

DOI: [10.7242/1999-6691/2012.5.2.20](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2012.5.2.20)

УДК 539.3

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МУЛЬТИПОЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В БЕСКОНЕЧНОЙ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ, СОДЕРЖАЩЕЙ НЕСКОЛЬКО КРУГОВЫХ ОТВЕРСТИЙ

В.В. Мокряков

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

В рамках теории упругости рассмотрена плоская задача определения поля напряжений, возникающего при взаимодействии нескольких близко расположенных круговых отверстий в плоскости в условиях двухосного нагружения на бесконечности. Для решения задачи применен метод мультипольного разложения, основанный на представлении функции скачка смещений в виде суммы мультиполей. Исследовано несколько вариантов расположения отверстий и их конфигураций. Построены изолинии напряжений в областях взаимовлияния отверстий и в окрестностях их контуров. Особое внимание уделено концентрации напряжений на краях отверстий. Определены точки концентрации и ее величины, проведено сравнение с таковыми у одиночного отверстия при тех же нагрузках.

*Ключевые слова:* упругость, плоская задача, мультиполи, концентрация напряжений

## APPLICATION OF THE MULTIPOLE EXPANSION METHOD TO EVALUATION OF THE STRESS STATE OF AN INFINITE ELASTIC PLANE CONTAINING SEVERAL CIRCULAR HOLES

V.V. Mokryakov

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

The 2D-elasticity problem of several closely-spaced circular holes in an infinite plane under biaxial loading at infinity is considered. The solution of the problem is found using the method of multipole decomposition, which is based on the representation of the jump displacement function as a sum of multipoles. Different arrangements of holes and their configurations are considered. The stress state in the region of mutual interaction of holes and near their contours is obtained. Special attention is given to the stress concentration around the holes. The points and magnitudes of stress concentration are determined and compared with those obtained around a single hole under the same loading conditions.

*Key words:* elasticity, plane problem, multipoles, stress concentration

### 1. Введение

Для изучения напряженно-деформированного состояния возле отверстий в плоскости автором предложен метод мультипольного разложения (ММР) (см. [1, 2]). Метод основан на использовании сингулярных граничных интегральных уравнений [3–8] и представляет создаваемое отверстиями упругое поле как сумму мультиполей — точечных концентраторов напряжений. Метод позволяет качественно и количественно оценивать вклад различных видов нагружений в общую картину полей. В работе [1] он применен для исследования влияния, которое оказывают два близко расположенных одинаковых отверстия на напряженное состояние в своих окрестностях. Особое внимание уделено тому, как зависит концентрация напряжений на краях отверстий от их взаимного расположения и приложенной нагрузки. Представлены зависимости максимальных напряжений на контуре и показаны точки концентрации напряжений при разной ориентации пары отверстий относительно внешней нагрузки.

В [2] метод распространен на двойкопериодическую систему отверстий с произвольными периодами — структуру, имеющую важное прикладное значение [9, 10]. Вычислены эффективные характеристики пористой среды и доказано, что для расчета достаточно только двух членов мультипольного разложения.

В данной работе автор обобщает метод на случай нескольких произвольно расположенных круговых отверстий различных радиусов. Рассмотрено несколько конфигураций области: с четырьмя, шестью, восьмью и десятью отверстиями, расположенными по кольцу; с выстроенными в ряд одинаковыми отверстиями; с группой из нескольких малых отверстий в поле одного или двух больших отверстий. Для всех случаев построено напряженное состояние в области взаимовлияния отверстий и в окрестностях их контуров. Особое внимание уделено концентрации напряжений на контурах отверстий. Определены местоположение и величины концентрации. Проведено сравнение полей напряжений и расположение точек концентрации с таковыми у одиночного отверстия при тех же нагрузках.

В работе используются обозначения:  $i$  — комплексная единица;  $z$ ,  $\bar{z}$  — комплексное и сопряженное к нему числа;  $N$  — количество отверстий;  $z_j^0$ ,  $R_j$  — координата центра и радиус отверстия  $j$ ;

$\sigma(T_j)$  — нагрузки на контуре  $j$ -го отверстия;  $p, q$  — нагрузки на бесконечности;  $\Phi(z), \Psi(z)$  — комплексные потенциалы Колосова–Мусхелишвили;  $\Phi_\infty, \Psi_\infty$  — значения потенциалов на бесконечности;  $\Phi_j, \Psi_j$  — вклад отверстия  $j$  в общие потенциалы;  $T_j, g'_j$  — координата точки и производная функции смещения на  $j$ -м контуре;  $\xi_j, \eta_m$  — локальные координаты точек на  $j$ -м и  $m$ -м контурах;  $r_{jm}, \zeta_{jm}$  — отношение радиусов и относительное расстояние между центрами  $j$ -го и  $m$ -го отверстий;  $K^{jm}(\xi, \eta), L^{jm}(\xi, \eta)$  — интегрирующие ядра;  $A^m(\eta)$  — свободный член;  $g_n^j$  — коэффициент мультипольного разложения;  $K_n^{jm}(\eta), L_n^{jm}(\eta)$  — интегрирующие ядра для порядка  $n$ ;  $K_{nk}^{jm}, L_{nk}^{jm}$  — суммирующие ядра  $n$ -го и  $k$ -го порядков;  $A_k^m$  — свободный член  $k$ -го порядка;  $G(\eta)$  — функция невязки;  $G_k^m$  — коэффициенты разложения функции невязки.

**2. Постановка задачи**

Рассмотрим следующую задачу. Пусть в упругой плоскости расположено  $N$  круговых отверстий  $L_j$  произвольных радиусов  $R_j$  (Рис. 1). Центры отверстий находятся в точках  $z_j^0$ . Плоскость на бесконечности подвергается растягивающим горизонтальным  $p$  и вертикальным  $q$  нагрузкам. Нагрузка на контуре отверстия  $j$  задана функцией  $\sigma(T_j)$ , где  $T_j$  — глобальные координаты контура  $j$ -го отверстия.

Требуется найти напряженное состояние в плоскости, в частности, построить картины максимального усилия растяжения (то есть первого главного напряжения,

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = (\sigma_x + \sigma_y)/2 + \sqrt{((\sigma_x - \sigma_y)/2)^2 + \tau_{xy}^2}$$

и максимального усилия сдвига

$$\tau_{\max} = \sqrt{((\sigma_x - \sigma_y)/2)^2 + \tau_{xy}^2} \quad [1].$$

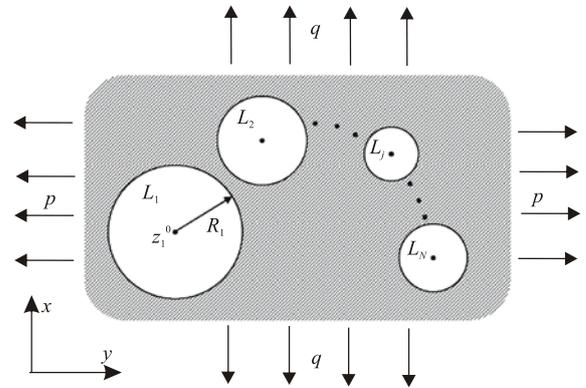


Рис. 1. Схема к постановке задачи

**3. Основные уравнения**

Согласно ММР запишем потенциалы  $\Phi(z), \Psi(z)$  как сумму потенциала, определяющего нагрузки на бесконечности, и потенциалов, создаваемых каждым из отверстий:  $\Phi(z) = \Phi_\infty + \sum_{j=1}^N \Phi_j$ ,

$\Psi(z) = \Psi_\infty + \sum_{j=1}^N \Psi_j$ . Здесь  $\Phi_\infty = (p + q)/4$  и  $\Psi_\infty = (q - p)/2$ . Потенциалы  $j$ -го отверстия описываются как

$$\Phi_j(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} \frac{g'_j dT_j}{T_j - z}, \quad \Psi_j(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} \left[ \frac{\bar{g}'_j d\bar{T}_j}{T_j - z} - \frac{\bar{T}_j g'_j dT_j}{(T_j - z)^2} \right] + \frac{1}{2\pi(z - z_j^0)^2} \int_{L_j} [\bar{T}_j g'_j dT_j - T_j \bar{g}'_j d\bar{T}_j].$$

Комплексные функции  $g_j$  являются функциями смещений на контуре отверстия  $j$  [1, 2].

Глобальные координаты точки на  $j$ -м контуре выразим через локальные как  $T_j = z_j^0 + R_j \xi_j$ , где  $\xi_j = e^{i\theta_j}$  — точка на единичной окружности, центр которой совпадает с началом локальной координатной системы. Тогда потенциалы примут вид:

$$\Phi_j = \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} \frac{g'_j R_j d\xi_j}{z_j^0 + R_j \xi_j - z},$$

$$\Psi_j = \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} \left[ \frac{\bar{g}'_j R_j d\bar{\xi}_j}{z_j^0 + R_j \xi_j - z} - \frac{(\bar{z}_j^0 + R_j \bar{\xi}_j) g'_j R_j d\xi_j}{(z_j^0 + R_j \xi_j - z)^2} \right] + \frac{R_j}{2\pi(z - z_j^0)^2} \int_{L_j} [(\bar{z}_j^0 + R_j \bar{\xi}_j) g'_j d\xi_j - (z_j^0 + R_j \xi_j) \bar{g}'_j d\bar{\xi}_j]. \quad (1)$$

Если точка  $z$  расположена на  $m$ -м контуре, то получим  $z = T_m = z_m^0 + R_m \eta_m$ .

Для удобства дальнейших преобразований введем обозначения  $r_{jm} = R_m/R_j$  и  $\zeta_{jm} = (z_m^0 - z_j^0)/R_j$ . Эти величины определяют, соответственно, размер и расположение центра  $m$ -го отверстия в такой координатной системе, в которой отверстие  $j$  единично и его центр находится в начале координат. Очевидны следующие свойства этих величин:  $r_{jj} = 1/r_{jj}$ ;  $r_{jj} = 1$ ;  $r_{jm} = -\zeta_{jm}/\zeta_{mj} = -\bar{\zeta}_{jm}/\bar{\zeta}_{mj}$ ;  $\zeta_{mj} = -\zeta_{jm} r_{mj}$ ;  $\zeta_{jj} = 0$ ;  $\zeta_{jm} \bar{\zeta}_{mj} = \bar{\zeta}_{jm} \zeta_{mj}$ . Также выполняется неравенство  $|\zeta_{jm}| \geq 1 + r_{jm}$ , причём равенство наступает только в случае, если отверстия  $j$  и  $m$  касаются друг друга, то есть в данной задаче всегда имеет место строгое неравенство.

Перепишем (1) с учётом введенных обозначений (в дальнейшем для краткости записи индексы у величин  $\xi_j$  и  $\eta_m$  опускаются):  $\Phi_j(T_m) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} \frac{g'_j d\xi}{\xi - r_{jm} \eta - \zeta_{jm}}$ ,  $\Psi_j(T_m) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} \left[ \frac{\bar{g}'_j d\bar{\xi}}{\bar{\xi} - r_{jm} \bar{\eta} - \bar{\zeta}_{jm}} - \frac{(\bar{\xi} + \bar{z}_j^0/R_j) g'_j d\xi}{(\xi - r_{jm} \eta - \zeta_{jm})^2} \right] +$

$+ \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(r_{jm} \eta + \zeta_{jm})^2} \int_{L_j} \left[ (\bar{\xi} + \bar{z}_j^0/R_j) g'_j d\xi - (\xi + z_j^0/R_j) \bar{g}'_j d\bar{\xi} \right]$ . Подставив эти выражения в граничные условия

(см. [1]), получим 
$$\sum_j \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} \frac{g'_j d\xi}{\xi - r_{jm} \eta - \zeta_{jm}} + \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} \frac{\bar{g}'_j d\bar{\xi}}{\bar{\xi} - r_{jm} \bar{\eta} - \bar{\zeta}_{jm}} - \frac{\bar{\eta}^2}{2\pi} \int_{L_j} \frac{(r_{jm} \eta + z_m^0/R_j) \bar{g}'_j d\bar{\xi}}{(\bar{\xi} - r_{jm} \bar{\eta} - \bar{\zeta}_{jm})^2} - \frac{\bar{\eta}^2}{2\pi} \int_{L_j} \left[ \frac{g'_j d\xi}{\bar{\xi} - r_{jm} \bar{\eta} - \bar{\zeta}_{jm}} - \frac{\bar{\eta}^2}{2\pi} \int_{L_j} \left[ \frac{g'_j d\xi}{\bar{\xi} - r_{jm} \bar{\eta} - \bar{\zeta}_{jm}} - \frac{(\xi + z_j^0/R_j) \bar{g}'_j d\bar{\xi}}{(\bar{\xi} - r_{jm} \bar{\eta} - \bar{\zeta}_{jm})^2} \right] - \frac{\bar{\eta}^2}{2\pi} \frac{1}{(r_{jm} \bar{\eta} + \bar{\zeta}_{jm})^2} \int_{L_j} \left[ (\xi + z_j^0/R_j) \bar{g}'_j d\bar{\xi} - (\bar{\xi} + \bar{z}_j^0/R_j) g'_j d\xi \right] \right\} = \sigma(T_m) - \frac{p+q}{2} + \bar{\eta}^2 \frac{q-p}{2}.$$

Как и в [1], введём ядра  $K$  и  $L$ , но здесь они будут своими для каждой пары отверстий ( $j, m$ ):

$$\sum_{j=1}^N \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} K^{jm}(\xi, \eta) g'_j d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} L^{jm}(\xi, \eta) \bar{g}'_j d\bar{\xi} \right\} = A^m(\eta), \quad (2)$$

где обозначено: 
$$K^{jm}(\xi, \eta) = \frac{1}{\xi - r_{jm} \eta - \zeta_{jm}} - \frac{\bar{\eta}^2}{\bar{\xi} - r_{jm} \bar{\eta} - \bar{\zeta}_{jm}} + \bar{\eta}^2 \frac{\bar{\xi} + \bar{z}_j^0/R_j}{(r_{jm} \bar{\eta} + \bar{\zeta}_{jm})^2}, \quad L^{jm}(\xi, \eta) = \frac{1}{\bar{\xi} - r_{jm} \bar{\eta} - \bar{\zeta}_{jm}} + \bar{\eta}^2 \frac{\xi - r_{jm} \eta - \zeta_{jm}}{(\bar{\xi} - r_{jm} \bar{\eta} - \bar{\zeta}_{jm})^2} - \bar{\eta}^2 \frac{\xi + z_j^0/R_j}{(r_{jm} \bar{\eta} + \bar{\zeta}_{jm})^2}, \quad A^m(\eta) = \sigma(T_m) - \frac{p+q}{2} + \bar{\eta}^2 \frac{q-p}{2}.$$

#### 4. Численное решение

Разложим функцию  $g'_j(\xi)$  в ряд Лорана:  $g'_j(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n^j \xi^n$ . Подставив разложение в (2), получим

$$\sum_{j,n} \left\{ g_n^j \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} K^{jm}(\xi, \eta) \xi^n d\xi + \bar{g}_n^j \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} L^{jm}(\xi, \eta) \bar{\xi}^n d\bar{\xi} \right\} = A^m(\eta). \quad \text{Обозначим} \quad K_n^{jm}(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} K^{jm}(\xi, \eta) \xi^n d\xi,$$

$$L_n^{jm}(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} L^{jm}(\xi, \eta) \bar{\xi}^n d\bar{\xi}. \quad \text{Проинтегрировав, найдём при } j \neq m$$

$$K_n^{jm}(\eta) = \begin{cases} -i r_{mj}^{n+2} \frac{\bar{\eta}^2}{(\bar{\eta} - \bar{\zeta}_{mj})^{n+2}}, & n \geq 1 \\ -2i r_{mj}^2 \frac{\bar{\eta}^2}{(\bar{\eta} - \bar{\zeta}_{mj})^2}, & n = 0 \\ i r_{mj} \left[ \frac{1}{\eta - \zeta_{mj}} - \bar{\eta}^2 \frac{\bar{\eta} + \bar{z}_m^0/R_m}{(\bar{\eta} - \bar{\zeta}_{mj})^2} \right], & n = -1 \\ i r_{mj}^{-n} \frac{1}{(\eta - \zeta_{mj})^{-n}}, & n \leq -2 \end{cases} \quad L_n^{jm}(\eta) = \begin{cases} -0, & n \geq 0, \\ i r_{mj} \left[ -\frac{1}{\bar{\eta} - \bar{\zeta}_{mj}} + 2 \frac{\bar{\eta}^2 r_{mj}^2}{(\bar{\eta} - \bar{\zeta}_{mj})^3} - \bar{\eta}^2 \frac{\eta + z_m^0/R_m}{(\bar{\eta} - \bar{\zeta}_{mj})^2} \right], & n = -1, \\ i r_{mj}^{-n} \left[ -\frac{1}{(\bar{\eta} - \bar{\zeta}_{mj})^{-n}} + \frac{\bar{\eta}^2 r_{mj}^2 (-n+1)}{(\bar{\eta} - \bar{\zeta}_{mj})^{-n+2}} + n \bar{\eta}^2 \frac{\eta - \zeta_{mj}}{(\bar{\eta} - \bar{\zeta}_{mj})^{-n+1}} \right], & n \leq -2, \end{cases}$$

или в частном случае, когда  $j = m$ : 
$$K_n^{jj}(\eta) = \begin{cases} -i\eta^n, & n \geq 1, \\ -2i, & n = 0, \\ -i\bar{z}_j^0/R_j, & n = -1, \\ i\eta^n, & n \leq -2, \end{cases} \quad L_n^{jj}(\eta) = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ -i\bar{z}_j^0/R_j, & n = -1. \end{cases}$$

Как и в предыдущих работах [1, 2], введём функцию невязки  $\sum_{j=1}^N \int_{L_j} |G(\eta)|^2 d\eta$ , где  $G(\eta) = \sum_m G^m(\eta) = \sum_m \left\{ \sum_{j,n} [g_n^j K_n^{jm}(\eta) + \bar{g}_n^j L_n^{jm}(\eta)] - A^m(\eta) \right\}$ , и разложим  $G^m(\eta)$  в ряд Лорана:  $G^m(\eta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G_k^m \eta^k$ . Используя технику вычисления коэффициентов  $G_k^m$ , изложенную в [1], получим:  $G_k^m = (1/(2\pi i)) \oint G^m(\eta) \eta^{-k-1} d\eta = \sum_{n,j} \left[ (g_n^j / (2\pi i)) \oint K_n^{jm} \eta^{-k-1} d\eta + (\bar{g}_n^j / (2\pi i)) \oint L_n^{jm} \eta^{-k-1} d\eta \right] - (1/(2\pi i)) \oint A^m \eta^{-k-1} d\eta = \sum_{n,j} [g_n^j K_{nk}^{jm} + \bar{g}_n^j L_{nk}^{jm}] - A_k^m$ . Значения суммирующих ядер приведены в таблице 1.

Таблица 1. Значения суммирующих ядер

Индекс $k$	Индекс $n$	Ядро $K_{nk}^{jm} (j \neq m)$	Ядро $L_{nk}^{jm} (j \neq m)$	
$k \geq 1$	$n \geq 0$	0	0	
	$n = -1$	$-i \frac{1}{\zeta_{jm}} \frac{1}{\zeta_{mj}^k}$		
	$n \leq -2$	$i \frac{(k-n-1)!}{(-n-1)! k!} \frac{1}{\zeta_{jm}^{k-n}} \frac{1}{\zeta_{mj}^k}$		
$k = 0$	$n \geq 0$	0	$i \frac{1}{\zeta_{jm}}$	
	$n = -1$	$-i \frac{1}{\zeta_{jm}} \frac{1}{\zeta_{mj}^k}$		
	$n \leq -2$	$i \frac{(k-n-1)!}{(-n-1)! k!} \frac{1}{\zeta_{jm}^{k-n}} \frac{1}{\zeta_{mj}^k}$		
$k = -1$	$n$ – любое	0	0	
$k \leq -2$	$n \geq 1$	$i \frac{(n-k-1)!}{(n+1)! (-k-2)!} r_{mj}^2 \frac{1}{\zeta_{jm}^n} \frac{1}{\zeta_{mj}^{k-n}}$	0	
	$n = 0$	$2i (-k-1) r_{mj}^2 \frac{1}{\zeta_{mj}^{k-n}}$		
	$n = -1$	$i \frac{1}{\zeta_{jm}} \frac{1}{\zeta_{mj}^{k-1}} \left[ \zeta_{mj} + (-k-1) \frac{\bar{z}_j^0}{R_m} \right]$		
	$n \leq -2$	0		
Индекс $k$	Индекс $n$	Ядро $K_{nk}^{jj}$	Ядро $L_{nk}^{jj}$	Ядро $A_k^m$
		$k \geq 1$	$n = k$	$i$
	$n \neq k$	0		
$k = 0$	$n = 0$	$2i$	0	$-(p+q)/2$
	$n = -1$	$i \bar{z}_j^0 / R_j$	$i \bar{z}_j^0 / R_j$	
	$n \neq 0, -1$	0	0	
$k = -1$	$n$ – любое	0	0	0
$k = -2$	$n = -2$	$-i$	0	$(q-p)/2$
	$n \neq -2$	0		
$k \leq -3$	$n = k$	$-i$	0	0
	$n \neq k$	0		

Далее ограничимся диапазоном порядков  $-N_2 \leq k, n \leq N_1$  и будем решать получившуюся систему линейных уравнений:  $G_k^m = 0$ . Её решением является набор значений  $g_n^j$ , полностью описывающий искомое напряженно-деформированное состояние.

## 5 Примеры расчетов НДС

В приведенных примерах исследуется напряженное состояние в окрестностях отверстий разной конфигурации и при различном их числе, которые содержатся в упругой плоскости, подвергающейся воздействию внешних нагрузок. Все линейные параметры отнесены к характерному размеру, равному радиусу отверстия (при отверстиях одинакового размера) или расстоянию между центром одного из малых отверстий и осью  $Ox$  (при отверстиях разного размера). Возникающие напряжения отнесены к приложенной к плоскости горизонтальной внешней нагрузке  $p$ .

### 5.1. Область с одинаковыми отверстиями, расположенными по кольцу

Рассмотрим следующую задачу: в упругой плоскости расположено несколько одинаковых отверстий, образующих кольцо; плоскость подвергается всестороннему растяжению ( $p = q$ ). Выясним, как ведет себя поле напряжений внутри кольца отверстий и в окрестности отдельного отверстия.

Пусть радиус кольца равен четырем радиусам отверстия. На рисунке 2 показано распределение среднего растягивающего напряжения. Очевидно, что чем больше отверстий содержит плоскость и чем теснее они расположены, тем большие напряжения концентрируются в области кольца — в промежутках между отверстиями. В то же время наблюдается снижение напряжений внутри кольца (см. Табл. 2): если при четырех отверстиях напряжение чуть больше приложенного на бесконечности, то с увеличением количества отверстий оно заметно падает (внутренность кольца как бы экранируется все более тесно расположенными отверстиями).

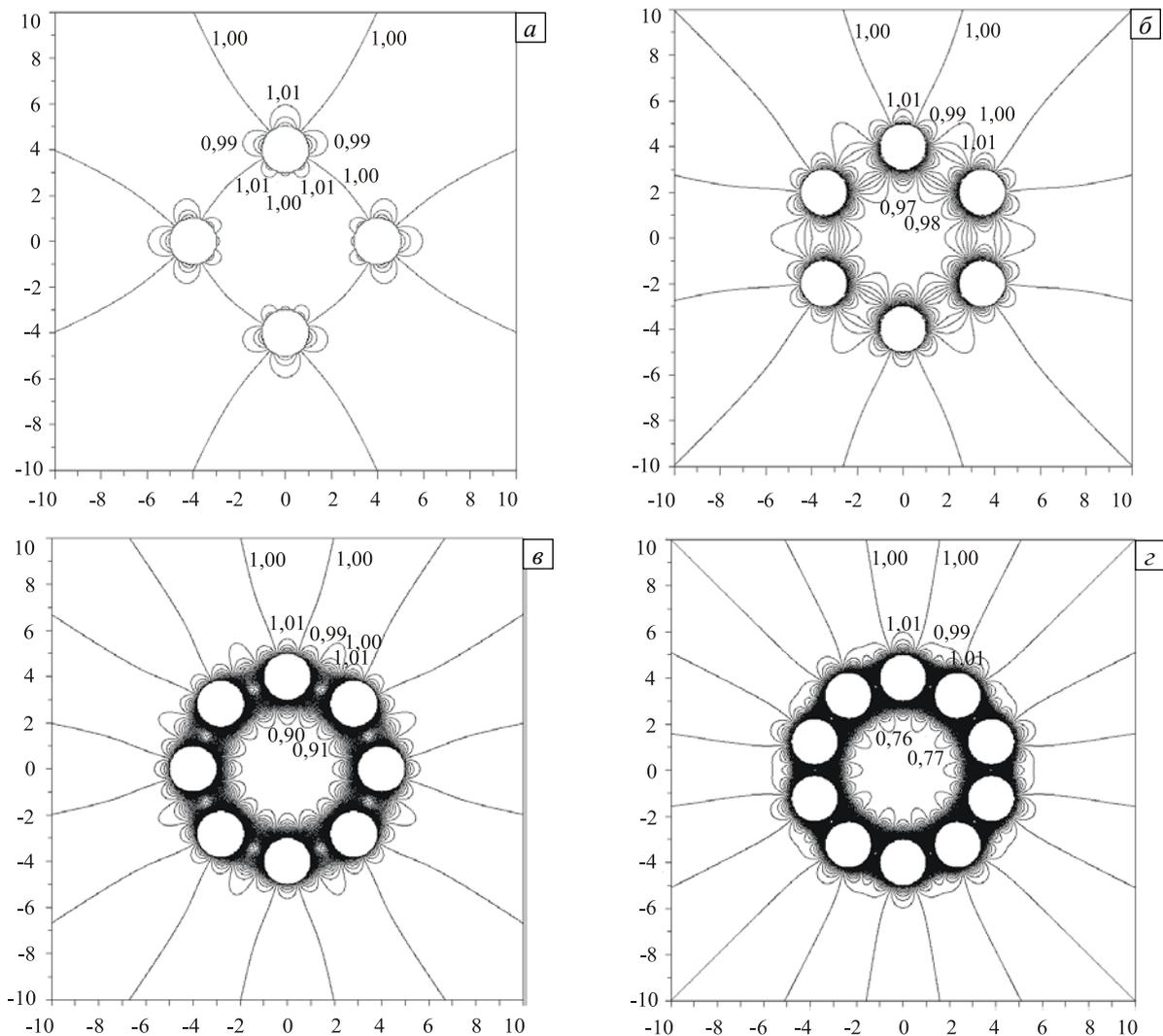


Рис. 2. Изолинии средних напряжений при всестороннем растяжении области с разным числом одинаковых отверстий: четыре (а), шесть (б), восемь (в), десять (г)

Таблица 2. Среднее напряжение в центре области, заключенной в кольцо отверстий

Количество отверстий	Среднее напряжение в центре кольца
4	1,0050
6	0,9764
8	0,9048
10	0,7689

Также представляет интерес распределение максимального усилия сдвига. Карта его изолиний показывает (см. Рис. 3), что в окрестностях отверстий материал подвергается касательным напряжениям (в полярных системах координат, связанных с отверстиями). В промежутках между отверстиями материал растягивается в радиальном направлении (в полярной системе координат, связанной с кольцом). Величины концентрации содержит таблица 3; расположение точек концентрации помечены на рисунке 3 символом «max».

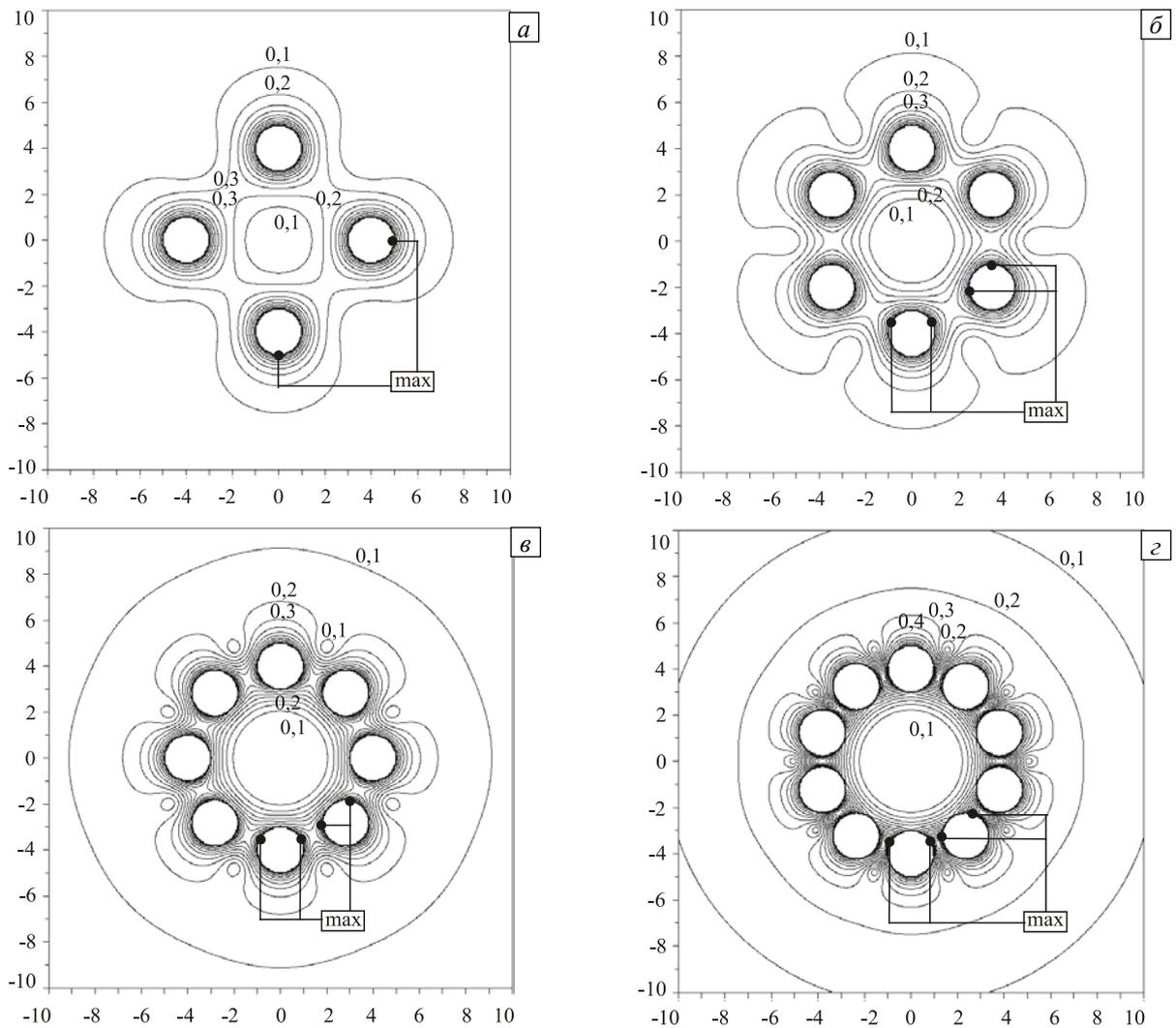


Рис. 3. Изолинии максимального усилия сдвига при всестороннем растяжении плоскости с разным числом отверстий: четыре (а), шесть (б), восемь (г), десять (з)

Таблица 3. Величина концентрации напряжений

Количество отверстий	Максимальное усилие сдвига	Максимальное усилие растяжения
4	1,044	2,088
6	1,145	2,290
8	1,375	2,750
10	1,869	3,704

### 5.2. Ряд одинаковых отверстий

Рассмотрим поведение упругой плоскости с отверстиями, выстроенными в ряд, в условиях вертикального стесненного сжатия (подобное нагружение испытывают горные породы). Пусть в плоскости вертикально расположены пять одинаковых отверстий; промежуток между отверстиями равен диаметру отверстий. К плоскости приложены сжимающее напряжение  $p$  по оси  $Ox$  и в 10 раз большее сжимающее напряжение по оси  $Oy$ :  $q = 10p$ . Результаты расчетов — максимальные усилия сдвига и растяжения, представлены на рисунке 4 как для всей цепочки, так и отдельно для центрального и верхнего отверстий. Значения концентрации

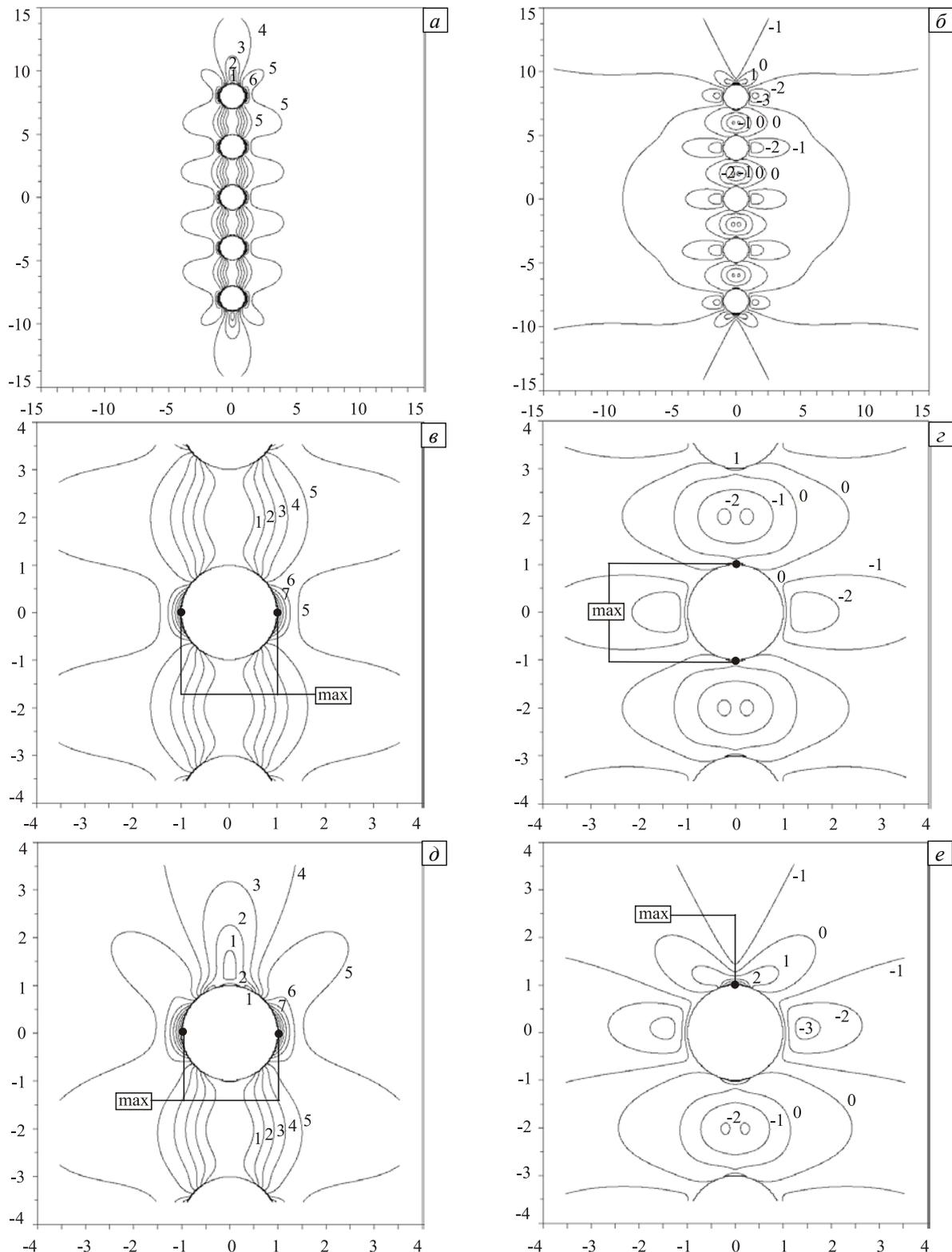


Рис. 4. Изолинии максимальных усилий сдвига (а, в, д), и растяжения (б, г, е) для цепочки отверстий (а, б), для центрального (в, г) и верхнего (д, е) отверстий

Таблица 4. Величина концентрации напряжений, отнесенная к горизонтальной нагрузке  $p$ 

Отверстие	Максимальное усилие сдвига	Максимальное усилие растяжения
Центральное	11,195	1,579
Верхнее	12,681	5,520

напряжений приведены в таблице 4. Из таблицы видно, что концентрация напряжений у «крайних» отверстий цепочки почти вчетверо выше, чем у «внутренних». Это означает, что при разрушении трещина возникнет только у крайних отверстий. При этом концентрация сдвиговых напряжений изменяется слабо.

### 5.3. Малые отверстия в окрестности одного большого отверстия

Во многих материалах (например, в металлах при разрушении) возникают поры различных размеров, иногда отличающихся на порядки. Поэтому представляет интерес взаимовлияние отверстий разных радиусов.

Рассмотрим задачу определения поля напряжений в окрестностях малых отверстий и его взаимодействия с полем большего в десять раз отверстия. Параметры отверстий содержит таблица 5. Внешние нагрузки, действующие на плоскость, такие же, как и в предыдущей задаче: сжатие по вертикали в десять раз сильнее, чем по горизонтали ( $q = 10p$ ).

Рисунок 5 демонстрирует распределения максимальных напряжений. Значения концентрации напряжений показаны в таблице 6 (отверстия 4 и 5 являются зеркальными отражениями отверстий 2 и 3, и информация о них в таблице не приводятся). Для сравнения назовём значения максимальных усилий в случае одиночного отверстия при таких же нагрузках [4]: максимальное усилие сдвига достигает 14,5 относительных единиц, максимальное усилие растяжения — 7. Из таблицы видно, что максимальное усилие сдвига увеличивается на всех отверстиях, причем на малых гораздо сильнее, чем на большом. Максимальное усилие растяжения, напротив, снижается на малых отверстиях и незначительно увеличивается на большом отверстии. Таким образом, данная система отверстий более подвержена сдвиговому разрушению, чем одиночное отверстие, причем разрушение начнется от малых отверстий. Трещина разрыва если и возникнет, то на большом отверстии.

Таблица 5. Параметры отверстий в задаче с малыми отверстиями в окрестности одного большого отверстия

№ отверстия	Радиус	Координаты центра	
		$x$	$y$
1	2,0	-4	0
2	0,2	-1	1
3	0,2	1	1
4	0,2	-1	-1
5	0,2	1	-1

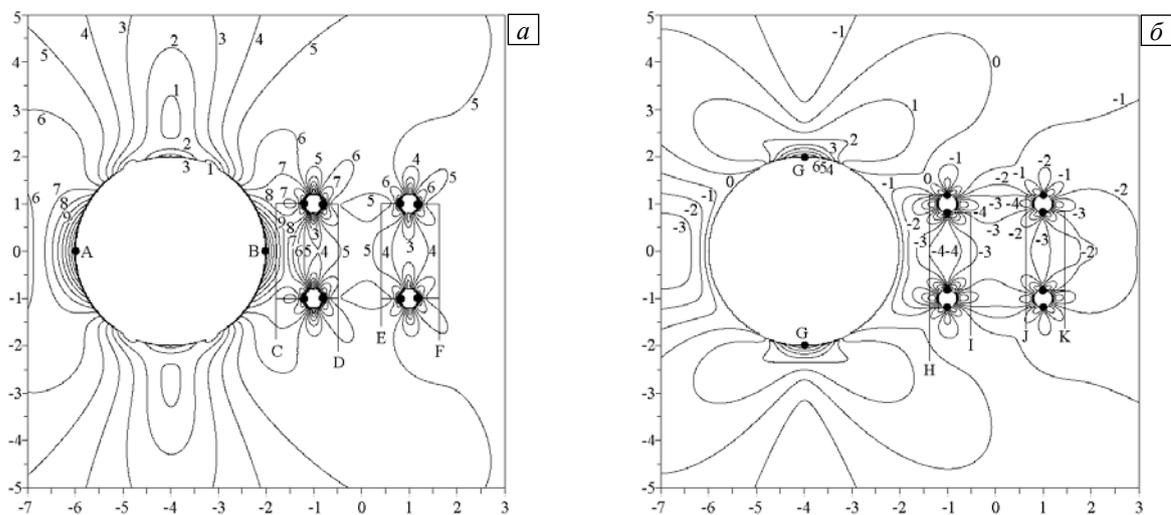


Рис. 5. Малые отверстия в окрестности большого отверстия: изолинии максимальных усилий сдвига (а) и растяжения (б)

Таблица 6. Величины концентрации напряжений в задаче с малыми отверстиями в окрестности одного большого отверстия

№ отверстия	Максимальное усилие сдвига		Максимальное усилие растяжения	
	значение	расположение	значение	расположение
1	14,591	A	7,011	G
	15,609	B		
2	20,658	C	6,863	H
	19,375	D	5,817	I
3	15,790	E	4,532	J
	15,618	F	3,587	K

#### 5.4. Малые отверстия в окрестности двух больших отверстий

Теперь рассмотрим задачу для плоскости с малыми отверстиями, расположенными между двумя крупными отверстиями (параметры отверстий заданы в таблице 7). Имеют место те же условия нагружения, что и в предыдущей задаче ( $q = 10p$ ).

Таблица 7. Параметры отверстий в задаче с малыми отверстиями в окрестности двух больших отверстий

№ отверстия	Радиус	Координаты центра	
		$x$	$y$
1	2,0	-4	0
2	0,2	-1	1
3	0,2	1	1
4	0,2	-1	-1
5	0,2	1	-1
6	2,0	4	0

Распределения полей напряжений представлены на рисунке 6, максимальные значения напряжений — в таблице 8 (приведена информация только об отверстиях 1 и 2, поскольку остальные расположены симметрично). Из таблицы 8 заключаем, что при такой конфигурации области сдвиговые напряжения возрастают еще больше, чем в случае одного большого отверстия, зато концентрация максимального усилия растяжения значительно снижается. И, как и в предыдущей задаче, сдвиговому разрушению больше подвержены окрестности малых отверстий, разрывному — окрестность большого отверстия.

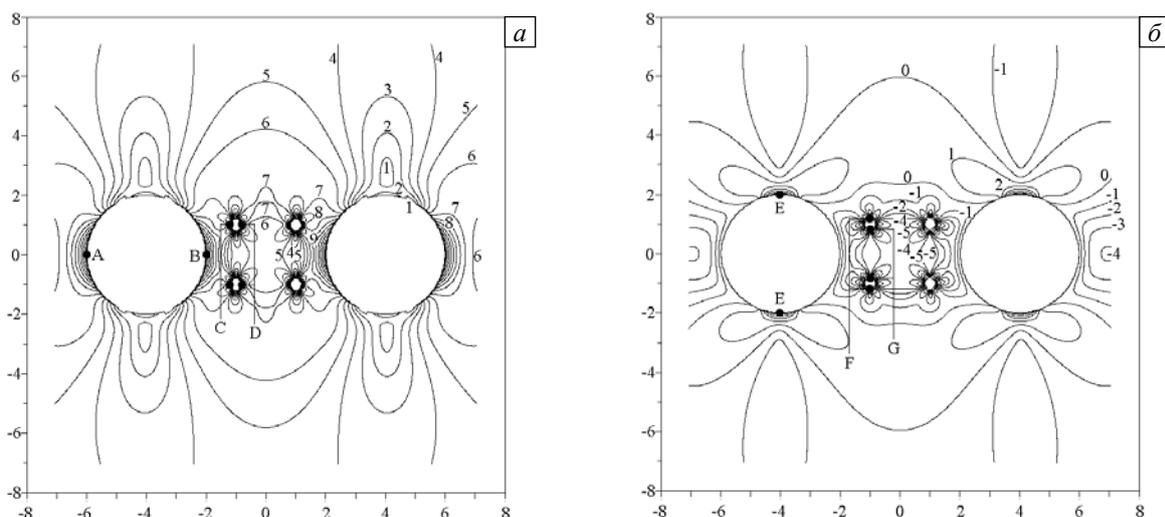


Рис. 6. Малые отверстия в окрестности двух больших отверстий: изолинии максимальных усилий сдвига (а) и растяжения (б)

Таблица 8. Величины концентрации напряжений в задаче с малыми отверстиями в окрестности двух больших отверстий

№ отверстия	Максимальное усилие сдвига		Максимальное усилие растяжения	
	значение	расположение	значение	расположение
1	14,994626	A	6,1323239	E
	16,001022	B		
2	22,553333	C	6,0260562	F
	21,344591	D	4,6516958	G

## 6. Заключение

Показано, что метод мультипольного разложения (ММР) может использоваться для изучения напряженно-деформированного состояния возле отверстий в плоскости и в случае несимметричных задач — отверстия могут иметь различные радиусы и располагаться произвольно. Определены поля напряжений в окрестности кольца отверстий, цепочки отверстий, группы малых отверстий в поле одного или двух больших отверстий, при этом плоскость, в которой они расположены, испытывает различного рода нагрузки (всестороннее растяжение, вертикальное стесненное сжатие). Выявлены точки концентрации напряжений и найдены величины концентрации. Указаны наиболее вероятные сценарии начала разрушения среды, ослабленной отверстиями. Таким образом, ММР применим для исследования напряженного состояния упругого тела с группой круговых отверстий, в том числе для определения прочности конструкции.

Проблеме определения прочности при наличии концентраторов напряжений в виде отверстий посвящено множество работ [например, 11–19]. В частности, в [11] показано, что аналитическое решение даже при двух отверстиях уже представляет собой нетривиальную задачу. Поэтому при выборе подхода к решению особое значение придается численным и численно-аналитическим методам. Будучи численно-аналитическим методом, ММР имеет то преимущество, что не требует огрубления геометрии задачи и построения сеточного аналога расчетной области. Также метод, точно выполняющий законы упругости, позволяет сконцентрироваться на удовлетворении граничных условий, а использование мультиполей дает возможность анализировать асимптотику упругих полей на удалении от отверстий.

Автор выражает благодарность члену-корреспонденту РАН Р.В. Гольдштейну за помощь в проведении работы и ценные рекомендации.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-01-00358-а).

## Литература

1. Мокряков В.В. Применение метода мультиполей для решения задачи о двух близко расположенных отверстиях // МТТ. – 2007. – № 5. – С. 129-145.
2. Мокряков В.В. Исследование зависимости эффективных податливостей плоскости с решеткой круговых отверстий от параметров решетки // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2010. – Т. 3, № 3. – С. 90-101.
3. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 513 с.
4. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
5. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наукова думка, 1981. – 323 с.
6. Линьков А.М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. – СПб.: Наука, 1999. – 382 с.
7. Греков М.А. Сингулярная плоская задача теории упругости. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 2001. – 192 с.
8. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: ТОО «Янус», 1995. – 520 с.
9. Григolyuk Э.И., Фильштинский Л.А. Перфорированные пластины и оболочки. – М.: Наука, 1970. – 556 с.
10. Ванин Г.А. Микромеханика композиционных материалов. – Киев: Наукова думка, 1985. – 302 с.
11. Уфлянд Я.С. Биполярные координаты в теории упругости. – М.-Л.: Гостехиздат, 1950. – 232 с.
12. Устинов Ю.А. Концентрация напряжений в полуплоскости и плоскости с круговыми отверстиями при растяжении // Изв. АН СССР. Механика. – 1965. – № 1. – С. 145-148.
13. Савин Г.Н. Концентрация напряжений около отверстий. – М.-Л.: Гостехиздат, 1951. – 496 с.
14. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. – Киев: Наукова думка, 1968. – 887 с.
15. Гольдштейн Р.В., Осипенко Н.М. Структуры в процессах разрушения // МТТ. – 1999. – № 5. – С. 49-71.
16. Гольдштейн Р.В. Разрушение при сжатии // Успехи механики. – 2003. – Т. 2, № 2. – С. 3-20.
17. Dyskin A.V., Germanovich L.N., Ustinov K.B. Asymptotic solution for long cracks emanated from a pore in compression // Int. J. Fract. – 1993. – V. 62, N. 4. – P. 307-324.
18. Ustinov K.B. Asymptotic solution for long cracks emanated from a hole in bi-axial loading // Int. J. Fract. – 1994. – V. 68, N. 3. – P. R73-R77. DOI
19. Goldstein R.V., Shushpannikov P.S. Application of the method of multipole expansions in the 3D-elasticity problem for a medium with ordered system of spherical pores // ZAMM. – 2009. – V. 89, N. 6. – P. 504-510. DOI

Поступила в редакцию 06.07.11; опубликована в электронном виде 30.06.12

## Сведения об авторе

Мокряков Вячеслав Викторович, кфмн, нс, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, 119526, Москва, пр. Вернадского, д. 101, к. 1; E-mail: mokr@ipmnet.ru