156. DOI
5. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. – М.: Физматлит, 2006. – 392 с.
6. Dawe D.J. High-order triangular finite element for shell analysis // Int. J. Solids Struct. – 1975. – V. 11, N. 10. – P. 1097-1110. DOI
7. Ashwell D.G. Strain elements, with application to arches, ring and cylindrical shells // Finite Element for Thin Shells and Curved Members. – New York: John Wiley & Sons, 1976. – Chapt. 6. – P. 91-111.
8. Богнер Ф., Фокс Р., Шмит Л. Расчет цилиндрической оболочки методом дискретных элементов // Ракетная техника и космонавтика. – 1967. – Т. 5, № 4. – С. 170-175.
9. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – Киев: Наукова думка, 1973. – 248 с.
10. Carpenter N., Stolarski H., Belytschko T. A flat triangular shell element with improved membrane interpolation // Commun. Appl. Numer. M. – 1985. – V. 1, N. 4. – P. 161-168. DOI
11. Clough R.W., Johnson R.J. A finite element approximation for the analysis of thin shells // Int. J. Solids Struct. – 1968. – V. 4, N. 1. – P. 43-60. DOI
12. Bathe K.-J., Ho L.-W. A simple and effective element for analysis of general shell structures // Comput. Struct. – 1981. – V. 13, N. 5-6. – P. 673-681. DOI
13. Гордон Л. А. К расчету пластин и оболочек методом конечных элементов // Известия ВНИИ гидротехники. – 1972. – Т. 99. – С. 168-178.
14. Зенкевич О.С. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 544 с.
15. Ahmad S., Irons B.M., Zienkiewicz O.C. Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1970. – V. 2, N. 3. – P. 419-451. DOI
16. Wilson E.L., Taylor R.L., Doherty W.P., Ghaboussi J. Incompatible displacement models // Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics / Edited by S.J. Fenves, et al. – New York: Academic Press, 1973. – P. 43-57.

17. Taylor R.L., Beresford P.J., Wilson E.L. A non-conforming element for stress analysis // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* – 1976. – V. 10, N. 6. – P. 1211-1219. DOI
18. Norachan P., Suthasupradit S., Kim K.-D. A co-rotational 8-node degenerated thin-walled element with assumed natural strain and enhanced assumed strain // *Finite Elem. Anal. Des.* – 2011. – V. 50. – P. 70-85. DOI
19. Бочкарев С.А. Собственные колебания вращающейся круговой цилиндрической оболочки с жидкостью // *Вычисл. мех. сплош. сред.* – 2010. – Т. 3, № 2. – С. 24-33.
20. Bochkarev S.A., Matveenko V.P. Natural vibrations and stability of shells of revolution interacting with an internal fluid flow // *J. Sound Vib.* – 2011. – V. 330, N. 13. – P. 3084–3101. DOI
21. Матвеев В.П., Клизман Е.П., Юрлов М.А., Юрлова Н.А. Моделирование и оптимизация динамических характеристик smart-структур с пьезоматериалами // *Физ. мезомех.* – 2012. – Т. 15, № 1. – С.75-85.
22. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The Finite Element Method. Volume 1: The Basis.* — Woburn, USA, 2000. — 707 p.
23. Lindholm U.S., Kana D.D., Abramson H.N. Breathing vibrations of a circular cylindrical shell with an internal liquid // *J. Aeronautical Sciences.* – 1962. – V. 29. – P. 1052-1059.
24. Бочкарев С.А., Матвеев В.П. Численное исследование влияния граничных условий на динамику поведения цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью // *МТТ.* – 2008. – № 3 – С. 189-199.
25. Бочкарев С.А., Лекомцев С.В. Численное моделирование упругой трубы с текущей жидкостью // *Вестник ПГТУ. Механика.* – Пермь: изд-во ПГТУ, 2011. – № 3. – С. 5-14.
26. Mazúch T., Horacek J., Trnka J., Veselý J. Natural modes and frequencies of a thin clamped-free steel cylindrical storage tank partially filled with water: FEM and measurement // *J. Sound Vib.* – 1996. – V. 193, N. 3 – P. 669-690. DOI
27. Бочкарев С.А., Матвеев В.П. Конечно-элементный анализ собственных колебаний цилиндрической оболочки с жидкостью // *Вестник ПГТУ. Вычислительная механика.* – Пермь: изд-во ПГТУ, 2006. – № 4 – С. 3-12.

Поступила в редакцию 13.04.12; опубликована в электронном виде 30.06.12