

DOI: [10.7242/1999-6691/2012.5.2.22](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2012.5.2.22)

УДК 536.25(32)

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ СФЕРИЧЕСКОМ СЛОЕ

А.В. Гореликов, А.В. Ряховский, А.С. Фокин

Сургутский государственный университет ХМАО – Югры, Сургут, Россия

Рассматривается задача исследования естественной конвекции во вращающемся сферическом слое, находящемся в центральном поле силы тяжести. Задача решается численно методом контрольного объема в трехмерной постановке. Представлены результаты численного исследования естественной конвекции при различных значениях скорости вращения внешней границы сферического слоя. Получены нестационарные, периодические во времени режимы конвекции, не обладающие осевой симметрией.

Ключевые слова: численное моделирование, естественная конвекция, сферический слой, вращение

NUMERICAL INVESTIGATION OF SOME UNSTEADY REGIMES OF NATURAL CONVECTION IN A ROTATING SPHERICAL SHELL

A.V. Gorelikov, A.V. Ryakhovsky and A.S. Fokin

Surgut State University of KMAO – Yugra, Surgut, Russia

The problem of natural convection in a rotating spherical shell in a central gravitational field is investigated. Three-dimensional governing equations are solved numerically using the control volume method. Numerical simulations of natural convection are performed for various angular velocities of the outer border of a spherical shell. Unsteady, periodic in time, non-axisymmetric solutions are obtained.

Key words: numerical simulation, natural convection, spherical shell, rotation

1. Введение

Исследование естественной конвекции во вращающихся сферических слоях в центральном поле тяжести актуально для решения многих фундаментальных проблем геодинамики, астрофизики и физики атмосферы, а также для некоторых технических задач. В связи с этим в настоящее время активно решаются задачи конвекции в областях сферической геометрии в различных вариантах постановок, например, моделирование теплообмена и течений в отсеках космических аппаратов [1], изучение переноса тепла и момента импульса вихревыми структурами в атмосфере [2], исследование течений, возникающих в результате колебаний нагретой сферы, и их перестройки при изменении управляющих параметров [3] и другие.

Одной из наиболее актуальных проблем геодинамики является задача исследования конвекции во внешнем жидком ядре Земли и непосредственно связанная с ней задача формирования геомагнитного поля. Сложность создания адекватной математической модели геомагнитного поля связана прежде всего с отсутствием прямых сведений о процессах, протекающих в ядре Земли, его составе и физических свойствах. Аналитическое решение задач такого рода обычно невозможно, поэтому для изучения конвекции во внешнем жидком ядре в основном используются численные методы. Однако суждение об адекватности численного моделирования осложняется тем, что оценки параметров внешнего ядра, в частности кинематической вязкости, варьируются в очень широком диапазоне $10^{-7} \dots 10^2 \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$ [4–7]. Кроме того, на современных вычислительных системах невозможно выполнить прямое численное моделирование турбулентной конвекции при высоких значениях числа Релея ($Ra \sim 10^{23}$), которые, как предполагают многие исследователи, отвечают реальным условиям в ядре Земли [5]. Численные эксперименты проводятся, как правило, при значительно меньших значениях, например: $Ra \sim 10^4$ в работе [8], $Ra \sim 10^6$ [9], $Ra \sim 10^5 \dots 10^{10}$ [10], $Ra \sim 10^5$ [11].

Существующие модели геомагнетизма имеют принципиальные различия, но во всех моделях естественная конвекция во внешнем ядре Земли служит механизмом, создающим и поддерживающим магнитное поле. Наиболее распространенной в настоящее время моделью генерации магнитного поля Земли является модель геодинамо [12]. Наряду с ней существуют и другие теории возникновения геомагнитного поля, например, модель, предполагающая, что магнитное поле Земли порождается вихрями заряженных частиц в Северном и Южном полушарии на границе внешнего ядра с мантией [7].

Опубликовано достаточно много работ по численному моделированию естественной конвекции в сферических слоях, в которых данная задача рассматривается в разных постановках [8–18]. Для получения численных решений используются различные подходы и численные методы: конечно-разностные [10, 16, 18], спектральные [17] и полуспектральные [8, 9, 11, 13, 14]. Одними из важнейших результатов численного

моделирования геодинамо стало получение эффекта спонтанной смены полярности магнитных полюсов [8, 9, 14], а также предсказание вращения твёрдого ядра Земли в восточном направлении относительно мантии [13]. Восточный дрейф внутреннего ядра позже подтверждён на основе изучения сейсмологических данных в работах [19, 20]. Как показано в [11], закручивание внутреннего ядра создаётся за счёт переноса момента импульса опускающейся жидкостью, а влияние магнитного поля на вращение ядра пренебрежимо мало.

Ранее авторами данной работы проведено численное исследование задачи естественной конвекции в сферическом слое при постоянной скорости вращения обеих границ слоя [18]. Получены различные типы стационарных решений с осевой симметрией. В настоящей работе эта задача рассматривается в трехмерной постановке, что позволяет получать решения, не обладающие осевой симметрией: именно такой тип решений представляет интерес с точки зрения теории геодинамо [21]. Несимметричные течения не подпадают под действие теоремы запрета Каулинга [21] и, возможно, способны генерировать устойчивое магнитное поле. Постановка решаемой здесь модельной задачи учитывает такое реальное условие конвекции во внешнем ядре Земли, как наличие внутри твердого ядра, которое может вращаться под действием сил вязкого трения со стороны жидкости.

2. Постановка задачи и математическая модель

Рассматривается задача исследования естественной конвекции вязкой несжимаемой жидкости в сферическом слое G_L с внутренним радиусом r_0 и толщиной H . Предполагается, что поле силы тяжести — центральное ($\mathbf{g} = g\mathbf{e}_r$ — ускорение свободного падения, $g = \text{const}$). Положение центра поля тяжести совпадает с центром сферического слоя и началом системы координат. Внешняя граница слоя G_L — твердая и вращающаяся с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_0 = \omega_0 \mathbf{e}_z$ вокруг оси Oz . Внутри области G_L находится однородный твердый шар G_S с радиусом r_0 и моментом инерции I . Шар G_S может вращаться вокруг оси Oz под действием сил вязкого трения со стороны жидкости. Границы слоя G_L — изотермические, при этом температура на внутренней поверхности слоя T_h больше температуры на внешней поверхности T_c .

В стационарном состоянии при отсутствии конвекции изотермический сферический жидкий слой будет вращаться как твердое тело с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_0$. Давление в слое при твердотельном вращении определяется следующим образом: $p_0 = \rho_0 \mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \frac{\rho_0}{2} [\boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{r}]^2 + \text{const}$. При использовании уравнений свободной конвекции во вращающемся сферическом слое в приближении Буссинеска в уравнении движения появляется слагаемое, содержащее центробежное ускорение $\boldsymbol{\omega}_0 \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}_0)$. В настоящей работе предполагается, что $\omega_0^2 r \ll g$, то есть влияние центробежной силы считается пренебрежимо малым. Задача решается в инерциальной системе отсчета и, следовательно, в уравнении движения жидкости отсутствует сила Кориолиса.

В статье приняты следующие обозначения: r, θ, φ — сферические координаты; $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ — орты сферической системы координат; t — время; \mathbf{u} — скорость жидкости; p — давление, $p = p_0 + p'$, где p' — отклонение от p_0 , вызванное естественной конвекцией в жидком слое; T — внутренняя температура слоя; α — коэффициент температуропроводности; β — коэффициент объемного расширения; ρ_0 — плотность жидкости при температуре T_c ; ν — кинематическая вязкость; μ — динамическая вязкость; ω_s — угловая скорость вращения твердого ядра G_S .

Моделирование проводится в безразмерных переменных. В качестве расстояния, времени, скорости, угловой скорости, давления и температуры выступают величины: $R = r/H$; $\tau = \alpha t/H^2$; $\mathbf{U} = H \mathbf{u}/\alpha$ (или в компонентном виде $\mathbf{U} = U\mathbf{e}_r + V\mathbf{e}_\theta + W\mathbf{e}_\varphi$); $\Omega_S = H^2 \omega_s/\alpha$; $P' = H^2 p'/(\alpha\mu)$; $P = P' + (1/2\text{Pr})[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{R}]^2$; $\Theta = (T - T_c)/(T_h - T_c)$. Также используются безразмерные комплексы: $A = r_0/H$ — аспектное отношение; $\text{Ra} = g\beta(T_h - T_c)H^3/(\alpha\nu)$ — число Релея; $\text{Pr} = \nu/\alpha$ — число Прандтля; $J = I/\rho_0 H^5$ — безразмерный момент инерции шара G_S ; $\Omega_0 = H^2 \omega_0/\alpha$ — угловая скорость вращения внешней границы сферического слоя G_L .

Система уравнений свободной конвекции в приближении Буссинеска в сферических координатах (r, θ, φ) с учетом введенных обозначений выглядит так:

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial U}{\partial \tau} + (\mathbf{U}\nabla)U - \frac{V^2 + W^2}{R} \right) = -\frac{\partial P}{\partial R} + \nabla^2 U - \frac{2U}{R^2} - \frac{2}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial(V \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial W}{\partial \varphi} + \text{Ra} \Theta, \quad (1)$$

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial V}{\partial \tau} + (\mathbf{U}\nabla)V + \frac{UV}{R} - \frac{\text{ctg} \theta}{R} W^2 \right) = -\frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \nabla^2 V + \frac{2}{R^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{V}{R^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial W}{\partial \varphi}, \quad (2)$$

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial W}{\partial \tau} + (\mathbf{U}\nabla)W + \frac{UW}{R} + \frac{VW}{R} \text{ctg}\theta \right) = -\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \nabla^2 W + \frac{2}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{W}{R^2 \sin^2 \theta}, \quad (3)$$

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 U) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial W}{\partial \varphi} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + (\mathbf{U}\nabla)\Theta = \nabla^2 \Theta, \quad (5)$$

где $\nabla^2 = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$, $(\mathbf{U}\nabla) = U \frac{\partial}{\partial R} + \frac{V}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{W}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$.

Граничные условия имеют вид:

$$R = A: \quad \Theta = 1; \quad U = V = 0; \quad W = A \Omega_s(\tau) \sin \theta; \quad (6)$$

$$R = A+1: \quad \Theta = 0; \quad U = V = 0; \quad W = (A+1) \Omega_0 \sin \theta. \quad (7)$$

Здесь угловая скорость $\Omega_s(\tau)$ находится из уравнения движения шара G_s :

$$J \frac{d\Omega_s}{d\tau} = \text{Pr} \iint_{S_A} [\mathbf{R}, \mathbf{f}]_z dS, \quad (8)$$

где S_A — поверхность шара G_s ; \mathbf{f} — сила трения, действующая на единицу площади S_A ; \mathbf{R} — безразмерный радиус-вектор точки на сфере S_A .

Силу трения \mathbf{f} можно выразить через компоненты тензора вязких напряжений, и в результате уравнение (8) запишется следующим образом:

$$J \frac{d\Omega_s}{d\tau} = \text{Pr} A^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\partial W}{\partial R} - \frac{W}{R} \right) \Big|_{R=A} \sin^2 \theta d\theta d\varphi. \quad (9)$$

С использованием граничных условий (6) для азимутальной компоненты скорости W уравнение (9) преобразуется к виду:

$$\frac{d\Omega_s(\tau)}{d\tau} + \frac{8\pi}{3} C \Omega_s(\tau) = C F(\tau), \quad (10)$$

где $C = \text{Pr} A^3 / J$, $F(\tau) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial W}{\partial R} \Big|_{R=A} \sin^2 \theta d\theta d\varphi$. Решение уравнения (10) имеет вид (τ_0 — некоторый фиксированный момент времени):

$$\Omega_s(\tau) = \Omega_s(\tau_0) \exp(-8\pi C(\tau - \tau_0)/3) + C \int_{\tau_0}^{\tau} F(\xi) \exp(-8\pi C(\tau - \xi)/3) d\xi. \quad (11)$$

Дискретный аналог выражения (11) $\Omega_s(\tau) \approx \Omega_s(\tau_0) \exp(-8\pi C \Delta\tau/3) + (3/(8\pi))((F(\tau) + F(\tau_0))/2) \times (1 - \exp(-8\pi C \Delta\tau/3))$, где $\Delta\tau = \tau - \tau_0$ — шаг по времени, используется в дальнейшем при аппроксимации граничных условий на поверхности шара G_s .

Задача имеет начальные условия ($\tau = 0$):

$$U = V = 0; \quad W = \Omega_0 R \sin \theta; \quad \Omega_s = \Omega_0; \quad \Theta = A(A+1)/R - A. \quad (12)$$

Числа Нуссельта N на границах сферического слоя G_L ($R = A$ или $R = A+1$) вычисляются по формуле:

$N = Q / (Q|_{Ra=0})$, где $Q = - \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial \Theta}{\partial R} R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$, $Q|_{Ra=0}$ — стационарный тепловой поток в режиме теплопроводности.

Несмотря на то, что задача решается в инерциальной системе отсчета, результаты, демонстрирующие структуру конвективных течений, представляются и анализируются, в силу большей наглядности, в системе отсчета, которая с угловой скоростью Ω_0 равномерно вращается вместе с внешней границей сферического слоя G_L . В этой системе отсчета азимутальная составляющая скорости жидкости имеет вид: $W' = W - \Omega_0 R \sin \theta$.

3. Численная реализация и тесты

Для численного решения системы уравнений свободной конвекции в сферических координатах (1–5) применялся метод контрольного объема [22]. Дискретные аналоги уравнений получены на основе неявной схемы и схемы со степенным законом для аппроксимации конвективных и диффузионных потоков на гранях контрольных объемов. Расчет поля течения производился согласно модифицированному полунявному методу для связывающих давление уравнений SIMPLER [22]. Программный код написан на языке Fortran 90 и распараллелен с помощью директив стандарта OpenMP для использования на многопроцессорных вычислительных системах с общей памятью.

Программа численного решения задач гидродинамики и теплообмена в сферическом слое тестировалась на достаточно большом количестве краевых и начально-краевых задач. В качестве одного из тестов рассматривалась начально-краевая задача исследования нестационарного течения изотермической жидкости через сферический слой G_L в направлении оси Oz :

$$G_L = \{ (R, \theta, \varphi) : 0,5 < R < 1; 0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi < 2\pi \} :$$

$$\frac{DU}{D\tau} = -\nabla P + \operatorname{div} \hat{S} + \cos \tau \mathbf{F}(R, \theta, \varphi),$$

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = 0,$$

$$\mathbf{U}|_{R=0,5} = \sin \tau \mathbf{F}|_{R=0,5}, \quad \mathbf{U}|_{R=1} = \sin \tau \mathbf{F}|_{R=1}, \quad \mathbf{U}|_{\tau=0} = 0,$$

где $\mathbf{F}(R, \theta, \varphi) = 0,5 \cdot ([R \sin \theta \cos \varphi]^2 - 1)(\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta)$; $\hat{S} = H^2 \hat{\sigma} / \alpha \mu$, $\hat{\sigma}$ — тензор вязких напряжений.

Задача имеет следующее аналитическое решение: $\mathbf{U}_0 = \mathbf{F}(R, \theta, \varphi) \sin \tau$, $P_0 = R \cos \theta \sin \tau + \text{const}$. Точность численного решения оценивалась по максимальным абсолютным и средним относительным ошибкам, которые определялись по формулам: $\Delta f = \max_{G_L} |f - f_0|$; $\delta f = \frac{1}{V_L} \int_{G_L} \left| \frac{f - f_0}{f_0} \right| dv \cdot 100\%$; здесь f и f_0 — численное и точное значения любой зависимой переменной; V_L — объем сферического слоя.

В таблице 1 приведены максимальные значения ошибок для компонент скорости на отрезке времени $\tau \in [1, 3]$; n_r , n_θ , n_φ — количество расчетных точек вдоль соответствующих координатных линий. Для азимутальной компоненты W показана только абсолютная ошибка, поскольку $W_0 \equiv 0$.

Таблица 1. Результаты теста

$n_r \times n_\theta \times n_\varphi ; \Delta \tau$	ΔU	$\delta U, \%$	ΔV	$\delta V, \%$	ΔW
$7 \times 16 \times 30 ; 1 \cdot 10^{-3}$	$1,734 \cdot 10^{-3}$	0,3021	$5,191 \cdot 10^{-3}$	0,8735	$1,121 \cdot 10^{-3}$
$12 \times 32 \times 62 ; 5 \cdot 10^{-3}$	$4,015 \cdot 10^{-4}$	0,0655	$1,155 \cdot 10^{-3}$	0,1910	$2,798 \cdot 10^{-4}$
$22 \times 62 \times 122 ; 1 \cdot 10^{-4}$	$1,272 \cdot 10^{-4}$	0,0164	$2,945 \cdot 10^{-4}$	0,0460	$7,384 \cdot 10^{-5}$

Для численного решения задачи естественной конвекции (1–7) преимущественно использовалась равномерная расчетная сетка с числом точек: $n_r = 62$, $n_\theta = 82$, $n_\varphi = 122$. Таблица 2 содержит некоторые результаты, характеризующие нестационарный режим конвекции ($Ra = 10^4$, $\Omega_0 = 30$), полученные на различных расчетных сетках с разными шагами по времени. Режим конвективного течения во всех случаях был один и тот же — это нестационарный режим периодических колебаний. При измельчении сетки и уменьшении шага по времени значения локальных и интегральных величин существенно не изменялись, зато намного увеличивалось время счета. Таким образом, в данном случае равномерная сетка $n_r = 62$, $n_\theta = 82$, $n_\varphi = 122$ оказалась достаточной для качественного анализа нестационарных ламинарных режимов конвекции.

Таблица 2. Результаты тестов на численную сходимость ($Ra = 10^4$, $\Omega_0 = 30$)

$n_r \times n_\theta \times n_\varphi$; Δt	Ω_s	N	$\max U $	$\max V $
$32 \times 72 \times 82$; $2 \cdot 10^{-4}$	30,43	1,75	23,88	17,40
$62 \times 82 \times 122$; $1 \cdot 10^{-4}$	31,44	1,77	26,31	17,28
$82 \times 102 \times 142$; $5 \cdot 10^{-5}$	31,85	1,79	28,43	17,19

4. Результаты расчетов

В настоящей работе на основе данных из [4, 6, 23] предполагалось, что $\mu \sim 10^{-2} \text{ Па} \cdot \text{с}$, $\rho_0 = 10^4 \text{ кг/м}^3$, $\alpha \sim 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ и, следовательно, можно считать, что $Pr = 1$. Значения аспектного отношения и безразмерного момента инерции твердого ядра G_s соответствовали параметрам ядра Земли [4, 24]: $A = 0,56$; $J = 0,1$. Цель исследования заключалась в выяснении степени влияния скорости вращения внешней границы на конвекцию в сферическом слое и скорость вращения внутреннего ядра G_s . Безразмерная угловая скорость Ω_0 вращения внешней границы сферического слоя G_L варьировалась в диапазоне значений от 5 до 120. Все расчеты были выполнены при фиксированном числе Релея: $Ra = 10^4$. Значение числа Релея выбиралось таким, чтобы обеспечивался ламинарный режим конвекции во всем диапазоне изменения Ω_0 и было приемлемым время получения нестационарных трехмерных решений. При выборе учитывались результаты проведенных ранее исследований осесимметричных режимов конвекции [18].

На рисунке 1 показаны структура течения и распределение температуры в меридиональной плоскости северного полушария Земли при двух значениях угловой скорости Ω_0 .

В случае $\Omega_0 = 5$ (Рис. 1, а) с течением времени формируется стационарное решение с осевой симметрией. Решение симметрично относительно плоскости экватора ($\theta = \pi/2$). Меридиональная циркуляция в северном и южном полушариях имеет одновихревую структуру с восходящими потоками у оси вращения и нисходящими в плоскости экватора. При равномерном вращении сферического слоя момент импульса жидкости достигает наибольших значений в области экватора у внешней границы слоя. Из рисунка видно, что в процессе конвекции жидкость опускается в плоскости экватора, что приводит к значительному увеличению момента импульса и скорости вращения внутреннего ядра: $\Omega_s = 20,75$. При данном режиме конвекции число Нуссельта на границах составляет: $N = 1,78$. Увеличение скорости вращения внутреннего ядра за счет свободной конвекции было получено численными методами в работах [11–15]. Кроме того, в [19, 20] экспериментально зафиксирован восточный дрейф внутреннего ядра Земли по отношению к мантии.

Другой тип стационарного решения получен при угловой скорости внешней границы $\Omega_0 = 15$ (Рис. 1, б). Решение также симметрично относительно оси вращения и плоскости экватора, но имеет обратное по сравнению с предыдущим случаем направление меридиональной циркуляции. Структура меридионального течения характеризуется восходящими потоками в области экватора и нисходящими у полюсов. Скорость вращения твердого ядра $\Omega_s = 18$ по-прежнему больше скорости вращения внешней границы, но разница между угловыми скоростями существенно уменьшается. Это связано с тем, что при данном типе конвекции жидкость опускается вблизи полюсов и, следовательно, механизм переноса момента импульса становится значительно менее эффективным. Число Нуссельта возрастает до $N = 1,82$.

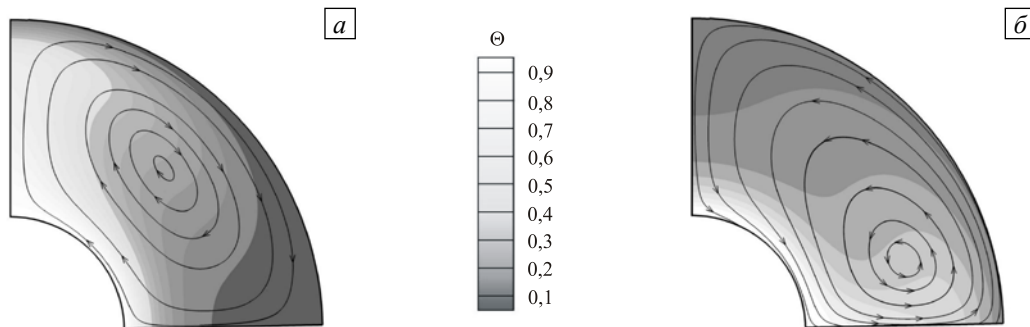


Рис. 1. Структура течения (сплошные линии) и распределение температуры (градации серого цвета) в меридиональной плоскости северного полушария ($\theta \leq \pi/2$) для осесимметричных решений при двух значениях Ω_0 : 5 (а), 15 (б)

При $\Omega_0 = 30$ конвекция переходит в режим периодических колебаний, в котором скорость, давление и температура периодически изменяются с течением времени. На рисунке 2 представлены примеры зависимостей от времени локальных величин (радиальной U и азимутальной W компонент скорости в фиксированной точке области G_L). Характерная для данного типа конвекции поверхность постоянной температуры показана на рисунке 3, а. Как видно из этого рисунка, конвективные валы изгибаются относительно плоскости экватора таким образом, что изоповерхности температуры приобретают седловидную форму. Периодическая конвективная структура, не меняя размеров и форм изоповерхностей всех величин (температуры, давления, компонент скорости), равномерно вращается вокруг оси Oz в направлении движения границ слоя (показано стрелкой), то есть представляет собой азимутальную волну. Интегральные характеристики, такие как тепловые потоки на границах сферического слоя G_L и скорость вращения твердого ядра, имеют при этом типе конвекции постоянные значения: $N = 1,78$, $\Omega_s = 31,44$. Значение угловой скорости вращения азимутальной волны составляет 31,18 и лежит между значениями скоростей вращения границ слоя. Таким образом, скорость вращения такой системы координат, в которой конвекция в режиме периодических колебаний будет стационарной, не совпадает со скоростями границ слоя G_L . Разница между угловыми скоростями границ слоя G_L становится существенно меньшей, чем в осесимметричном режиме при $\Omega_0 = 15$, и составляет 4,8% от соответствующих этому режиму значений.

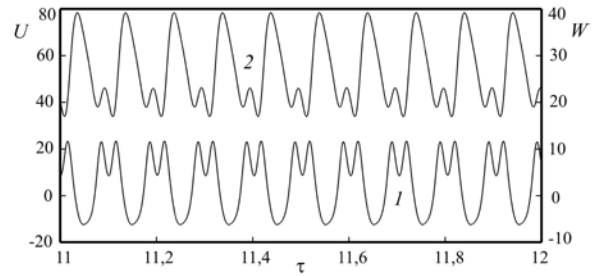


Рис. 2. Зависимость от времени радиальной U (кривая 1) и азимутальной W (2) компонент скорости точек жидкого слоя при $R = 0,95$ и $\theta = 1,12$ в режиме азимутальной волны ($\Omega_0 = 30$)

Структура течения при $\Omega_0 = 30$ показана на рисунке 3, б. Изображены линии тока тангенциальных составляющих скорости (V , W') на сферической поверхности слоя, имеющей радиус $R = 1,452$, в системе отсчета, равномерно вращающейся вместе с внешней границей слоя G_L . Градациями серого цвета на рисунке показано распределение давления; темный цвет соответствует более низким значениям давления. Области пониженного давления располагаются у оси вращения в северном ($\theta < \pi/2$) и южном ($\theta > \pi/2$) полушариях и имеют одинаковые размеры и форму, но повернуты относительно друг друга на 90° . В этих приполярных областях образуются вихри по типу циклонов, в центрах вихрей опускается холодная жидкость. Изогнутая светлая полоса на рисунке 3, б, опоясывающая сферу, соответствует области повышенного давления с восходящими потоками нагретой жидкости.

При увеличении скорости вращения внешней границы до $\Omega_0 = 40$ конвективные валы распадаются на три основные конвективные ячейки, в которых восходящие потоки нагретой жидкости локализованы в области экватора. Геометрическая форма системы конвективных ячеек напоминает спираль с тремя рукавами. Основные конвективные ячейки, образующие рукава спирали, в приполярных областях соединяются конвективными валами. В процессе конвекции спираль поворачивается в направлении вращения границ сферического слоя. Размеры рукавов спирали и расположение конвективных валов меняются с течением времени, но в целом описанная конфигурация сохраняется. Колебания локальных и интегральных характеристик в данном режиме конвекции становятся непериодическими. Амплитуды колебаний тепловых потоков на границах слоя G_L и угловой скорости внутреннего ядра G_s составляют порядка 10% от своих средних значений.

Дальнейшее увеличение скорости вращения внешней границы сферического слоя стабилизирует течение, уменьшая амплитуды колебаний интегральных характеристик. При $\Omega_0 = 75$ колебания локальных величин вновь становятся периодическими, а интегральные характеристики выходят на постоянные значения: $N = 1,28$, $\Omega_s = 76,3$. По-прежнему наблюдается восточный дрейф внутреннего ядра G_s по отношению к внешней границе. На рисунке 3, в показан вид сверху (из конца оси Oz) на характерную для данного режима конвекции поверхность постоянной температуры. Структура конвективного течения состоит из трех основных ячеек, в которых восходящие потоки локализованы в экваториальной области. В плоскости экватора структура конвективных ячеек обладает подобием трехлучевой симметрии. В южном и северном полушариях основные конвективные ячейки соединяются между собой перемычками — небольшими конвективными валами, имеющими форму подковы. В каждом полушарии в фиксированный момент времени перемычкой соединяются две конвективные ячейки из трех. Движение всей конвективной структуры состоит из азимутального вращения системы основных ячеек и периодического изменения положения перемычек между ними. Таким образом, в случае конвекции в режиме периодических

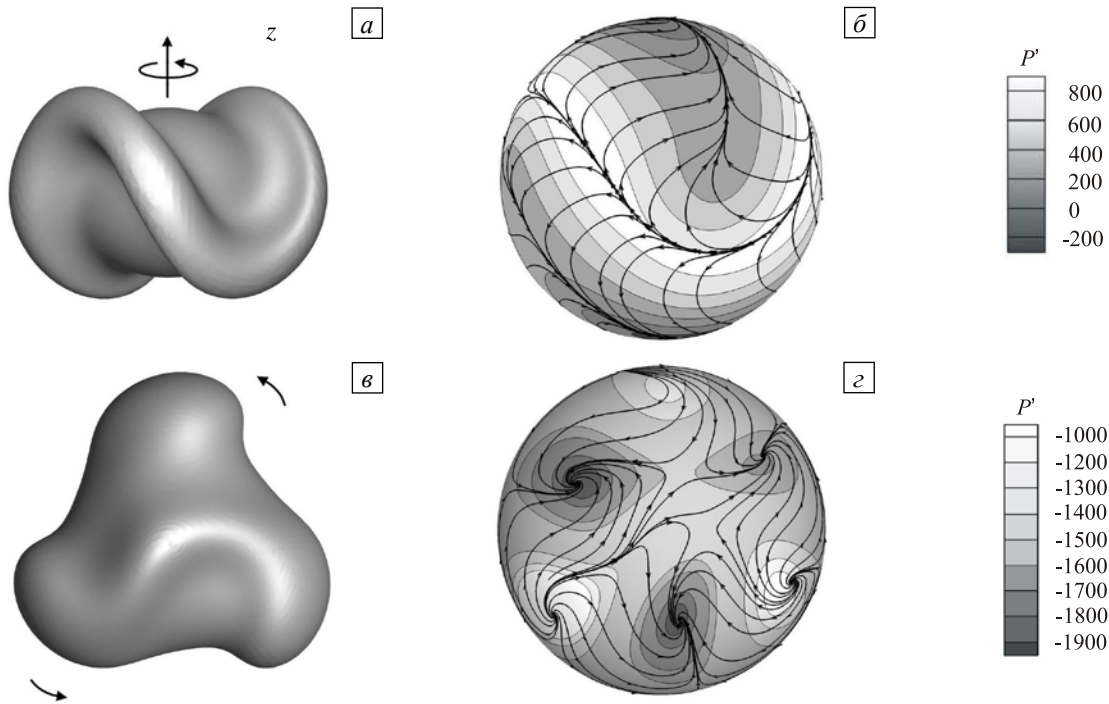


Рис. 3. Конвекция в режиме колебаний при двух значениях угловой скорости вращения внешней границы сферического слоя $\Omega_0 = 30$ – (а, б); $\Omega_0 = 75$ – (в, г); изоповерхности температуры ($\Theta = 0,3$) – (а, в); линии тока тангенциальных составляющих скорости на сферической поверхности ($R = 1,452$) в системе отсчета, равномерно вращающейся вместе с внешней границей слоя – (б, г)

колебаний не существует системы отсчета, в которой решение было бы стационарным. Скорость азимутального вращения основных конвективных ячеек приближенно равна 70, что заметно меньше скорости внешней границы слоя: $\Omega_0 = 75$. На рисунке 3, г показана структура течения в северном полушарии ($\theta < \pi/2$) в системе отсчета, равномерно вращающейся вместе с внешней границей сферического слоя. Течение в каждом полушарии состоит из трех циклонов и трех антициклонов. В циклонах северного полушария жидкость циркулирует против часовой стрелки, в антициклонах — по часовой стрелке, в южном полушарии направления циркуляций меняются на противоположные.

При дальнейшем увеличении скорости вращения внешней границы естественная конвекция ослабевает и полностью прекращается при $\Omega_0 = 120$. Снижение интенсивности конвекции обусловлено действием силы Кориолиса, которая пропорциональна Ω_0 . Сила Кориолиса уменьшает радиусы кривизны траекторий, по которым движутся частицы жидкости в конвективных ячейках, что приводит к измельчению конвективных ячеек и, как следствие, к ослаблению конвективного переноса тепла.

Для всех проведенных численных экспериментов на рисунке 4 представлены отношения угловых скоростей Ω_s/Ω_0 и значения числа Нуссельта N

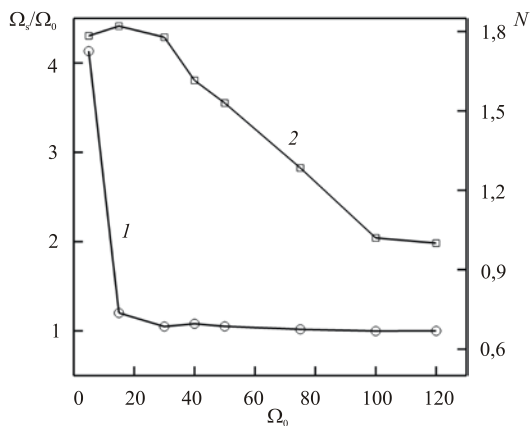


Рис. 4. Зависимость отношения Ω_s/Ω_0 (кривая 1) и числа Нуссельта N (2) от угловой скорости Ω_0 вращения внешней границы сферического слоя

в зависимости от скорости вращения внешней границы Ω_0 . Для непериодических нестационарных режимов конвекции ($\Omega_s = 40; 50$) приведены средние значения. Результаты расчетов показывают (кривая 1), что только для стационарных решений с осевой симметрией, то есть для малых значений Ω_0 , угловая скорость вращения внутреннего ядра G_s существенно выше скорости вращения внешней границы. Для остальных значений Ω_0 , то есть для нестационарных режимов конвекции, отношение Ω_s/Ω_0 близко к 1. Число Нуссельта слабо зависит от скорости вращения внешней границы при малых значениях Ω_0 и практически линейно убывает в диапазоне существования нестационарных режимов конвекции $30 \leq \Omega_0 \leq 100$ (кривая 2).

В данной работе численные решения получены при постоянном значении модуля ускорения свободного падения. В жидком ядре Земли ускорение свободного падения изменяется от значения $g_0 = 4,9 \text{ м/с}^2$ на границе с твердым ядром, до значения $g_1 = 10,67 \text{ м/с}^2$ на границе ядро–мантия [4] и достаточно хорошо аппроксимируется линейной зависимостью: $g(r) = (g_1 - g_0)(r - r_0)/H + g_0$. Локальное значение числа Релея в данном случае имеет вид: $(\gamma(R - A) + 1)Ra^{(0)}$, где $Ra^{(0)} = g_0\beta(T_h - T_c)H^3/(\alpha\nu)$ — число Релея на нижней границе сферического слоя, а $\gamma = (g_1 - g_0)/g_0$ — безразмерный параметр, характеризующий степень неоднородности модуля ускорения свободного падения. Можно определить среднее по сферическому слою G_L число Релея: $\overline{Ra} = \frac{1}{V_L} \int_{G_L} (\gamma(R - A) + 1)Ra^{(0)} dV$, где для внешнего (жидкого) ядра Земли $\gamma \approx 1,18$ и $\overline{Ra} \approx 1,76Ra^{(0)}$.

Результаты численного моделирования нестационарных режимов конвекции в неоднородном по модулю поле тяжести при $\gamma \approx 1,18$; $\overline{Ra} = 10^4$; $\Omega_0 = 30$ (или $\Omega_0 = 75$) показывают, что по сравнению со случаем $g = \text{const}$ решения качественно не изменяются, то есть имеют такой же вид, как на рисунке 3. Относительные изменения числа Нуссельта δN и скорости вращения твердого ядра $\delta\Omega_s$ по сравнению со случаем $g = \text{const}$ при $\Omega_0 = 30$ составляют: $\delta N \approx -5\%$, $\delta\Omega_s \approx -5\%$; и при $\Omega_0 = 75$: $\delta N \approx -9\%$, $\delta\Omega_s \approx -1\%$.

5. Заключение

Результаты исследования показывают, что в рассмотренном случае конвективное течение в сферическом слое стационарно и обладает осевой симметрией только при малых скоростях вращения внешней границы ($\Omega_0 < 30$). В интервале $30 \leq \Omega_0 \leq 100$ формируются нестационарные режимы конвекции без осевой симметрии. Дальнейшее увеличение Ω_0 приводит к исчезновению естественной конвекции.

Найдены два различных типа нестационарных режимов конвекции, в которых локальные величины изменяются периодически, а интегральные характеристики имеют постоянные значения. Согласно теореме запрета Каулинга [21] устойчивое осесимметричное магнитное поле не может генерироваться течениями с осевой симметрией. Полученные нестационарные решения интересны тем, что, с одной стороны, они не подпадают под действие теоремы запрета Каулинга, а с другой стороны, — это ламинарные течения с постоянными значениями интегральных характеристик.

Литература

1. Полежаев В.И., Никитин С.А. Локальные эффекты теплообмена и температурное расслоение при свободной конвекции в замкнутых объемах // Тр. 4-й Российской национальной конференции по теплообмену. — РНКТ 4, Москва, 23-27 октября 2006 — М.: Издательский дом МЭИ, 2006. — Т. 1. — С. 93-98.
2. Астафьева Н.М. Структуры, формирующиеся во вращающемся сферическом слое под влиянием условий, имитирующих глобальные потоки тепла в атмосфере // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. — 2006. — Т. 3, № 1. — С. 245-256.
3. Любимова Т.П., Черепанова А.А. Течения, индуцируемые колебаниями нагретой сферы // Вычисл. мех. сплош. сред. — 2011. — Т. 4, № 3. — С. 74-82.
4. Сорохтин О.Г., Ушаков С.А. Развитие Земли: учеб. для вузов. — М.: Изд-во МГУ, 2002. — 506 с.
5. Olson P. Laboratory experiments on the dynamics of the core // Physics of the Earth and Planetary Interiors. — 2011. — V. 187, N. 1-2. — P. 1-18. DOI
6. Минеев В.Н., Фунтиков А.И. Об измерении вязкости расплавов металлов при высоких давлениях и расчетах вязкости применительно к ядру Земли // УФН. — Т. 174, № 7. — 2004. — С. 727-742. DOI
7. Кирдяшкин А.Г., Добрецов Н.Л., Кирдяшкин А.А. Турбулентная конвекция и магнитное поле внешнего ядра Земли // Геология и геофизика. — 2000. — Т. 41, № 5. — С. 601-612.
8. Olson P., Driscoll P., Amit H. Dipole collapse and reversal precursors in a numerical dynamo // Phys. Earth. Planet. Inter. — 2009. — V. 173, N. 1-2. — P. 121-140. DOI
9. Olson P.L., Glatzmaier G.A., Coe R.S. Complex polarity reversals in a geodynamo model // Earth Planet. Sci. Lett. — 2011. — V. 304, N. 1-2. — P. 168-179. DOI
10. Miyagoshi T., Kageyama A., Sato T. Zonal flow formation in the Earth's core // Nature. — 2010. — V. 463. — P. 793-796. DOI
11. Решетняк М.Ю. Вращение внутреннего ядра Земли в модели геодинамо // ДАН. — 2001. — Т. 380, № 5. — С. 15-19.
12. Glatzmaier G.A. Geodynamo: Numerical simulations. Encyclopedia of Geomagnetism and Paleomagnetism / Eds. D. Gubbins and E. Herrero-Bervera. — Springer, 2007. — P. 302-306.
13. Glatzmaier G.A., Roberts P.H. A three-dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely conducting inner core and mantle // Phys. Earth Planet. Inter. — 1995. — V. 91, N. 1-3. — P. 63-75. DOI

14. *Glatzmaier G.A., Roberts P.H.* A three-dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal // *Nature*. – 1995. – V. 377. – P. 203-209. DOI
15. *Reshetnyak M., Steffen B.* The subgrid problem of thermal convection in the Earth's liquid core // *Numerical Methods and Programming*. – 2004. – V. 5. – P. 41-45.
16. *Kageyama A., Yoshida M.* Geodynamo and mantle convection simulations on the Earth Simulator using the Yin-Yang grid // *J. Phys.: Conf. Ser.* – 2005. – V. 16. – P. 325-338. DOI
17. *Водинчар Г.М., Шевцов Б.М.* Модель конвекции в сферическом вращающемся слое // *Матем. моделирование*. – 2009. – Т. 21, №7. – С. 121-128.
18. *Гореликов А.В., Ряховский А.В.* Численное моделирование естественной конвекции в сферическом слое // *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.* – 2008. – № 3. – С. 77-84.
19. *Song X., Richards P.G.* Seismological evidence for differential rotation of the Earth's inner core // *Nature*. – 1996. – V. 382. – P. 221-224. DOI
20. *Su W., Dziewonski A.M., Jeanloz R.* Planet within a planet: rotation of the inner core of Earth // *Science*. – 1996. – V. 274, N. 5294. – P. 1883-1887. DOI
21. *Каулинг Т.* Магнитная гидродинамика. – М.: Атомиздат, 1978. – 144 с.
22. *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.
23. *Ивлиев А.Д., Анахов С.В., Мориллов В.В.* Температуропроводность железа в твердом и жидком состояниях // *Физические свойства металлов и сплавов: юбилейный сборник избранных научных трудов*. – Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2009. – С. 49-56.
24. *Жаров В.Е.* Сферическая астрономия. – Фрязино: Век-2, 2006. – 480 с.

Поступила в редакцию 17.10.11; опубликована в электронном виде 30.06.12

Сведения об авторах

Гореликов Андрей Вячеславович, кфмн, доц., Сургутский государственный университет ХМАО–Югры (СурГУ ХМАО–Югры), 628400, Сургут, ул. Ленина, д. 1; E-mail: gorelikov_a@list.ru

Ряховский Алексей Васильевич, асс., СурГУ ХМАО–Югры; E-mail: echo47@rambler.ru

Фокин Александр Сергеевич, асп., СурГУ ХМАО–Югры; E-mail: mister-fokin@yandex.ru