DOI: 10.7242/1999-6691/2012.5.2.16
УДК 534

КОРОТКОВОЛНОВАЯ ДИНАМИКА ТОНКИХ ПЛАСТИН

М.А. Ильгамов

Институт механики Уфимского научного центра РАН, Уфа, Россия

Рассматриваются колебания и волны в пластине, контактирующей с газовой средой. Предполагается, что частоты возбуждения находятся в ультразвуковом диапазоне, толщина пластины мала и ее отношение к длине полуволны составляет не более одной пятой. Строится простейшая модель, основанная на теории Тимошенко изгиба пластины и на первом приближении реакции со стороны акустической среды. Изучается динамика пластины конечной и полубесконечной протяженности, оценивается порядок величин входных безразмерных параметров. На основании этого производится упрощение соотношений модели Тимошенко, что позволяет получить обозримые результаты. Дается сравнение решений по моделям Тимошенко и Кирхгоффа.

Ключевые слова: тонкая пластина, коротковолновая динамика, колебания, волны, модели Тимошенко и Кирхгоффа

SHORT WAVE DYNAMICS OF THIN PLATES

M.A. Ilgamov

Institute of Mechanics of Ufa Scientific Center RAS, Ufa, Russia

Oscillations and waves in the plate which interacts with the gas phase are examined. It is assumed that excitation frequencies fall in the ultrasonic range, the plate thickness is small and its ratio to the half-wave length does not exceed one fifth. The simplest model developed in the paper is based on the Timoshenko plate bending theory and the first approximation for acoustic medium response. The analysis is carried out to study the dynamics of a plate of infinite and semi-infinite length and to make an order-of-magnitude estimate of input dimensionless parameters. This allows us to simplify Timoshenko equations and to get thus the observable results. The results obtained using the Timoshenko model are compared with those of the Kirchhoff model.

Key words: thin plate, short wave dynamics, oscillations, waves, Timoshenko model, Kirchhoff model

1. Введение

В природе и технике имеется множество примеров динамического взаимодействия тонких пластинчатых элементов и окружающей газовой (воздушной) или жидкой среды. При этом существенным является наличие среднего движения среды вдоль поверхности пластины. Этому вопросу посвящено большое число публикаций (см. обзоры в [1], [2]), однако случай весьма тонких пластин при высокочастотном возбуждении, насколько известно автору настоящей статьи, изучен недостаточно. К тому же он имеет ряд особенностей, поэтому представляет интерес его более подробное рассмотрение.

Принимаются следующие допущения. Материал пластины обладает малой по сравнению со сталью плотностью $\rho \sim 10^3$ кг/м^3, а также малым модулем упругости E. Скорость распространения волн растяжения–сжатия в нем имеет порядок $c_l = \sqrt{E/\rho} \sim 10^3$ м/с, в то время как в стальных элементах $c_l \approx 5000$ м/с. Эти характеристики свойственны некоторым пластикам и композитным материалам. Толщина пластины $h \sim 10^{-4} - 10^{-5}$ м и менее. Частота возбуждения колебаний порядка $f \sim 10^7 - 10^8$ Гц, то есть находится в пределах ультразвуковых частот ($2 \cdot 10^4 - 10^9$ Гц).

Высокая частота возбуждения приводит к раздельному существованию и распространению волны растяжения–сжатия со скоростью c_l и волны сдвига $c_s = \sqrt{G/\rho}$, где G — модуль сдвиговой деформации. Такая картина четко проявляется при импульсном возбуждении пластин и балок. При малой толщине пластины необходимо брать в расчет влияние на ее динамику не только контактирующей жидкости, но и газовой среды даже при атмосферном давлении и отсутствии среднего движения газа вдоль поверхности пластины. Оценки будем вести для случая взаимодействия с газовой средой. Не учитывается внутреннее трение в пластине (учет последнего достаточно полно отражен в литературе).

Анализ поставленной задачи не может быть осуществлен на основе модели Кирхгоффа изгибной деформации, так как соответствующее уравнение движения не относится к классу гиперболических уравнений. Для этого нужно применять модель Тимошенко [3], в которой учитываются также деформация поперечного сдвига и инерция вращения сечения пластины. Частичный обзор исследований динамики балок и пластин по этой модели дан в работах [4–9]. К самым последним публикациям можно отнести [10, 11].

2. Постановка задачи

Для пластины единичной ширины, ориентированной вдоль оси x (положительное направление слева направо), уравнения Тимошенко имеют вид [3]

$$\frac{\partial M}{\partial x}-Q-\frac{\rho h^3}{12}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=p_1-p_2, \tag{1}$$

где t — время; M и Q — изгибающий момент и перерезывающая сила; w — прогиб (положительное направление — вниз); ψ — угол поворота сечения при изгибе; p_1-p_2 — перепад давления на поверхности пластины со стороны действующей среды (контакт по обеим поверхностям пластины дает $2p$). Из закона Гука следуют выражения

$$M=\frac{Eh^3}{12}\frac{\partial\psi}{\partial x}, \qquad Q=-Gh\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\psi\right), \tag{2}$$

причем выше и здесь под G подразумевается значение модуля сдвига, умноженное на коэффициент распределения напряжения сдвига k' (для прямоугольного сечения $k'=0{,}833$, $E/G=3{,}2$ [3]).

При определении реакции среды на движение пластины исходим из уравнений линейной акустики относительно давления p и потенциала скорости φ

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-\frac{1}{c_f^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0, \qquad p=-\rho_f\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

где z — координата по нормали к пластине, ρ_f, c_f — плотность и скорость звука.

Рассматривая волну вида $w=W\exp(i\omega t-i\alpha x)$, $\varphi=\Phi(z)\exp(i\omega t-i\alpha x)$ с частотой ω и волновым числом α и разрешая уравнение относительно $\Phi(z)$, имеем $\varphi=\left(Ae^{ikz}+Be^{-ikz}\right)e^{i(\omega t-\alpha x)}$, $k=\left(\omega^2/c_f^2-\alpha^2\right)^{1/2}>0$. Здесь A и B определяются из условий при $z=0$, $z\to\infty$. Волновое число α имеет порядок ω/c_l для волны растяжения–сжатия и ω/c_s — для волны сдвига. Ввиду того, что $c_f<c_s$, $c_f<c_l$, показатель $k>0$. Случай $k<0$ подробно рассмотрен, например, в [12]. Условия на поверхности пластины и на большом удалении по оси z имеют вид $\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial t}$ $(z=0)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0$ $(z\to\infty)$ и дают для потенциала следующее выражение: $\varphi=-(\omega/k)We^{-ikz}e^{i(\omega t-\alpha x)}$. Давление на поверхности пластины ($z=0$) равно $p=-\left(i\rho_f\omega^2\Big/\sqrt{\left(\omega/c_f\right)^2-\alpha^2}\right)We^{i(\omega t-\alpha x)}\approx -i\rho_f c_f\omega\left[1+\left(c_f^2\alpha^2\right)/\left(2\omega^2\right)+...\right]We^{i(\omega t-\alpha x)}$.

Восстановив в этой формуле дифференциальный оператор, на поверхности пластины имеем в первом приближении

$$p=-\rho_f c_f\frac{\partial w}{\partial t}, \qquad p_1-p_2=-2\rho_f c_f\frac{\partial w}{\partial t}. \tag{3}$$

Уравнения (1)–(3) можно записать относительно функции прогиба пластины

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{12}{h^2c_l^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{1+\gamma}{c_l^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\gamma}{c_l^4}\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}+\frac{2\rho_f c_f}{\rho h c_l^2}\left(\frac{12}{h^2}\frac{\partial w}{\partial t}-\gamma\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial t}+\frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^3 w}{\partial t^3}\right)=0, \qquad \gamma=\frac{c_l^2}{c_s^2}. \tag{4}$$

При этом выражения (2) приобретут вид:

$$M=\frac{Eh^3}{12}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{\rho_f c_f}{\rho h c_s^2}\frac{\partial w}{\partial t}\right), \qquad Q=-Gh\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\int_0^x\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{\rho_f c_f}{\rho h c_s^2}\frac{\partial w}{\partial t}\right)dx\right). \tag{5}$$

В (4) и (5) члены с множителем $\rho_f c_f$ учитывают влияние окружающей среды. В отличие от членов, описывающих деформацию пластины, они имеют нечетные производные. В уравнении (4) отношения второго и третьего слагаемых к первому слагаемому в скобках имеют порядок $(h\alpha/2)^2$ и $\left(\omega h/(2c_s)\right)^2$. Так как $\alpha \approx \omega/c_s \approx \pi/L$, где L — длина полуволны, то обе оценки можно представить как $(\pi h/(2L))^2$. Если $h/L \sim 10^{-1}$, то квадрат этого отношения мал по сравнению с единицей, и им можно пренебречь. В этом случае в скобках уравнения (4) можно сохранить только первый член.

В выражениях (5) последние члены относятся к членам со второй производной по t как $\rho_f c_f/(\rho h\omega)$. Они являются малыми и в дальнейшем отбрасываются. В таком приближении вклад контактирующей среды в значения (5) отражается только через прогиб w, входящий в оставленные члены.

3. Распространение изгибной волны по полубесконечной пластине

Рассмотрим установившееся распространение волны по пластине, занимающей полуплоскость, при задании на кромке $x=0$ следующих условий:

$$w = w_0 \exp(i\omega t), \qquad M = 0, \tag{6}$$

$$w = 0, \qquad M = M_0 \exp(i\omega t), \tag{7}$$

$$\partial w/\partial x = 0, \qquad Q = Q_0 \exp(i\omega t), \tag{8}$$

где w_0, M_0, Q_0 — амплитудные значения прогиба, изгибающего момента и перерезывающей силы. Принимая функцию w в виде $\exp(i\omega t + \alpha x)$, из (4) получаем характеристическое уравнение относительно α. Его корни равны

$$\alpha = \pm i\omega\left[(1+\gamma)/\left(2c_l^2\right) \pm \left((1-\gamma)^2/\left(4c_l^4\right) + 12/\left(h^2\omega^2 c_l^2\right) - i\ 24\rho_f c_f/\left(\rho h^3\omega^3 c_l^2\right)\right)^{1/2}\right]^{1/2}. \tag{9}$$

Рассмотрим случай, когда соотношение параметров следующее:

$$48c_l^2/\left[(1-\gamma)^2 h^2\omega^2\right] \ll 1. \tag{10}$$

Полагая для прямоугольного поперечного сечения полоски $\gamma = 3,2$ [3], а также значения $c_l \sim 10^3$ м/с, $h\omega = 2\pi f h \sim 10^4$ м/с, находящиеся в пределах диапазонов, указанных для параметров в постановке задачи, убеждаемся, что оценка (10) выполняется (она может быть записана как $10\left(c_l/(h\omega)\right)^2 \ll 1$). Для последующих рассуждений ограничимся этим случаем величин параметров. Кроме того, примем во внимание, что абсолютное значение последнего члена в (9) значительно меньше, чем значение основного члена, и воспользуемся приближением $(1 \pm ix)^{1/2} \approx 1 \pm ix/2$. При этом выражение (9) существенно упрощается:

$$\alpha_1 \approx i\omega/c_l + \beta c_l,\ \ \alpha_2 \approx i\omega/c_s + \beta c_s,\ \ \beta = 12\rho_f c_f/\left[(\gamma-1)\rho h^3\omega^2\right],\ \ \alpha_3 = -\alpha_1,\ \ \alpha_4 = -\alpha_2, \tag{11}$$

а решение уравнения (4) принимает вид:

$$w = e^{i\omega t}\left(A_1 e^{\alpha_1 x} + A_2 e^{\alpha_2 x} + A_3 e^{-\alpha_1 x} + A_4 e^{-\alpha_2 x}\right). \tag{12}$$

Из условия отсутствия отраженных волн в полубесконечной пластине следует $A_1 = 0$, $A_2 = 0$.

Рассмотрим далее варианты граничных условий (6)–(8).

Вариант 1. Из условий (6) при учете (11) следует

$$A_3 = \left(w_0/\left(\alpha_2^2 - \alpha_1^2\right)\right)\left(\alpha_2^2 + \omega^2/c_s^2\right), \qquad A_4 = -\left(w_0/\left(\alpha_2^2 - \alpha_1^2\right)\right)\left(\alpha_1^2 + \omega^2/c_s^2\right), \tag{13}$$

$$\alpha_2^2 - \alpha_1^2 = -\left(\omega^2/c_l^2 + \beta^2 c_s^2\right)(\gamma - 1), \tag{14}$$

$$\alpha_1^2 + \omega^2/c_s^2 = (\gamma - 1)\,\omega^2/c_l^2 + \beta\left(\beta c_l^2 + i2\omega\right), \tag{15}$$

$$\alpha_2^2 + \omega^2/c_s^2 = \beta\left(\beta c_s^2 + i2\omega\right). \tag{16}$$

Отношение второго члена к первому в правой части выражения (14) равно $\beta^2 c_l^2 c_s^2/\omega^2 = \left[12\rho_f c_f c_l c_s/\left((\gamma-1)\rho h^3\omega^3\right)\right]^2$. При выполнении условия (10) это отношение заведомо много меньше единицы. Руководствуясь (10), можно показать, что абсолютное значение правой части (15) мало отличается от значения ее первого члена. Поэтому в (14)–(16) можно принять $\alpha_2^2 - \alpha_1^2 \approx -(\gamma-1)(\omega/c_l)^2$, $\alpha_1^2 + (\omega/c_s)^2 \approx (\gamma-1)(\omega/c_l)^2$, $\alpha_2^2 + (\omega/c_s)^2 \approx 0.$ В силу сказанного $A_3 \approx 0$, $A_4 \approx w_0$. В то же время в составе выражений (11), входящих в аргументы экспонент, должны быть сохранены все члены.

Итак, решение (12)–(16) для полубесконечной пластины (полоски) при условиях возбуждения (6) в указанном выше приближении имеет вид

$$w = w_0 e^{-\beta c_s x} \exp\left[i\omega\left(t - x/c_s\right)\right]. \tag{17}$$

Изгибная волна распространяется в положительном направлении оси x со скоростью c_s и с затуханием, которое обусловлено влиянием газовой среды. При условиях (6) не возникает волна, распространяющаяся со скоростью c_l. При $c_s = 560$ м/с, $\omega/2\pi = 10^7 - 10^8$ Гц длина волны $L = 2\pi c_s/\omega$ составляет порядка 1 мм и менее. Отношение толщины $h = 10^{-5} - 10^{-4}$ м к этой длине L имеет порядок $10^{-2} \div 10^{-1}$.

При $\rho_f/\rho = 10^{-3}$, $c_f = 340$ м/с, $c_s = 560$ м/с, $h = 10^{-4}$ м, $h\omega = 10^4$ м/с на расстоянии $x = 2{,}2$ м от кромки пластины (места возбуждения колебаний) затухание волны характеризуется величиной $\exp(-\beta c_s x) \approx 0{,}79$. С уменьшением толщины пластины затухание волны ускоряется (при тех же параметрах, в том числе $h\omega = 10^4$ м/с, но при $h = 2\cdot 10^{-5}$ м и $h = 10^{-6}$ м, амплитуда волны на том же расстоянии равняется $0{,}32 w_0$ и $0{,}1 w_0$ соответственно).

В соответствии с (5) (без последнего члена, как указано выше) и (17) изгибающий момент преобразуется к виду:

$$12M/\left(Eh^3 w_0\right) = \beta^2 c_s^2 e^{-\beta c_s x} \exp\left[i\omega\left(t - x/c_s\right)\right]. \tag{18}$$

Без учета влияния окружающей среды ($\beta = 0$) он равен нулю при всех значениях x, в том числе при $x = 0$, что задается условием (6). Для принятых значений параметров изгибающий момент (18) мал также и при $\beta \neq 0$. Поэтому и при учете влияния окружающей среды можно полагать $M \approx 0$. Выражение для перерезывающей силы приобретает вид:

$$Q/\left(Ghw_0\right) = \left(\beta c_s + i\omega/c_s\right) e^{-\beta c_s x} \exp\left[i\omega\left(t - x/c_s\right)\right]. \tag{19}$$

Здесь амплитуда Q может быть принята равной $iGh\omega w_0/c_s$. По (19) видно, что волна перерезывающей силы распространяется также со скоростью c_s.

<u>*Вариант 2.*</u> Рассмотрим задачу с условиями (7). Поскольку $w = 0$ при $x = 0$, то на кромке пластины $\partial^2 w/\partial t^2 = 0$. Поэтому при $x = 0$ из (5) следует: $M = \left(Eh^3/12\right)\partial^2 w/\partial x^2$ (как и в Варианте 1, последний член в (5) не учитывается). Тогда для нахождения констант решения (12) получим формулу $A_3 = -A_4 = 12M_0/\left[Eh^3\left(\alpha_1^2 - \alpha_2^2\right)\right]$, где в соответствии с (14) $\alpha_1^2 - \alpha_2^2 \approx (\gamma-1)\omega^2/c_l^2$ и, следовательно,

$$Eh^3\omega^2(\gamma - 1)\, w = 12M_0 c_l^2\left(e^{-\beta c_l x} e^{i\omega(t - x/c_l)} - e^{-\beta c_s x} e^{i\omega(t - x/c_s)}\right). \tag{20}$$

Таким образом, при условиях (7) на кромке пластины, согласно (20), часть волны прогиба распространяется со скоростью c_l и затухает с показателем экспоненты $-\beta c_l x$, часть прогиба — со скоростью c_s и с показателем $-\beta c_s x$. При $x=0$ они находятся в противофазе. Так как $c_l > c_s$, то изгибная волна со скоростью c_l имеет бóльшую длину $L = 2\pi c_l/\omega$ и затухает быстрее, чем волна со скоростью c_s. На расстоянии x_1 обе волны оказываются в одной фазе, если $\omega(t - x_1/c_l) = \omega(t - x_1/c_s) + \pi$, $x_1 = \pi c_l \Big/ \left[\omega\left(\sqrt{\gamma} - 1\right)\right]$. Далее смена фаз повторяется при превышении аргумента $\omega(t - x_1/c_s)$ на $k\pi$ ($k = 2, 3, \ldots$).

Если в (5), (19), (20), как и выше, не учитывать малые члены с коэффициентом β, то выражения изгибающего момента и перерезывающей силы преобразуются к виду

$$\begin{gathered} M/M_0 = e^{-\beta c_l x} \exp\left[i\omega(t - x/c_l)\right], \\ iEh^2\omega Q\big/(12Gc_l M_0) = e^{i\omega t} - \left(\gamma/(\gamma-1)\right)e^{-\beta c_l x}\exp\left[i\omega(t - x/c_l)\right] + \left(\sqrt{\gamma}/(\gamma-1)\right)e^{-\beta c_s x}\exp\left[i\omega(t - x/c_s)\right]. \end{gathered} \tag{21}$$

Отсюда видно, что волна изгибающего момента распространяется со скоростью c_l и затухает по экспоненте с показателем $-\beta c_l x$. Волна перерезывающей силы представляет собой суперпозицию двух волн, первая их которых распространяется со скоростью c_l и затухает с показателем $-\beta c_l x$, другая имеет скорость c_s и затухает с показателем $-\beta c_s x$. Причем эти части вблизи $x=0$ находятся в противофазе. Правая часть (21) при $x=0$ равна $\left(\sqrt{\gamma}+1\right)^{-1}\exp(i\omega t)$.

<u>*Вариант 3.*</u> Первое из условий (8) дает $A_4 = -(\alpha_1/\alpha_2)A_3$. Второе условие реализуется, например, если пластина занимает область $-\infty < x < \infty$. Поперечная сила вычисляется по формуле: $Q = 2Q_0\exp(i\omega t)$. Так как при $(x=0)$ $\partial w/\partial x = 0$ и угол наклона поперечного сечения $\psi = 0$ ($\psi > 0$ при $x > 0$, $\psi < 0$ при $x > 0$), то выражение для Q из (2) неприменимо. Необходимо обратиться к первому уравнению (1), где в силу сказанного $\partial^2\psi/\partial t^2 = 0$ при $x=0$. Поэтому $Q = \partial M/\partial x$ или с учетом первого выражения (2) $12Q\big/\left(Eh^3\right) = \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \dfrac{1}{c_s^2}\dfrac{\partial}{\partial t^2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)$. Здесь последний член равен нулю в силу первого условия (8). Отметим, что такое выражение для Q без последнего члена применено в [4]. Оно приведено без вывода и выглядит необоснованным, так как совпадает со случаем элементарной теории изгиба балок.

Если пренебрежем, как и выше, членами с коэффициентом β, то для констант в (12) получим: $A_3 = 12Q_0\Big/\left[Eh^3\alpha_1\left(\alpha_2^2 - \alpha_1^2\right)\right]$, $A_4 = -\alpha_1 A_3/\alpha_2$. Тогда с учетом (11) и (14) будем иметь

$$iEh^3\omega^3 w(\gamma-1)\big/\left(12Q_0c_l^2\right) = -c_l e^{-\beta c_l x}\exp\left[i\omega(t - x/c_l)\right] + c_s e^{-\beta c_s x}\exp\left[i\omega(t - x/c_s)\right]. \tag{22}$$

Из (22), в частности, при $x=0$ следует:

$$iEh^3\omega^3 w\left(\sqrt{\gamma}+1\right)\Big/\left(12Q_0c_l^2 c_s\right) = -e^{i\omega t}. \tag{23}$$

При задании в (8) вещественного значения амплитуды Q_0 перерезывающей силы прогиб, согласно (23), определяется выражением: $Eh^3\omega^3 w\left(\sqrt{\gamma}+1\right)\Big/\left(12Q_0c_l^2 c_s\right) = -\sin\omega t$.

4. Сравнение решений по моделям Тимошенко и Кирхгоффа

Неравенство (10) соответствует случаю, когда в уравнении изгиба (4), отвечающем модели Тимошенко, второй член в левой части мал по сравнению с главными членами. Если в (1), (2) и (4) отбросим члены, учитывающие сдвиговую деформацию и инерцию вращения поперечного сечения, то получим соотношения, соответствующие модели Кирхгоффа

$$M = \frac{Eh^3}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad Q = \frac{\partial M}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{12}{h^2 c_l^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{24\rho_f c_f}{\rho h^3 c_l^2}\frac{\partial w}{\partial t} = 0. \tag{24}$$

Рассмотрим ту же задачу с граничными условиями (6) и решением вида $\exp(i\omega t + \alpha x)$. Корни характеристического уравнения (24) в приближении $(1 - ix)^{1/4} \approx 1 - ix/4$ равняются

$$\begin{gathered}\alpha_1 = (\omega/c_k - i\beta_k), \qquad \alpha_2 = -(\omega/c_k - i\beta_k), \qquad \alpha_3 = i\alpha_1, \qquad \alpha_4 = i\alpha_2, \\ c_k = \sqrt{\left(h\omega c_i/\sqrt{12}\right)}, \qquad \beta_k = (3/4)^{1/4}\sqrt{\rho_f^2 c_f^2 \big/ \left(\rho^2 h^3 \omega c_i\right)}.\end{gathered} \tag{25}$$

Решение имеет вид (12), в котором необходимо исключить возрастание по x (для этого положим $A_1 = 0$) и волну, движущуюся в отрицательном направлении x ($A_3 = 0$). При принятых порядках параметров задачи модуль величины α_2 (25) мало отличается от единицы. Поэтому при убывающем по x решении (с коэффициентом A_2) этот член, дающий осцилляции с малой амплитудой и длинной волной, отбрасывается. Однако он сохраняется в составе члена с A_4, что дает затухание коротких волн по x. Итак, определив A_2 и A_4 в соответствии с (6), имеем

$$w = \left(w_0 e^{i\omega t}/2\right)\left(e^{-\omega x/c_k} + e^{-\beta_k x - i\omega x/c_k}\right). \tag{26}$$

Выражения для изгибающего момента и перерезывающей силы преобразуются к виду:

$$M = \left(Eh^3\omega^2 w_0 \big/ \left(24 c_k^2\right)\right) e^{i\omega t}\left(e^{-\omega x/c_k} - e^{-\beta_k x - i\omega x/c_k}\right), \quad Q = -\left(Eh^3\omega^3 w_0 \big/ \left(24 c_k^2\right)\right) e^{i\omega t}\left(e^{-\omega x/c_k} - ie^{-\beta_k x - i\omega x/c_k}\right). \tag{27}$$

Члены в первых скобках (27) быстро убывают при удалении от кромки пластины. Вещественные части (17) и (26) (при вещественном значении w_0) становятся следующими:

$$w = w_0 e^{-\beta c_s x}\cos\left(\omega t - \omega x/c_s\right), \tag{28}$$

$$w = w_0\left(e^{-\omega x/c_k}\cos\omega t + e^{-\beta_k x}\cos\left(\omega t - \omega x/c_k\right)\right)\big/2. \tag{29}$$

При $x = 0$ прогибы, вычисленные по обеим моделям, совпадают, так как оба решения удовлетворяют условиям (6). В пределах первой волны $(\omega x/c_k = 2\pi)$ первый член (29) уменьшается в 10^3 раз, и при удалении от кромки его можно не учитывать. В то же время на этом расстоянии величина $\exp(-\beta_k x)$ мало отличается от единицы. Также незначительно уменьшается и множитель $\exp(-\beta c_s x)$ в (28). Поэтому прогиб вдали от кромки по модели Кирхгоффа получается почти в два раза меньше, чем по модели Тимошенко (если не учитывается влияние окружающей среды, то прогиб уменьшается ровно в два раза). При дальнейшем удалении от кромки полоски поведение прогиба, согласно (28) и (29), зависит от отношения $c_l/\omega h$.

В рассматриваемой задаче скорости и длины волн по моделям Тимошенко и Кирхгоффа равны c_s, c_k и $L = 2\pi c_s/\omega$, $L_k = 2\pi c_k/\omega = 2\pi(12)^{-1/4}\left(hc_l/\omega\right)^{1/2}$. Скорость изгибной волны c_k зависит не только от c_l, но и от $h\omega$. Скорости c_s и c_k одинаковы, если $h\omega = 3{,}43\left(c_s^2/c_l\right)$. При принятых данных ($c_l = 10^3$ м/с, $c_s = 560$ м/с) эта величина составляет $h\omega \approx 10^3$ м/с. Если $h\omega < 10^3$ м/с, то скорость изгибной волны по модели Кирхгоффа меньше, чем скорость волны сдвига c_s, а при $h\omega > 10^3$ м/с — больше. Так как для выполнения условия (10) необходимо, чтобы $h\omega \sim 10^4$ м/с, то при рассматриваемых входных параметрах скорость c_k больше, чем скорость c_s.

По амплитудам решение (28) также дает более точную картину распространения волны по пластине, чем решение (29), согласно которому амплитуда в два раза меньше (с удалением от кромки). Если по скоростям и длинам волн указанная выше разница обусловлена характером уравнений движения по моделям Тимошенко и Кирхгоффа, то разница в величинах амплитуд зависит от граничных условий на кромке пластины. Константы A_2, A_4 для модели Кирхгоффа находятся в соответствии с (6), где условие $M = 0$ означает $\partial w^2/\partial x^2 = 0$. Если определить эти константы по уравнению для прогибов модели

Тимошенко (4) $\partial^2 w/\partial x^2 - c_s^{-2}\,\partial^2 w/\partial t^2 = 0$, исходя из условия $M = 0$ ($x = 0$), и для области $0 \le x \le \infty$ — по модели Кирхгоффа (24), то вместо (26) получим $w = w_0 e^{i\omega t}\left(\left(1-\gamma_k\right)e^{-\omega x/c_k} + \left(1+\gamma_k\right)e^{-i\omega x/c_k}\right)/2$, $\gamma_k = c_k^2/c_s^2$. При $x > \omega/c_k$ здесь остается второй член, который описывает распространение волны со скоростью c_k и амплитудой, вычисленной по (17), (28) при $\gamma_k = 1$.

Как было указано выше, при принятых значениях параметров $\gamma_k > 1$, поэтому найденная по смешанной модели Кирхгоффа–Тимошенко амплитуда волны несколько выше, чем получаемая по (17), (28). Отметим, что если в решении (12) по модели Тимошенко константы будем определять из условия $\partial w^2/\partial x^2 = 0$ ($x = 0$), то выражение для функции прогиба приобретет вид $w = w_0 e^{i\omega t}\left(\gamma e^{-i\omega x/c_l} - e^{-i\omega x/c_s}\right)/\left(\gamma - 1\right)$, что сильно отличается от (17), (28).

5. Изгибная волна в пластине с малым модулем сдвига

В системе (1)–(5) содержится еще один частный случай, соответствующий динамике пластины, изготовленной из волокон или слоев с высоким модулем упругости и относительно мягкого связующего. При этом приведенные для всей пластины модули E и G могут сильно различаться по своим значениям. Примем $G \ll E\,(c_s^2 \ll c_l^2)$. Предельным является случай, когда пластина представляет собой пакет тонких слоев со свободным скольжением относительно друг друга при изгибе. В первом уравнении (1), преобразованном с учетом (2), опустим член, содержащий множитель G/E. Тогда

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0\,. \tag{30}$$

Из второго уравнения (1) при учете (2) и (3) следует

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{2\rho_f c_f}{Gh}\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\,. \tag{31}$$

Удовлетворяя решением уравнения (30), имеющим вид $\psi = A_{1,2}\exp\left[i\omega\left(t \pm x/c_l\right)\right]$, второе условие из (6) $\partial\psi/\partial x = 0$ ($x = 0$) и учитывая отсутствие отраженной волны в полубесконечной пластине, находим $A_1 = 0$, $A_2 = 0$. Следовательно, правая часть (31) равна нулю. Реализуется безмоментное напряженно-деформированное состояние, так как изгибающий момент (2) пропорционален $\partial\psi/\partial x$.

Решение (31) в том же приближении, что и выше, при удовлетворении первому условию (6) и условию отсутствия отраженных волн имеет вид

$$w = w_0 e^{-\beta_n x} e^{i\omega(t - x/c_s)}, \quad \beta_n = \rho_f c_f/\left(\rho h c_s\right). \tag{32}$$

Амплитуда волны (32) при $x = 0$ совпадает с предыдущими решениями (28) и (29). Однако затухание этой чисто сдвиговой волны, имеющей скорость c_s, намного быстрее, чем в выше рассмотренных случаях. При принятых данных на расстоянии 1 м от кромки волна полностью исчезает. Деформация пластины происходит так, что по всей ее длине отсутствует угол поворота поперечного сечения: $\psi = 0$.

Итак, в данном приближении изгибающий момент обнуляется, а перерезывающая сила равняется $Qc_s/\left(Gh\omega\right) \approx iw_0 e^{-\beta_n x}\exp\left(i\omega\left(t - x/c_s\right)\right)$. Если, например, $w_0 = iw_{0i}$, то, согласно (6), $w = -w_{0i}\sin\omega t$ ($x = 0$) и $Qc_s/\left(Gh\omega\right) = -w_{0i}\cos\omega t$. Обозначив через ψ_1, w_1 решения уравнений (30), (31), их уточнения ψ_2, w_2 для не очень малых отношений G/E можно получить из системы

$$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2} = -\frac{12}{\gamma h^2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x} - \psi_1\right), \qquad \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} - \frac{2\rho_f c_f}{Gh}\frac{\partial w_2}{\partial t} = \frac{\partial\psi_2}{\partial x}. \tag{33}$$

6. Свободные колебания пластины конечной длины

Рассмотрим свободные колебания пластины (полоски) длиной L в рамках приближенного учета на ее поверхности (см. (3)) влияния газовой среды. В случае граничных условий $w=0$, $M=0$ ($x=0, L$) выражение для M в соответствии с (5) приводится к виду $\partial^2 w/\partial x^2=0$, так как в силу первого условия справедливо соотношение $\partial^2 w/\partial t^2=0$ ($x=0, L$). Этим условиям удовлетворяет функция вида (рассматривается только первая гармоника):

$$w = W\exp\left[(-\beta + i\omega)t\right]\sin(\pi x/L). \tag{34}$$

Подставляя (34) в (4) (в котором отброшены последние два слагаемых в члене, содержащем скобки) и сохраняя в преобразованном выражении члены только с первой степенью показателя β, получаем

$$\begin{gathered}\omega^4/c_l^4 - \omega^2\left(12/h^2 + (1+\gamma)(\pi/L)^2\right)/\left(\gamma c_l^2\right) + (1/\gamma)(\pi/L)^4 - 24\rho_f c_f \beta/\left(\rho h^3 c_s^2\right) = 0,\\ \left(12/h^2 + (1+\gamma)(\pi/L)^2 - 2\omega^2/c_s^2\right)\beta = 12\rho_f c_f/\left(\rho h^3\right).\end{gathered} \tag{35}$$

Решение (34) для уравнения модели Кирхгоффа дает

$$\omega = \pi^2 c_l h/\left(2\sqrt{3}L^2\right), \qquad \beta = \rho_f c_f/(\rho h). \tag{36}$$

Если использовать (36) для оценки порядка величины членов в (35), то из второго уравнения получается то же значение β, что и из (36), а чтобы при нахождении β из первого уравнения (35) он был таким же, в этом уравнении должен быть опущен последний член. В таком приближении частота не зависит от параметров воздействующей на пластину среды, а коэффициент затухания колебаний — от их частоты. Соответствующее уравнение относительно ω^2 подробно изучено в [3]. Найдено, что учет деформации сдвига играет бóльшую роль, чем учет инерция вращения сечения. Уменьшение собственных частот колебаний по сравнению с простой теорией (36) пропорционально $(n\pi h/L)^2$, где n — номер гармоники (для первой гармоники при $h/L \sim 10^{-1}$ оно составляет 1,7 %). Из (36) видно, что с утончением пластины затухание колебаний возрастает. За N периодов колебаний ($\omega t = 2\pi N$), согласно (36), $\beta t = 2\pi N\rho_f c_f/(\rho\omega h) = \left(4\sqrt{3}/\pi\right)\left(\rho_f c_f/(\rho c_l)\right)(L/h)^2 N$, что при $\rho_f/\rho = 10^{-3}$, $c_f/c_l = 0{,}34$, $L/h = 10$, $N = 10$ дает затухание $\exp(-\beta t) \approx 0{,}42$.

Для пластины с соотношением параметров $E \gg G$ примем решение уравнения (30) в виде $\exp\left[(-\beta + i\omega)t\right]\cos(\pi x/L)$, решение уравнения (31) — в виде (34). Тогда при ($\beta \ll \omega$) из них следует:

$$\omega = \pi c_l/L, \qquad \beta = \rho_f c_f/(\rho h). \tag{37}$$

Эта частота больше, чем вычисленная по формуле (36). Отношение ее значения из (36) к значению из (37) составляет $\sim (h/L)$. Величины показателей затухания в (36) и (37) совпадают.

7. Статический изгиб пластины

В случае статического изгиба пластины под действием распределенного давления $P = p_1 - p_2$ из (1), (2) или из (4) получаем

$$\frac{Eh^3}{12}\frac{d^4 w}{dx^4} = P - \frac{\gamma h^2}{12}\frac{d^2 P}{dx^2}. \tag{38}$$

Таким образом, в статике разница между моделями Кирхгоффа и Тимошенко проявляется только в записи нагрузочного члена в правой части (38). Кроме того, нагрузочные члены входят в выражения для изгибающего момента и перерезывающей силы:

$$M = \frac{Eh^3}{12}\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{P}{Gh}\right), \quad Q = -Gh\left(\frac{dw}{dx} - \int_0^x \left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{P}{Gh}\right)dx\right). \tag{39}$$

Если давление P распределено вдоль пластины по линейному закону, то, согласно (38), разница в записи уравнений между моделями исчезает, и отличие между ними обеспечивается только через граничные условия, в которых используются (39) и угол поворота сечения ψ.

Отметим, что ранее, при приближенном анализе динамики пластины с оговоренными входными параметрами, не учитывались последние члены в (38), (39), содержащие P. Однако в статике, когда снимаются эти ограничения, только указанные вторые члены и обеспечивают разницу между моделями Кирхгоффа и Тимошенко. Так, при $P = \text{const}$ и $w(0,\, L) = 0$, $M(0,\, L) = 0$ решение (38), (39) имеет вид

$$w = \left(PL^3x\big/\left(2Eh^3\right)\right)\left(1 - 2\,x^2\big/L^2 + x^3\big/L^3 + \left(\gamma h^2\big/L^2\right)\left(1 - x/L\right)\right). \tag{40}$$

Поправка, вносимая моделью Тимошенко, дает увеличение прогиба, пропорциональное $\gamma h^2\big/L^2$. Таким образом, чем больше $\gamma = E/G$ и отношение $(h/L)^2$, тем больше эта поправка. Для статического изгиба балок, пластин, оболочек «средней толщины» такая оценка давно установлена и отражена в литературе.

В этой же задаче с применением уравнений (30), (31) $\dfrac{d^2\psi_1}{dx^2} = 0,\ \dfrac{d^2w_1}{dx^2} = \dfrac{d\psi_1}{dx} - \dfrac{P}{Gh}$ и граничных условий $M_1(0,\, L) = 0$ (или $\partial\psi_1/\partial x = 0$), $w_1(0,\, L) = 0$ находим в первом приближении

$$\psi_1 = 0, \qquad w_1 = \left(\gamma PLx\big/\left(2Eh\right)\right)\left(1 - x/L\right), \tag{41}$$

где константа C в $\psi_1 = C$ равна нулю в силу симметрии задачи относительно середины пролета пластины. Во втором приближении (33)

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} = -\frac{12}{\gamma h^2}\left(\frac{dw_1}{dx} - \psi_1\right), \quad \frac{d^2w_2}{dx^2} = \frac{d\psi_2}{dx} - \frac{P}{Gh}, \quad \frac{d\psi_2(0,L)}{dx} = 0, \quad w_2(0,L) = 0$$

приходим к решению (40). При $x = L/2$, согласно (41) и (40), $w_1 = \gamma PL^2\big/\left(8Eh\right)$, $w_2 = PL^4\big/\left(8Eh^3\right)\left(5/4 + \gamma h^2\big/L^2\right)$.

Формально можно рассматривать и случай $\gamma h^2\big/L^2 \gg 1$, когда первое приближение w_1 мало отличается от w_2 или точного решения (40), однако при этом нарушаются рамки применимости уравнений Тимошенко. Но, несмотря на это, легко получаемое решение в первом приближении можно использовать для качественных оценок при $\gamma h^2\big/L^2 \sim 1$.

Таким образом, с помощью уравнений (30), (31) можно анализировать более сложные задачи статики и динамики пластин не только при больших значениях γ (или E/G, $c_l^2\big/c_s^2$), но и, с применением (33), при меньших значениях (наименьшее значение γ для изотропных материалов равно 3,2). Особенно это относится к более сложным, чем в (6)–(8), условиям возбуждения волн.

8. Заключение

На изгибные волны в тонкой пластине оказывает влияние находящаяся в контакте газовая среда даже при атмосферном давлении и отсутствии ее среднего движения вдоль поверхности пластины. Это влияние пропорционально отношению плотностей газа и материала пластины и отношению скорости звука в газе к произведению толщины пластины на частоту. Оно сводится к затуханию колебаний и волн в пластине. Чем меньше толщина пластины, тем быстрее происходит затухание ее изгибных колебаний и волн. При высоких частотах возбуждения могут быть выделены одновременно существующие волны растяжения–сжатия и волны сдвига, как это имеет место в чистом виде, согласно модели Тимошенко, при импульсном возбуждении [4–10]. Для этого с уменьшением толщины пластины должна быть увеличена частота возбуждения. В зависимости от условий возбуждения возникает та или иная волна.

Сравнение решений по моделям Кирхгоффа и Тимошенко позволяет определить сочетание параметров, когда эти решения близки и когда значительно расходятся. Значения скоростей распространения и длин волн не совпадают ввиду различной природы уравнений движения в этих моделях, а амплитуды волн — из-за различий в выражениях силовых факторов, учитываемых в граничных условиях. Например, разница в два раза в значениях амплитуд бегущих волн в полубесконечной пластине обусловлена разными выражениями изгибающих моментов в условиях на кромке пластины (при ненулевом значении ускорения).

Для случая малого в сравнении с модулем упругости модуля сдвига всего пакета слоев по толщине пластины производится упрощение системы двух уравнений модели Тимошенко, которые позволяют приближенно анализировать динамические явления в пластинах, изготовленных из пластиков и композитов. В задачах, где модуль сдвига не мал, такое решение уравнений служит первым приближением, которое уточняется во втором приближении. Характерно, что решение упрощенной системы затухает по времени и вдоль пластины быстрее, чем решение полной системы уравнений.

Автор благодарен Д.М. Зарипову за помощь при оформлении статьи и ее обсуждение.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №11-01-00293-а, №11-01-97003-р).

Литература

1. *Bisplinghoff R.L., Ashley H.* Principles of aeroelasticity. – New York–London: Willey, 1962. – 527 p.
2. *Dowell E.H., Ilgamov M.* Studies in nonlinear aeroelasticity. – New York–London–Paris–Tokyo: Springer Verlag, 1988. – 455 p.
3. *Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
4. *Уфлянд Я.С.* Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин // ПММ. – 1948. – Т. 12, № 3. – С. 287-300.
5. *Айнола Л., Нигул У.* Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек // Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. – 1965. – Т. 14, № 1. – С. 3-63.
6. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Физматлит, 1972. – 432 с.
7. Вибрации в технике: справочник в 6 томах. Т. 1. Колебания нелинейных систем / под ред. В.В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – 352 с.
8. *Boley B.A., Chao C.C.* Some solutions of the Timoshenko beam equations // J. Appl. Mech.-T. ASME. – 1955. – V. 22. – P. 579-586.
9. *Plass H.J.* Some solutions of the Timoshenko beam equations of short-pulse type loading // J. Appl. Mech.-T. ASME. – 1958. – V. 80. – P 379-385.
10. *Якупов Р.Г.* Волны напряжения в стержне при действии подвижной нагрузки // ПМТФ. – 2007. – Т. 48, № 2. – С. 112-122.
11. *Якупов Р.Г., Зарипов Д.М.* Воздействие сейсмических волн взрыва на магистральный трубопровод // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2010. – № 3. – С. 60-75.
12. *Попов А.Л., Чернышев Г.Н.* Механика звукоизлучения пластин и оболочек. – М.: Физматлит, 1994. – 208 с.

Поступила в редакцию 02.11.11; опубликована в электронном виде 30.06.12

Сведения об авторе

Ильгамов Марат Аксанович, дфмн, член-корр. РАН, зав. лаб., Институт механики Уфимского научного центра РАН (ИМех УНЦ РАН), 450054, Уфа, пр. Октября, 71; E-mail: ilgamov@anrb.ru