

DOI: [10.7242/1999-6691/2012.5.2.26](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2012.5.2.26)
 УДК 539.3:539.382.4

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ПРОЦЕССА РАЗВИТИЯ ТРЕЩИН ПРИ НЕРАВНОМЕРНЫХ ОСАДКАХ СООРУЖЕНИЯ

М.Л. Бартоломей

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

Исследовано напряженно-деформированное состояние трехмерной строительной конструкции при заданных осадках колонн. В рамках теории изгиба пластин и прямолинейных стержней выявлен опасный участок в плите межэтажного перекрытия. Разработана трехмерная модель опасного участка плиты, позволяющая определять уровень поврежденности материала перекрытия. Найдены величины осадок, приводящие к появлению первых трещин в исследуемом фрагменте конструкции.

Ключевые слова: метод конечных элементов, трещинообразование, разрушение, изгиб пластины

THE NUMERICAL ANALYSIS OF CRACKS DEVELOPMENT UNDER NONUNIFORM SETTLEMENTS OF A CONSTRUCTION

M.L. Bartolomey

Perm National Research Polytechnical University, Perm, Russia

We investigate the stress-strain state of a three-dimensional construction at the given settlements of columns. In the framework of the theory of bending plates and rectilinear rods, a dangerous area in the floor plate has been revealed. A three-dimensional model has been developed for this area of the plate, which allows us to determine the damage level of the floor plate material. The values of settlements at which the first cracks appear in the examined segment of the construction have been obtained.

Key words: finite element method, cracking, destruction, plate bending

1. Введение

В процессе эксплуатации строительных конструкций могут возникать различные изменения в их несущих элементах, поэтому исследование напряженно-деформированного состояния зданий и сооружений с учетом значительных неравномерных осадок, которые могут сопровождаться трещинообразованием, является на сегодняшний день актуальной проблемой. Решение задач такого рода может ответить на вопрос о несущей способности и возможности дальнейшего использования объектов.

Исследованию конструкций с учетом появляющихся дефектов посвящены многочисленные публикации, и, поскольку основным материалом для строительных конструкций является бетон, обратимся к некоторым из работ, касающихся дефектов в этом материале. В частности, в работах [1], [2] моделируется и исследуется поведение бетона при динамическом воздействии. В монографии [3] обсуждаются причины образования трещин в бетоне в зависимости от его структуры, а в [4] определяются параметры разрушения и физико-механические свойства бетонов и моделируется разрушение. Влияние на поведение конструкции в целом таких факторов, как карстообразование и ветровая нагрузка, рассмотрены в [5] и [6] соответственно.

Близкими по тематике к предлагаемой вниманию статье являются работы [7] и [8], так как в них описываются методики отслеживания технического состояния и определения остаточного ресурса конструкции.

Данная статья посвящается изучению напряженно-деформированного состояния реального сооружения, которое схематично изображено на рисунке 1. В ходе эксплуатации данного объекта значительно и неравномерно просел фундамент, неравномерность осадок фундамента передалась на колонны и, как следствие, возникла деформация плит межэтажных перекрытий. Для отслеживания происходящих изменений за конструкцией установили наблюдение — на колоннах разместили датчики, измеряющие относительную разность осадок.

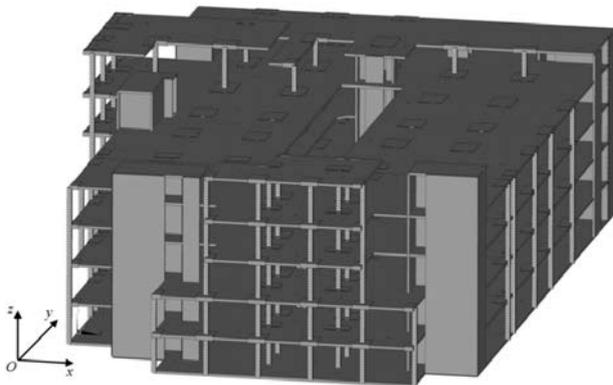


Рис. 1. Общая схема исследуемой конструкции

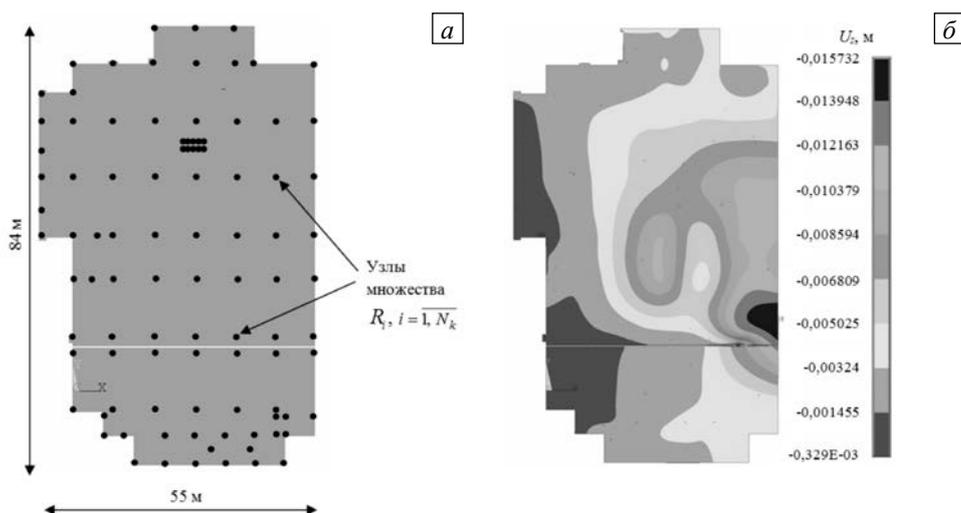


Рис. 2. Расположение колонн (а) и распределение вертикальных перемещений U_z в фундаментной плите, вызванных осадками (б)

Целью исследований являлось определение фактических величин осадок фундамента, которые могут привести к разрушению (появлению трещин) плит межэтажных перекрытий. По замерам разности осадок в течение относительно короткого промежутка времени сделана попытка оценить уровень общих осадок, возникших за период после завершения строительства. Задача решалась пошагово: на первом шаге определялось напряженно-деформированное состояние всей конструкции по замеренной относительной разности осадок колонн, расположение которых приведено на рисунке 2; на втором шаге выделялся потенциально опасный участок, и задача рассматривалась в трехмерной постановке с учетом разрушения материала.

2. Анализ напряженно-деформированного состояния конструкции в рамках теории пластин и прямолинейных стержней

Сначала рассмотрим задачу определения напряжений и деформаций во всей конструкции в рамках теории упругих пластин и прямолинейных стержней. Для нахождения положения в пространстве любой точки стержневых элементов конструкции введем в рассмотрение правую прямоугольную систему глобальных координат $Oxyz$, а с каждым стержнем свяжем локальную систему координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ (Рис. 3). С любым i -м узлом конструкции соотнесем вектор \mathbf{V}_i (например, обобщенных перемещений) размерности, равной числу принятых степеней свободы одного узла. Все характеристики отдельного узла конструкции могут быть определены теперь как в глобальной $Oxyz$, так и в локальной $O\xi_1\xi_2\xi_3$ системах координат; для перехода из одной системы координат в другую используются соответствующие формулы перехода: $\mathbf{V}_i = T_0 \mathbf{V}'_i$, где T_0 — матрица преобразования, которая в каждом конкретном случае обуславливается геометрическими соображениями; \mathbf{V}'_i — вектор узловых неизвестных в локальной системе координат [9].

Математическая постановка задачи определяется уравнениями равновесия, физическими и геометрическими соотношениями и граничными условиями, записанными в матричной форме для любой точки срединной поверхности пластин (перекрытий) [10] и стержневых элементов (колонн) конструкции:

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\mathbf{B}_2^p \mathbf{m}^p = 0, \quad \mathbf{B}_2^s \mathbf{m}^s = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{m}^p = \{T_x T_y T_{xy} M_x M_y M_{xy}\}$ и $\mathbf{m}^s = \{N Q_2 Q_3 M M_2 M_3\}$ — векторы усилий, при этом \mathbf{m}^p включает продольные и касательную силы и изгибающие и скручивающий моменты в пластине, а \mathbf{m}^s — продольную и поперечные силы и крутящие моменты в стержне, \mathbf{B}_2^p и \mathbf{B}_2^s — матрицы-операторы

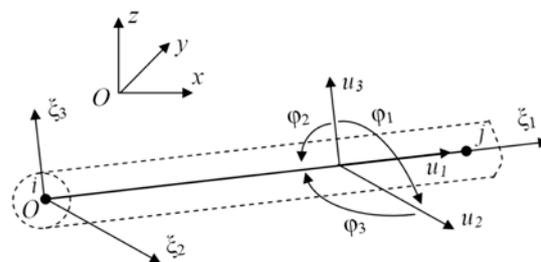


Рис. 3. Направление компонент перемещений и углов поворота для стержней

дифференцирования (в силу того, что для пластин локальная и глобальная системы координат совпадают, матрицы для них приводятся в глобальных координатах):

$$\mathbf{B}_2^p = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2^s = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_1} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_1} \end{pmatrix}.$$

Собственный вес конструкции и поверхностная нагрузка, действующая на ее крышу, в данной постановке не учитываются в силу того, что в начальный момент времени для всей системы известны замеренные фактические вертикальные перемещения, возникшие вследствие неравномерных осадок фундамента. Таким образом, считаем, что эти воздействия учитываются заданием кинематических граничных условий.

Физические соотношения выглядят следующим образом:

$$\mathbf{m}^p = \mathbf{D}^p \boldsymbol{\varepsilon}^p, \quad \mathbf{m}^s = \mathbf{D}^s \boldsymbol{\varepsilon}^s, \quad (2)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}^p = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy} \ \chi_x \ \chi_y \ \chi_{xy}\}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^s = \{\varepsilon_1 \ \varphi_2 \ \varphi_3 \ \chi \ \chi_2 \ \chi_3\}$ — векторы деформаций срединной поверхности пластины и стержня, \mathbf{D}^p и \mathbf{D}^s — матрицы упругих констант

$$\mathbf{D}^p = \begin{pmatrix} \bar{E} & \nu \bar{E} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu \bar{E} & \bar{E} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{G} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{E}h^2}{12} & \frac{\nu \bar{E}h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\nu \bar{E}h^2}{12} & \frac{\bar{E}h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{G}h^2}{12} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}^s = \begin{pmatrix} EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GJ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EI_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & EI_3 \end{pmatrix};$$

при этом $\bar{E} = Eh/(1-\nu^2)$, $\bar{G} = Eh/(1+\nu)$ (здесь E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона); h — толщина пластины; A — площадь поперечного сечения стержня; GJ — жесткость стержня при кручении; I_2 и I_3 — главные моменты инерции поперечного сечения стержня относительно осей ξ_2 и ξ_3 соответственно.

Геометрические соотношения записываются так:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathbf{B}_1^p \mathbf{U}^p, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^s = \mathbf{B}_1^s \mathbf{U}^s, \quad (3)$$

где $\mathbf{U}^p = \{u_x \ u_y \ u_z\}$ и $\mathbf{U}^s = \{u_1 \ u_2 \ u_3 \ \varphi_1\}$ — векторы перемещений, \mathbf{B}_1^p и \mathbf{B}_1^s — матрицы-операторы дифференцирования:

$$\mathbf{B}_1^p = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_1^s = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеют место граничные условия:

– все боковые поверхности пластин являются свободными от нагрузки

$$\begin{aligned} Q_{xx}|_{x,y,z} = Q_{xy}|_{x,y,z} = Q_{xz}|_{x,y,z} = M_{xx}|_{x,y,z} = 0 & \quad (x, y, z) \in L_1; \\ Q_{yy}|_{x,y,z} = Q_{yx}|_{x,y,z} = Q_{yz}|_{x,y,z} = M_{yy}|_{x,y,z} = 0 & \quad (x, y, z) \in L_2, \end{aligned} \quad (4)$$

где L_1 и L_2 — границы пластин, параллельные координатным осям y и x соответственно; $Q_{xx}, Q_{xy}, Q_{xz}, M_{xx}, Q_{yy}, Q_{yx}, Q_{yz}, M_{yy}$ — усилия и моменты на соответствующих границах;

– кинематические ограничения сводятся к заданию в конечном множестве R^i точек $r_i^0 = (x_i, y_i, 0) \in R^i$, принадлежащих срединной поверхности самой нижней (фундаментной) плиты, известных вертикальных перемещений W_{z_i} в местах опирания плиты на колонны (см. Рис. 2):

$$u_z|_{x_i, y_i, 0} = W_{z_i}, \quad i = \overline{1, N_k}, \quad (5)$$

где N_k — число точек опирания.

Также в местах стыковки стержней с пластинами все перемещения и углы поворотов одинаковы в силу того, что узлы соединения конструктивно обеспечивают совместность работы.

Обобщенное решение краевой задачи (1)–(5) осуществлялось численно методом конечных элементов [11] в рамках программного комплекса ANSYS. Для дискретизации исследуемого объекта были выбраны оболочечные конечные элементы типа SHELL63 для плит межэтажных перекрытий и балочные конечные элементы типа BEAM188 для колонн. Элемент SHELL63 определяется четырьмя узлами, каждый из которых имеет шесть степеней свободы в глобальной системе координат x, y, z : перемещения в направлении осей $U = \{u_x, u_y, u_z\}$ и повороты вокруг осей $\varphi = \{\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z\}$. Элемент SHELL63 позволяет учитывать мембранное растяжение–сжатие и изгиб. Каждый узел элемента BEAM188 имеет шесть степеней свободы: перемещения в направлении осей x, y, z и повороты вокруг этих осей. Кроме того, этот элемент допускает различие в геометрических характеристиках поперечных сечений стержней-колонн и смещение относительно их продольной оси и способен воспринимать растяжение, сжатие, кручение и изгиб [12].

3. Напряженно-деформированное состояние в потенциально опасной области конструкции (трехмерная постановка с учетом трещинообразования)

Для оценки возможности растрескивания материала плиты межэтажного перекрытия исходя из анализа результатов решения первой задачи выделим характерный участок, содержащий все основные конструктивные элементы и не имеющий концентраторов напряжений (Рис. 4) и рассмотрим его в трехмерной постановке. При этом учтем только нижнюю часть плиты (ту, что находится ниже срединной поверхности), так как в этой части плиты присутствуют растягивающие напряжения и, следовательно, образование трещин вероятнее. На границы рассматриваемого участка перенесем перемещения соответствующих точек, полученные в предыдущем разделе из расчета напряженно-деформированного состояния пластины.

Математическая постановка задачи включает уравнения [13]:

– уравнения равновесия

$$\operatorname{div} \hat{\sigma}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V, \quad (6)$$

где $\mathbf{r} = (x, y, z)$ — радиус-вектор точки области V ; $\hat{\sigma}$ — тензор напряжений с компонентами σ_{ij} ;

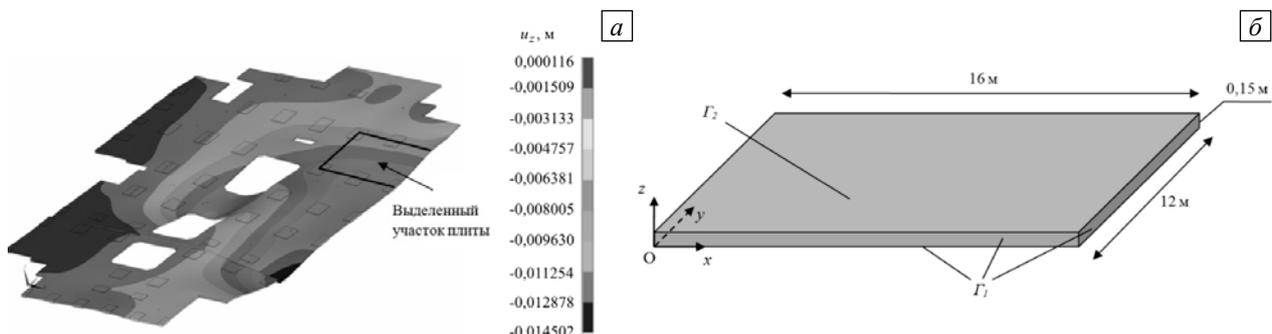


Рис. 4. Поле перемещений в плите межэтажного перекрытия (а) и выделенный характерный участок (б)

– физические соотношения

$$\hat{\sigma}(\mathbf{r}) = {}^4\hat{C}(\mathbf{r}, \hat{\varepsilon}) \cdot \hat{\varepsilon}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V, \quad (7)$$

где $\hat{\varepsilon}$ — тензор деформаций с компонентами ε_{kl} ; материал изначально является изотропным, но, повреждаясь упруго-хрупким образом, становится анизотропным вследствие произвольной ориентации трещин; тогда физические соотношения для данного материала записываются в виде (7), где тензор ${}^4\hat{C}(\mathbf{r}, \hat{\varepsilon})$ содержит 21 независимую упругую константу;

– геометрические соотношения теории малых деформаций

$$\hat{\varepsilon}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{r}) + (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{r}))^T), \quad \mathbf{r} \in V; \quad (8)$$

– граничные условия

$$\hat{\sigma}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Gamma_1. \quad (9)$$

Здесь $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ — вектор внешней единичной нормали к поверхностям множества Γ_1 ;

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{U}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Gamma_2. \quad (10)$$

Множество Γ_1 соответствует торцевым и нижней поверхностям выделенного участка пластины. Верхняя поверхность области образует границу Γ_2 (Рис. 4). Граница Γ_1 является свободной от нагрузок, а на границу Γ_2 перенесем значения всех компонент перемещений в соответствующих точках из решения задачи в рамках теории пластин.

4. Конечно-элементное решение задачи

Решение задачи (6)–(10) осуществлялось численно методом конечных элементов [11] в рамках программного комплекса ANSYS. Использовались объемные восьмиузловые конечные элементы типа SOLID65 с возможностью трещинообразования.

Для описания поведения бетона с учетом раскалывания и раскрашивания в ANSYS использована комбинация двух материалов: *MultiLinear Isotropic* и *Concrete*. Материал *MultiLinear Isotropic* предназначен для случаев, когда задается начальный модуль упругости и в дальнейшем допускается изменение характеристик материала и появление трещины. С помощью материала *Concrete* реализуются алгоритмы объемно-напряженного состояния материала с возможностью трещинообразования в соответствии с конститутивной моделью [14]. Согласно этой модели предполагается: материал конструкции изначально является изотропным линейно-упругим, и, повреждаясь путем растрескивания, становится анизотропным; трещины образуются в плоскостях, направление нормалей к которым совпадает с направлениями действия главных напряжений в момент образования первой трещины.

Модель разрушения упруго-хрупкого материала при сложном напряженном состоянии, учитывающая появление дефектов, может быть представлена в виде:

$$f(\sigma_i)/S \geq [\sigma], \quad (11)$$

где $f(\sigma_i)$ — функция состояния, зависящая от главных напряжений $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$; S — функция прочностных характеристик материала, описывающая трехмерную поверхность разрушения в пространстве главных напряжений; $[\sigma]$ — предел прочности материала на сжатие (растяжение) при действии сжимающих (растягивающих) усилий.

При выполнении условия (11) материал начинает растрескиваться, если одно из главных напряжений растягивающее, или раскрашиваться, если все главные напряжения сжимающие. В противном случае в материале нет ни растрескивания, ни раскрашивания. Появление трещин приводит к формированию ортотропии свойств материала в осях главных напряжений и изменению компонент тензора $C_{ijkl}(\mathbf{r})$ (см. соотношения (7)) в соответствии с закономерностями, подробно изложенными, например, в [15].

5. Формирование граничных условий для трехмерной задачи

Для того чтобы корректно сформулировать граничные условия на поверхностях выделенной трехмерной области V , необходимо через найденные узловые неизвестные, связанные со срединной поверхностью, пересчитать поля перемещений для объемной задачи. На верхней грани трехмерной области, соответствующей срединной поверхности пластины (см. Γ_2 на Рис. 4), перемещения u_x , u_y и u_z интерполируются по системе узловых перемещений точек пластины, а затем вычисляются в узлах новой сетки (Рис. 5).

6. Обсуждение результатов расчета

Использованные при решении задачи определения напряженно-деформированного состояния реального сооружения данные о разности осадок колонн получены за последние одиннадцать месяцев его эксплуатации. Полагая, что наблюдаемый характер осадок будет сохраняться, проанализируем процесс появления трещин в предположении, что осадки колонн увеличатся в k раз. Для этого в разных частях выделенного участка плиты перекрытия рассмотрим несколько групп элементов (Рис. 6). Поскольку по координате z конечно-элементная сетка в исследуемой области содержит четыре слоя, то в каждой выделенной группе присутствуют четыре элемента, которые расположим по высоте пластины в порядке, указанном на рисунке.

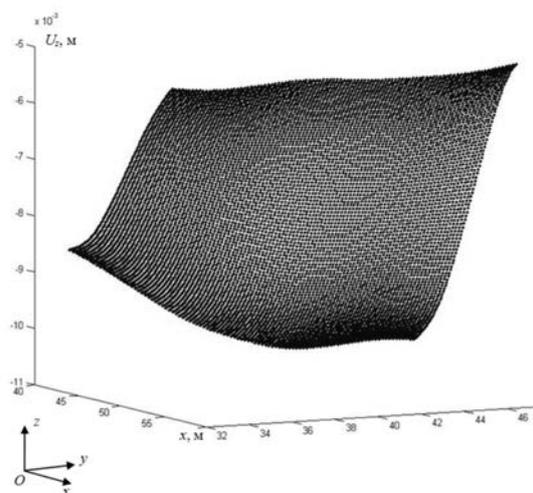


Рис. 5. Перемещения U_z в узлах новой сетки, полученные путем интерполяции

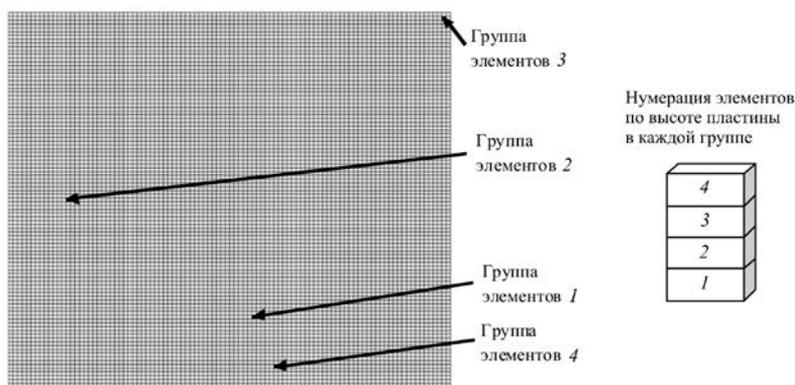


Рис. 6. Расположение рассматриваемых групп элементов в плоскости пластины

В таблицах 1, 2 приведены изменения величин главных напряжений в данных группах элементов в зависимости от параметра k . В таблице 2 используются следующие условные обозначения: трещина открыта (+) или закрыта (\otimes) в указанном направлении ($\perp \sigma$), то есть на площадке, ортогональной направлению действия соответствующего главного напряжения. При появлении трещин в элементе наблюдается релаксация напряжений. Полученные результаты показали, что среди выделенных групп элементов трещины, в соответствии с критерием (11), появляются в группах 1, 3 и 4. В процессе решения задачи по описанному выше алгоритму установлено, что первые трещины образуются при увеличении замеренных осадок в 4,5 раза ($k = 4,5$). Процесс развития трещин в исследуемом объекте приведен на рисунке 7.

Таблица 1. Величины главных напряжений (кПа) в выделенных группах элементов

Номер группы	Главные напряжения	$k = 1$				$k = 4,5$				$k = 10$			
		Номер элемента в группе				Номер элемента в группе				Номер элемента в группе			
		1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	σ_1	620	435	254	76	461	2328	1282	415	1387	922	683	1118
	σ_2	290	205	120	35	-9,96	1059	628	234	-54	152	584	687
	σ_3	-0,274	-4,056	-10,61	-18,4	-532	199	175	137	-208	-68	-56	615

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	σ_1	64,3	44,6	25,5	8,34	579	401	230	75,05	1286	893	509	166
	σ_2	0,189	1,08	1,83	-0,27	1,701	9,684	16,49	-2,43	3,78	21,52	36,64	-5,41
	σ_3	-2,68	-2,86	-3,03	-3,27	-24,1	-25,7	-27,2	-29,46	-53,5	-57,1	-60,5	-65,5
3	σ_1	22,87	116,9	220,5	326,4	103	526	992	1469	492	765	889	2097
	σ_2	-53,43	-49,54	-27,66	31,88	-240	-223	-124	143	-29,06	46,67	-118	-863
	σ_3	-679	-522	-399	-208	-3055	-2351	-1796	-939	-4160	-3617	-3545	-6179
4	σ_1	399,2	278,2	163	44,86	1796	1252	733	202	767	592	766	1185
	σ_2	331,5	231,2	134,5	39,25	1419	1040	605,5	176,6	245	84,92	-10,2	942
	σ_3	1,19	-7,09	-18,54	-35,9	-5,35	-31,9	-83,4	-162	-59,6	-163	-310	-174

Таблица 2. Статус трещин в выделенных группах элементов

Номер группы	Номер элемента в группе	$k = 4,5$			$k = 10$		
		$\perp \sigma_1$	$\perp \sigma_2$	$\perp \sigma_3$	$\perp \sigma_1$	$\perp \sigma_2$	$\perp \sigma_3$
1	1	+			+	+	+
	2						
	3						
	4						
3	1						
	2						
	3						
	4				+	⊗	⊗
4	1				+	+	+
	2				+		
	3				+		
	4						

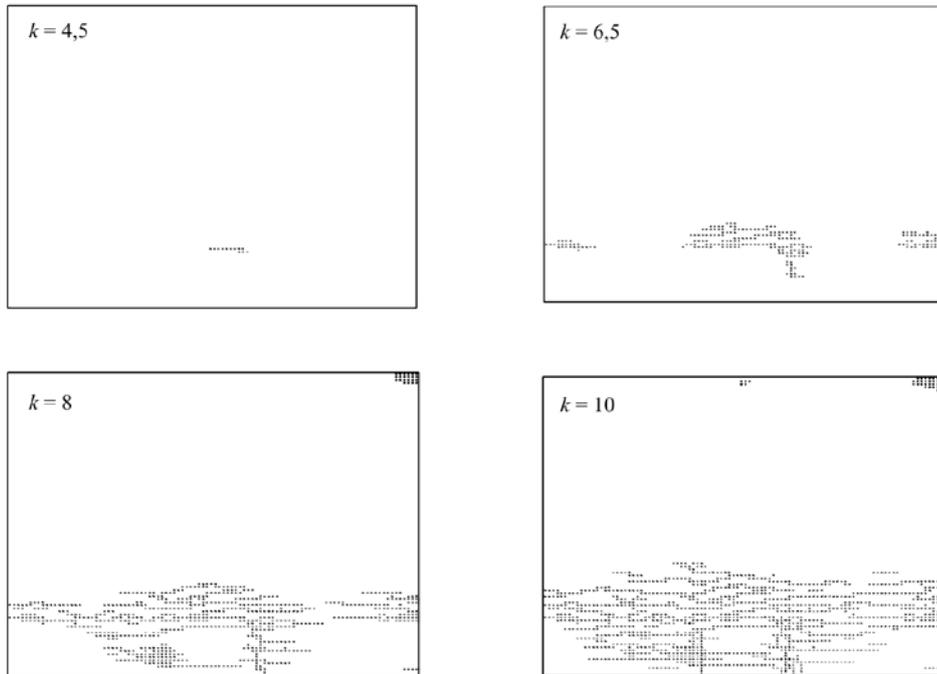


Рис. 7. Картина развития трещин в плите (вид сверху) с увеличением коэффициента k

7. Заключение

Разработана численная пластинчато-стержневая модель здания, позволяющая оценить напряженно-деформированное состояние и выявить опасные зоны, и трехмерная модель опасного участка конструкции для определения степени повреждения материала и характера трещин (открыты или закрыты). Изложена методика переноса граничных условий с расчетной модели пластинки на трехмерную модель.

На основе численных исследований установлено, что наблюдаемые в конструкции перемещения могут привести к появлению трещин в плитах межэтажных перекрытий. Вычислены величины осадок, приводящих к появлению как первых трещин, так и трещин, приводящих к полному разрушению элементов исследуемой конструкции.

Литература

1. Белов Н.Н., Дзюба П.В., Кабанцев О.В., Копаница Д.Г., Югов А.А., Югов Н.Т. Математическое моделирование процессов динамического разрушения бетона // МТГ. – 2008. – № 2. – С. 124-133.
2. Рузанов П.А. Математическое моделирование процессов динамического деформирования и разрушения бетонов в двумерной постановке / Дис. канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. – Н. Новгород, 1999. – 147 с.
3. Чередниченко Т.Ф. О кинетике подрастания трещин и разрушении бетона // Вестн. Волгогр. гос. архит.-строит. унив. Сер.: Стр.-во и архит. – 2008. – Т. 28, № 9. – С. 99-104.
4. Карпенко Н.И., Зайцев Ю.В., Окольников Г.Э., Андрианов А.А., Погосян А.В. Экспериментальное определение параметров механики разрушения высокопрочных бетонов // Academia. Архитектура и строительство. – 2010. – № 3. – С. 553-558.
5. Цветков Р.В., Шардаков И.Н. Моделирование деформационных процессов в системе «грунтовое основание – фундамент – здание» при наличии карстовых явлений // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2010. – Т. 3, № 3. – С. 102-116.
6. Аута С.М., Масленников А.М. Динамический расчет высотных зданий на ветровую нагрузку численным методом // ВГИ. – 2006. – № 3. – С. 27-30.
7. <http://www.pomag.ru/prensa/ostatok-resurs> (дата обращения 22.05.2012)
8. Шматков С.Б. Расчет остаточного ресурса строительных конструкций зданий и сооружений // Вестник ЮУрГУ. Серия: Строительство и архитектура. – 2007. – Т. 94, № 22. – С. 56-57.
9. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов: Справочник / Под общ. ред. В.И. Мяченко. – М.: Машиностроение, 1989. – 520 с.
10. Розин Л.А. Вариационные постановки задач для упругих систем. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. – 224 с.
11. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. — М.: Мир, 1975. – 541 с.
12. Басов К.А. ANSYS. Справочник пользователя. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 640 с.
13. Хан Х. Теория упругости. Основы линейной теории упругости и ее применения. – М.: Мир, 1988. – 344 с.
14. Willam K.J., Warnke E.D. Constitutive model for the triaxial behavior of concrete // Proc. Int. Ass. for Bridge and Struct. Engng. – ISMES, Bergamo, 1975. – V. 19. – P. 174-186.
15. Кашеварова Г.Г., Труфанов Н.А. Численное моделирование деформирования и разрушения системы «здание – фундамент – основание». – Екатеринбург–Пермь: УрО РАН, 2005. – 225 с.

Поступила в редакцию 19.03.12; опубликована в электронном виде 30.06.12