

DOI: 10.7242/1999-6691/2012.5.1.9

УДК 539.3

НЕЛИНЕЙНО-УПРУГАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ПОДВОДНОГО ТРУБОПРОВОДА В ПРОЦЕССЕ УКЛАДКИ

В.В. Елисеев, Т.В. Зиновьева

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, Санкт-Петербург, Россия

Поставлена и численно решена контактная задача, возникающая при укладке подводного трубопровода как нелинейно-упругого стержня. Рассмотрено влияние различных факторов: растяжения, сдвига, физической нелинейности материала, начального угла укладки, глубины погружения. Получено и использовано в расчетах новое выражение гидростатической нагрузки, действующей на свободный участок. Определены напряжения в трубе, нагрузка на судно, форма свободного участка и контактное давление.

Ключевые слова: нелинейно-упругий стержень, контактная задача, гидростатическая нагрузка, численное моделирование, метод конечных разностей

NONLINEAR-ELASTIC STRAIN OF UNDERWATER PIPELINE IN LAYING PROCESS

V.V. Yeliseyev and T.V. Zinovieva

Saint-Petersburg State Polytechnical University, Saint-Petersburg, Russia

The contact problem of laying of an underwater pipeline as a nonlinear-elastic rod is formulated and numerically solved. Influence of various factors, i.e., tension, shear, physical nonlinearity of the material, initial angle and depth, is considered. A new formula for hydrostatic loading is derived and used in calculations. Stresses in the pipe, loading on a vessel, form of the sagging part, and contact pressure are determined.

Key words: nonlinear-elastic rod, contact problem, hydrostatic load, numerical modeling, finite difference method

Высокие стандарты безопасности подводных трубопроводов обуславливают актуальность математического моделирования их напряженно-деформированного состояния (НДС) [1–7]. Повреждение трубопровода может возникнуть уже в процессе его укладки с судна на дно. Расчет возникающего НДС с учетом различных факторов и нелинейностей — цель данного исследования. Линеаризованная задача поставлена и решена в [7].

Вследствие малости относительной толщины рассматриваемого участка трубопровода (порядка 10^{-3}) можно использовать одномерные модели стержней как материальных линий Эйлера–Кирхгофа–Коссера [8–13]. Расчеты показали, что на свободном участке достаточно ограничиться использованием классической нелинейной модели без растяжения и сдвига, а на дне, при определении контактного давления, необходимо учитывать влияние поперечного сдвига [14]. Дно, как основание, считается горизонтальной плоскостью, жесткой и гладкой. Граница участка контакта устанавливается из соответствующих условий сопряжения. Для значительных глубин становится обязательным учет не только геометрической, но и физической нелинейности, поскольку бетон внешнего слоя трубопровода не подчиняется закону Гука. Особого внимания требует расчет гидростатической нагрузки на трубу. Встречающиеся упрощенные представления [2, 4, 5, 15] могут изменить решение и количественно, и качественно.

Предлагаемые в работе теория и методика расчета позволят оптимизировать процесс укладки подводных трубопроводов без перенапряжения на начальной стадии.

1. Постановка задачи и система уравнений

Трубопровод, представляющий собой двухслойную искривленную трубу из стали и бетона, моделируется полубесконечным стержнем, жестко закрепленным на левом конце (Рис. 1). Стержень, обладающий податливостью на изгиб, растяжение и сдвиг, нагружен собственным весом и внешним давлением жидкости. Расстояние h между закреплением и дном считается заданным; длина свободно провисающего участка l неизвестна и должна быть найдена. За отсчетную конфигурацию трубопровода принимается распрямленная форма стержня в ненапряженном состоянии.

Геометрическая форма стержня как материальной линии определяется зависимостью $\mathbf{r}(s)$ радиус-вектора \mathbf{r} образующих эту линию точек от лагранжевой координаты s ; в начальном состоянии это $\mathbf{r}_0(s)$.

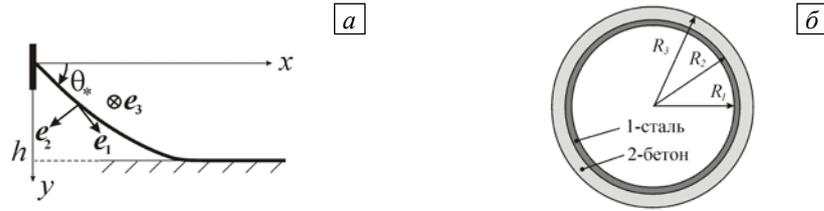


Рис. 1. Схема трубопровода (а) и его сечение (б)

Поскольку s является дуговой координатой, то производная $\mathbf{r}'_0(s)$ равна орту касательной \mathbf{t}_0 . В то же время с каждой частицей стержня как линии Коссера связана тройка ортов $\mathbf{e}_i(s)$; в начальном состоянии обычно $\mathbf{e}_{i0} = \mathbf{t}_0(s)$. Вектор кривизны и кручения стержня $\mathbf{\Omega}(s)$ определяется равенствами $\mathbf{e}'_i = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{e}_i$. Тензор поворота $\hat{\mathbf{P}} \triangleq \mathbf{e}_i \mathbf{e}_{i0}$ (по повторяющимся индексам производится суммирование) связывает направляющие орты до и после деформации: $\mathbf{e}_i = \hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{e}_{i0}$.

Система уравнений нелинейной статики упругих стержней имеет вид [10, 11]

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}' + \mathbf{q} &= 0, \quad \mathbf{M}' + \mathbf{r}' \times \mathbf{Q} + \mathbf{m} = 0, \\ \mathbf{\kappa} \triangleq \mathbf{\Omega} - \hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{\Omega}_0 &= \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{M} + \hat{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{Q}, \quad \mathbf{\Gamma} \triangleq \mathbf{r}' - \hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{r}'_0 = \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{C}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь \mathbf{Q} , \mathbf{M} — векторы силы и момента в сечении с координатой s . Два первых уравнения описывают баланс сил и моментов при распределенных нагрузках \mathbf{q} , \mathbf{m} (силовой и моментной), другие соотношения вводят векторы деформации $\mathbf{\kappa}$, $\mathbf{\Gamma}$ и связывают их с силовыми факторами посредством тензоров податливости $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{C}}$. Вся система уравнений (1) может быть выведена из принципа виртуальной работы [10–13]. Соотношения упругости в (1) соответствуют физически линейной модели с квадратичной зависимостью энергии деформации $\Pi(\mathbf{\kappa}_i, \mathbf{\Gamma}_i)$ от своих аргументов. В случае физической нелинейности $\mathbf{M} = \mathbf{e}_i \partial \Pi / \partial \mathbf{\kappa}_i$, $\mathbf{Q} = \mathbf{e}_i \partial \Pi / \partial \mathbf{\Gamma}_i$, где $\mathbf{\kappa}_i \triangleq \mathbf{\kappa} \cdot \mathbf{e}_i$, $\mathbf{\Gamma}_i \triangleq \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{e}_i$, что также следует из принципа виртуальной работы.

Тензор $\hat{\mathbf{A}}$ характеризует податливость на изгиб и кручение, тензор $\hat{\mathbf{B}}$ — на растяжение и сдвиг, тензор $\hat{\mathbf{C}}$ выражает перекрестные связи. Вычисление тензоров податливости требует рассмотрения трехмерной модели стержня. При этом используются решения Сен-Венана, асимптотический метод и вариационный подход с аппроксимациями по сечению [10–13]. Простейшим вариантом представления тензоров является следующий: $\hat{\mathbf{A}} = \sum A_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i$, $\hat{\mathbf{B}} = \sum B_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i$, $\hat{\mathbf{C}} = 0$; здесь отличны от нуля шесть податливостей: на кручение — A_1 ; на изгиб — A_2 , A_3 ; на растяжение — B_1 ; на сдвиг — B_2 , B_3 .

Далее рассмотрим деформацию трубопровода в вертикальной плоскости xu при $\mathbf{m} = 0$ с простейшим вариантом тензоров податливости. В плоскости xu (Рис. 1, а) лежат векторы \mathbf{Q} , \mathbf{q} , \mathbf{r} , $\mathbf{\Gamma}$, \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 . Перпендикулярны плоскости (то есть параллельны декартовой оси z с ортом $\mathbf{k} = \mathbf{e}_3$) векторы \mathbf{M} , $\mathbf{\kappa}$. Вместо тензора поворота достаточно взять $\theta(s)$ — угол между осью x и ортом \mathbf{e}_1 . С учетом сделанных допущений уравнения (1) упрощаются: $\mathbf{Q}' + \mathbf{q} = 0$, $\mathbf{M}' + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' \times \mathbf{Q} = 0$, $\theta' = AM$, ($A \triangleq A_3$, $M = A^{-1} \theta' \equiv A^{-1} \mathbf{\kappa}$), $\mathbf{r}' = \mathbf{e}_1 + \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{Q}$, $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{j} \sin \theta$, $\hat{\mathbf{B}} = B_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + B_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2 = -\mathbf{i} \sin \theta + \mathbf{j} \cos \theta$. В проекциях на декартовы оси x , y имеем систему

$$\begin{aligned} Q'_x + q_x &= 0, \quad Q'_y + q_y = 0, \quad M' + x' Q_y - y' Q_x = 0, \quad \theta' = AM, \\ x' &= \cos \theta + B_{xx} Q_x + B_{xy} Q_y, \quad y' = \sin \theta + B_{yx} Q_x + B_{yy} Q_y, \\ B_{xx} &= B_1 \cos^2 \theta + B_2 \sin^2 \theta, \quad B_{yy} = B_1 \sin^2 \theta + B_2 \cos^2 \theta, \quad B_{xy} = (B_1 - B_2) \sin \theta \cos \theta. \end{aligned} \quad (2)$$

2. Контактная задача с упрощенной нагрузкой

Сначала полагаем, что гидростатическая нагрузка постоянна. Тогда

$$q_x = 0, \quad q_y = \tilde{w} + \begin{cases} 0, & s < l, \\ -p(s), & s > l, \end{cases}$$

где $\tilde{w} = \text{const}$ — погонный вес трубопровода в воде [15]. Контактное давление $p(s)$ и координата $s = l$ конца свободного (провисающего) участка не известны. Очевидно, что в системе уравнений (2) $Q_x \equiv 0$.

На участке контакта имеем $y \equiv h \Rightarrow \sin \theta + B_{yy} Q_y = 0 \Rightarrow Q_y = -\sin \theta / B_{yy}$; $p = \tilde{w} + Q'_y$; $M' + x' Q_y = 0 \Rightarrow \theta'' + A(\cos \theta + B_{xy} Q_y) Q_y = 0 \Rightarrow \theta'' = (AB_2 / B_{yy}^2) \sin \theta \cos \theta$. Здесь уравнение для $\theta(s)$ допускает понижение порядка до первого:

$$\theta'^2 + AB_2 / [(B_1 - B_2) B_{yy}] = \text{const} = A / (B_1 - B_2) \Rightarrow \theta' = -\sqrt{A / B_{yy}} \sin \theta; \quad (3)$$

при этом используется условие $\theta(\infty) = 0$.

Уравнение (3) может быть проинтегрировано в квадратурах, но более простым является его численное интегрирование. В начале контактного участка

$$\theta = \theta_l, \quad M = M_l \triangleq -\sin \theta_l / \sqrt{AB_{yy}(\theta_l)}, \quad Q_y = Q_{yl} \triangleq -\sin \theta_l / B_{yy}(\theta_l). \quad (4)$$

Угол θ_l — одна из неизвестных величин рассматриваемой контактной задачи.

На свободном участке выполняется условие $Q_y = Q_{y0} - \tilde{w}s$ ($Q_{y0} = \text{const}$). Тогда из (2) получается система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для M , θ , x , y ; ее общее решение содержит четыре произвольных константы. Граничные условия имеют вид: в заделке (при $s = 0$) — $x = y = 0$, $\theta = \theta_*$ (θ_* — заданный угол закрепления); на конце свободного участка (при $s = l$) — условия (4) и $y = h$. Итого, для отыскания семи неизвестных (среди которых Q_{y0} , l , θ_l) задается семь граничных условий.

При введении новой координаты $\xi \triangleq l^{-1}s \in (0, 1)$ и записи разрешающих уравнений и граничных условий с ее использованием задача может быть решена численно методом конечных разностей. Для этого стержень делится на N отрезков с равномерным шагом $\delta = 1/N$. Дифференциальные уравнения и граничные условия записываются в разностном виде; функциям M , θ , x , y непрерывного аргумента ξ ставятся в соответствие сеточные функции M_i , θ_i , x_i , y_i ($i = 0, \dots, N$). По найденным приближенным значениям функций в узлах затем посредством интерполяции восстанавливаются сами функции [18–21].

Система ОДУ задачи представляется в операторном виде: $dY/d\xi = G(\xi, l, Y)$, где функция $Y = (M, \theta, x, y)^T$. Для аппроксимации системы используется неявная симметричная одношаговая разностная схема, имеющая второй порядок точности [18, 20, 21]: $(Y_{i+1} - Y_i) / \delta = (G_i + G_{i+1}) / 2$, ($i = 0, \dots, N-1$). В результате преобразований получается система $4N$ разностных нелинейных алгебраических уравнений. Общее количество неизвестных задачи складывается из значений четырех искомых функций в узлах $4(N+1)$ и трех дополнительных неизвестных Q_{y0} , l , θ_l . Система уравнений дополняется разностными аналогами семи граничных условий: $x_0 = y_0 = 0$, $\theta_0 = \theta_*$, $y_N = h$, $\theta_N = \theta_l$, $M_N = M_l$, $Q_{y0} = Q_{yl} + \tilde{w}l$. Далее применяется итерационный метод Ньютона [18, 19, 21], начальным приближением служит решение линейной задачи для стержневой модели в классической постановке.

Изложенный алгоритм был реализован в пакете МАТЕМАТИКА. Также задача решалась методом стрельбы в пакете МАТНСАД (с использованием встроенных функций “sbval” и “rkfixed”). Результаты вычислений совпали.

Расчеты проводились для трубопровода, сечение которого образуют два кольца, внутреннее стальное и внешнее бетонное, с радиусами $R_1 = 0,565$ м, $R_2 = 0,6$ м, $R_3 = 0,7$ м (Рис. 1, б). Эти (и следующие) параметры соответствуют реальному трубопроводу компании Nord Stream [17]. Сталь имеет модуль упругости $E_1 = 210$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu_1 = 0,28$, объемную плотность $\rho_1 = 7800$ кг/м³. В данном расчете бетон считается физически линейным материалом со свойствами: $E_2 = 27,5$ ГПа, $\nu_2 = 0,2$, $\rho_2 = 2450$ кг/м³ [16]. Плотность морской воды составляет $\rho_H = 1028$ кг/м³.

При определении жесткостей трубопровода как составного стержня считалось, что стальной и бетонный слои работают параллельно, и потому их жесткости складываются:

$$A^{-1} = \sum_{n=1,2} E_n I_n, \quad B_1^{-1} = \sum_{n=1,2} E_n S_n, \quad B_2^{-1} = K \sum_{n=1,2} \mu_n S_n, \quad (5)$$

где площади кольцевых поперечных сечений, их моменты инерции и модули сдвига вычисляются по формулам: $S_n \triangleq \pi(R_{n+1}^2 - R_n^2)$, $I_n \triangleq \pi(R_{n+1}^4 - R_n^4)/4$, $\mu_n \triangleq E_n/[2(1+\nu_n)]$. Здесь $n = 1, 2$ (индекс 1 относится к стали, 2 — к бетону), $K = 0,5$ — коэффициент сдвига для тонкого кольца, который обуславливается геометрической формой сечения; значение коэффициента установлено в результате исследования краевых задач, проведенного в работе [12].

Расчет позволил оценить влияние растяжения и сдвига. Сравнение полученных результатов с результатами по модели Кирхгофа показало, что роль растяжения ничтожна и, следовательно, податливостью B_1 можно пренебречь. Влияние сдвига невелико на свободном участке трубопровода: так координата точки контакта в модели Кирхгофа $x(l) = 265,4$ м, а в модели со сдвигом — 264,5 м; значения силы в сечении, отвечающие этим моделям, отличаются на доли процента. Но сдвиг заметно влияет на контактное давление (Рис. 2) — оно сводится к сосредоточенной силе при $B_2 \rightarrow 0$. Влияние сдвига на изгибающий момент показано на рисунке 3 для случая, когда глубина и угол закрепления составляют: $h = 100$ м, $\theta_* = 30^\circ$. Как видно из графиков, расхождение моментов мало, однако модель со сдвигом дает ненулевое значение момента в начале участка контакта (Рис. 3, б).

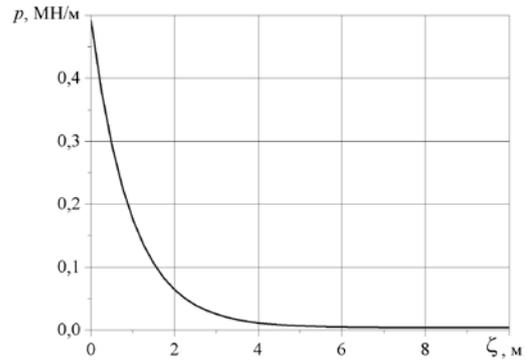


Рис. 2. Распределение контактного давления ($\zeta = s - l$)

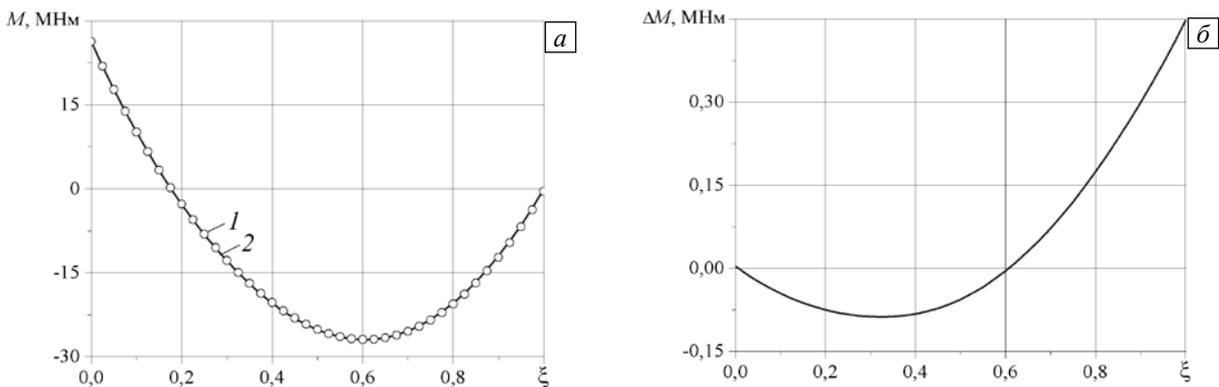


Рис. 3. Сравнение значений изгибающего момента, вычисленных по двум моделям (а): модель Кирхгофа (кривая 1) и модель со сдвигом (2); разность этих моментов (б)

Далее решается задача с $\widehat{\mathbf{V}} = 0$ (то есть задача для стержневой модели в классической постановке). С помощью этой, более простой, модели изучается влияние угла θ_* на НДС, при этом используется точное выражение гидростатической нагрузки.

3. Гидростатическая нагрузка

Рассмотрим провисающую часть трубопровода как трубку с осью L и сечением F (Рис. 4). Радиус-вектор точек на оси $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ — функция дуговой координаты. Орт \mathbf{j} направлен по оси y вертикально вниз (как и выше). Давление в произвольной точке поверхности трубки, имеющей радиус-вектор \mathbf{R} , равно $p = p_0 + \gamma \mathbf{j} \cdot \mathbf{R}$, где p_0 — давление при $y = 0$ (Рис. 1), $\gamma = \rho_H g$ — удельный вес воды.

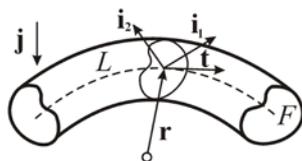


Рис. 4. Трубка в воде

На отрезок трубки $s_1 < s < s_2$ действуют гидростатические силы с главным вектором

$$-\int_O p \mathbf{N} dO = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{q}_H ds. \quad (6)$$

Здесь O — боковая поверхность, \mathbf{N} — орт внешней нормали к ней; выражение гидростатической нагрузки на единицу длины трубки \mathbf{q}_H предстоит вывести.

Вектор площадки NdO определим известными средствами дифференциальной геометрии. В каждом сечении $s = \text{const}$ введем декартовы оси x_α с ортами \mathbf{i}_α . На контуре ∂F сечения имеем $x_\alpha = x_\alpha(\omega)$ — функции дуговой координаты. Поверхность трубки задается зависимостью радиус-вектора от двух координат $\mathbf{R}(\omega, s) = \mathbf{r}(s) + \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \triangleq x_\alpha(\omega)\mathbf{i}_\alpha(s)$. По касательным к координатным линиям (ω, s) направлены векторы производных $\mathbf{R}_\omega \triangleq \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega} = x'_\alpha(\omega) \cdot \mathbf{i}_\alpha \triangleq \boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{R}_s \triangleq \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} = \mathbf{t} + \boldsymbol{\Omega}^0 \times \mathbf{x}$ ($\mathbf{r}'(s) = \mathbf{t}$, $\mathbf{i}'_\alpha(s) = \boldsymbol{\Omega}^0 \times \mathbf{i}_\alpha$) (штрих означает производные функций с одним аргументом). Введены орты касательных на контуре $\boldsymbol{\tau}$ и на оси \mathbf{t} , а также вектор кривизны–кручения трубки $\boldsymbol{\Omega}^0$. Тогда орт нормали к контуру в плоскости сечения определяется как $\mathbf{n} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{t}$, вектор площадки на поверхности трубки — $NdO = \mathbf{R}_\omega \times \mathbf{R}_s d\omega ds = [\mathbf{n} + \boldsymbol{\tau} \times (\boldsymbol{\Omega}^0 \times \mathbf{x})] d\omega ds$. Подставив эти выражения в (6), получим $\mathbf{q}_H = -\oint_{\partial F} p [\mathbf{n} + (\mathbf{t} \times \mathbf{n}) \times (\boldsymbol{\Omega}^0 \times \mathbf{x})] d\omega$.

Далее учтем зависимость $p(y)$ и воспользуемся обобщенной теоремой о дивергенции (в плоскости сечения): $\oint_{\partial F} n_\alpha W d\omega = \int_F \partial_\alpha W dF$ ($\partial_\alpha \triangleq \partial/\partial x_\alpha$). Считая, что $\int x dF = 0$ (то есть ось трубки проходит через центры тяжести сечений), получим искомое выражение гидростатической нагрузки:

$$\mathbf{q}_H = F [-\gamma \mathbf{j}_\perp + (p_0 + \gamma y) \mathbf{t}'], \quad (7)$$

где $\mathbf{j}_\perp = \mathbf{j} - \mathbf{j} \cdot \mathbf{t} \mathbf{t}$ — составляющая орта \mathbf{j} в плоскости сечения. Заметим, что вектор $\mathbf{t}'(s)$ направлен по главной нормали к оси трубки и по модулю равен кривизне оси.

Формулу (7) можно получить и более простым путем [3, 6, 7]. Элементарный вывод основывается на законе Архимеда для элемента жидкой трубки между сечениями s и $s + ds$:

$$-\gamma F \mathbf{j} ds = \mathbf{q}_H ds - F p \mathbf{t} \Big|_s^{s+ds}, \quad p = p_0 + \gamma \mathbf{j} \cdot \mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{q}_H = F [-\gamma \mathbf{j} + (p \mathbf{t})'] = F [-\gamma (\mathbf{j} - \mathbf{j} \cdot \mathbf{t} \mathbf{t}) + p \mathbf{t}']. \quad (8)$$

Однако, в отличие от представленного выше более общего вывода, этот путь не может использоваться за рамками гидростатики (когда давление определяется интегралами Бернулли или Лагранжа–Коши).

4. Трубопровод как стержень Кирхгофа

Обратимся к задаче деформирования трубопровода при укладке в случае действия гидростатической нагрузки вида (7) и $\hat{\mathbf{B}} = 0$. Перейдем в векторных уравнениях (1) к проекциям в базисе \mathbf{e}_α . Используя равенства $\mathbf{Q} \triangleq Q_\alpha \mathbf{e}_\alpha$, $\mathbf{e}'_1 = \theta' \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}'_2 = -\theta' \mathbf{e}_1$, $\mathbf{q} = w \mathbf{j} + \mathbf{q}_H$ (w — погонный вес трубопровода), из (1) получим

$$\begin{aligned} Q'_1 - \theta' Q_2 &= -q_1 = -w \sin \theta, & Q'_2 + \theta' Q_1 &= -q_2 = -(w - F\gamma) \cos \theta - F(p_0 + \gamma y) \theta', \\ M' &= -Q_2, & \theta' &= AM, & x' &= \cos \theta, & y' &= \sin \theta \end{aligned} \quad (9)$$

и запишем граничные условия: $s = 0$: $x = y = 0$, $\theta = \theta_*$; $s = l$: $y = h$, $\theta = 0$, $Q_1 = 0$, $M = 0$. На участке контакта трубопровода с дном имеем недеформированное состояние. Значение $Q_2(l-0)$ равно сосредоточенной контактной силе с обратным знаком.

Расчеты проводились при тех же параметрах, что и при упрощенном учете гидростатической нагрузки (см. раздел 2). На рисунке 5 представлены графики продольной и перерезывающей сил, а также изгибающего момента для различных значений глубины h , полученные при двух выражениях гидростатической нагрузки: точном, по формуле (7), и упрощенном; угол закрепления составлял $\theta_* = 30^\circ$. Видно, что по сравнению с приближенным точный учет гидростатической нагрузки существенно меняет картину внутренних усилий в трубопроводе. Расчеты выявили большую растягивающую силу в месте крепления. При этом упрощенный учет веса жидкости дает значение на порядок ниже (в 8 раз меньше для глубины 250 м). Такую силу должно обеспечивать судно–трубоукладчик для удержания провисающего трубопровода. Недостаточное его натяжение может привести к чрезмерному изгибу и разрушению даже на малых глубинах.

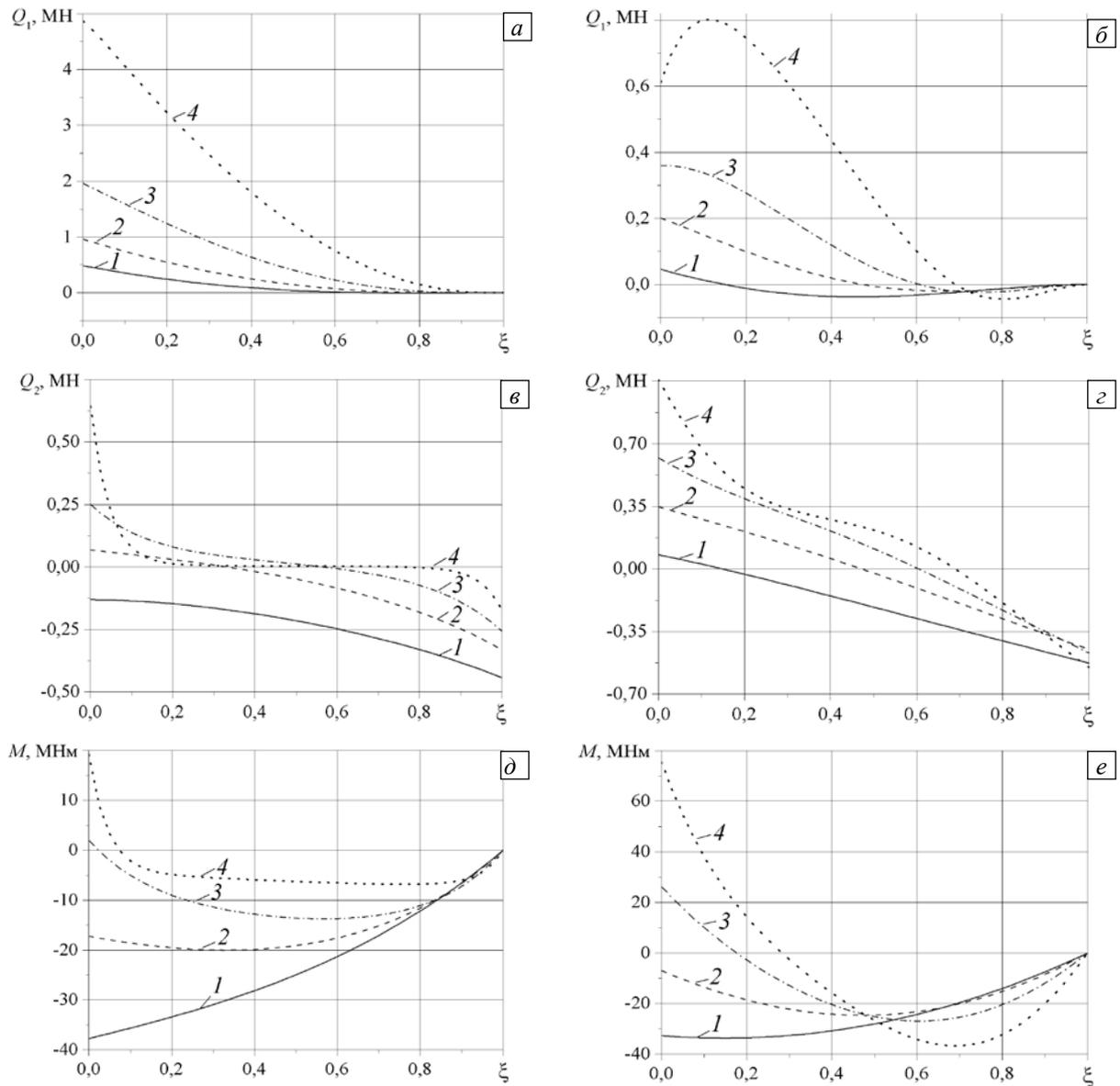


Рис. 5. Продольная (Q_1) и поперечная (Q_2) силы, изгибающий момент (M) в трубопроводе для различных значений глубины h : 30 м (кривые 1), 50 м (2), 100 м (3), 250 м (4) при точном (а, в, д) и упрощенном (б, г, е) учете гидростатической нагрузки

5. Учет физической нелинейности бетона

Деформации трубопровода значительны, и потому необходимо учесть характерную для бетона физическую нелинейность [16]. При одноосном растяжении–сжатии диаграмма деформирования бетона имеет вид, представленный на рисунке 6. Зависимость напряжений σ от деформаций ε аппроксимируется

кубической функцией: $\tilde{\sigma}(\varepsilon) = E\varepsilon + K_1\varepsilon^2 + K_2\varepsilon^3$, где

$K_1 = -E(\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1})/2$, $K_2 = E\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{-1}/3$. Но вне промежутка $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$

зависимость должна быть скорректирована исходя из соображений сохранения устойчивости материала [22]. В расчетах трубопровода было принято

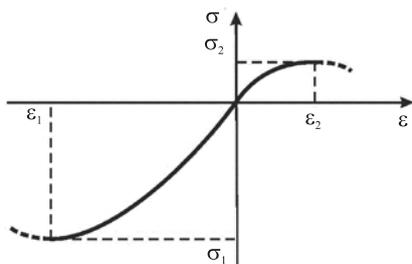


Рис. 6. Диаграмма деформирования бетона

Не углубляясь в вопросы трехмерного моделирования стержня [10–13], ограничимся элементарными представлениями об изгибе

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} \sigma_1, & \varepsilon < \varepsilon_1, \\ \tilde{\sigma}(\varepsilon), & \varepsilon_1 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_2, \\ \sigma_2, & \varepsilon > \varepsilon_2. \end{cases}$$

балки [12]. В этом случае деформация линейно распределена по толщине: $\varepsilon = -\kappa\eta$, $\eta \in (-H, H)$ (η — декартова координата в поперечном сечении, $2H$ — высота сечения). Если сечение симметрично относительно вертикальной оси η , а $b(\eta)$ — его ширина, то изгибающий момент равен

$$M_2(\kappa) = - \int_{-H}^H \sigma(-\kappa\eta)\eta b(\eta) d\eta. \quad (10)$$

Для бетонного кольца (Рис. 1, б) функция $b(\eta)$ имеет вид

$$b(\eta) = 2 \begin{cases} \sqrt{R_3^2 - \eta^2}, & R_2 \leq |\eta| \leq R_3, \\ \sqrt{R_3^2 - \eta^2} - \sqrt{R_2^2 - \eta^2}, & 0 \leq |\eta| < R_2. \end{cases}$$

Суммируя M_2 с моментом в стальной трубе, найдем изгибающий момент в трубопроводе: $M(\kappa) = E_1 I_1 \kappa + M_2(\kappa) \Rightarrow \kappa = \kappa(M)$. Подчеркнутая обратная функция подставляется в систему (9) (вместо $\theta' = AM$).

Рисунок 7 содержит результаты вычислений $M_2(\kappa)$ и $\kappa(M)$. Пунктирная линия соответствует линейной модели бетона. Графики получены при следующих значениях параметров: $\sigma_1 = -15$ МПа, $\sigma_2 = 1,35$ МПа, $\varepsilon_1 = -4,27 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_2 = 9,16 \cdot 10^{-5}$ [16].

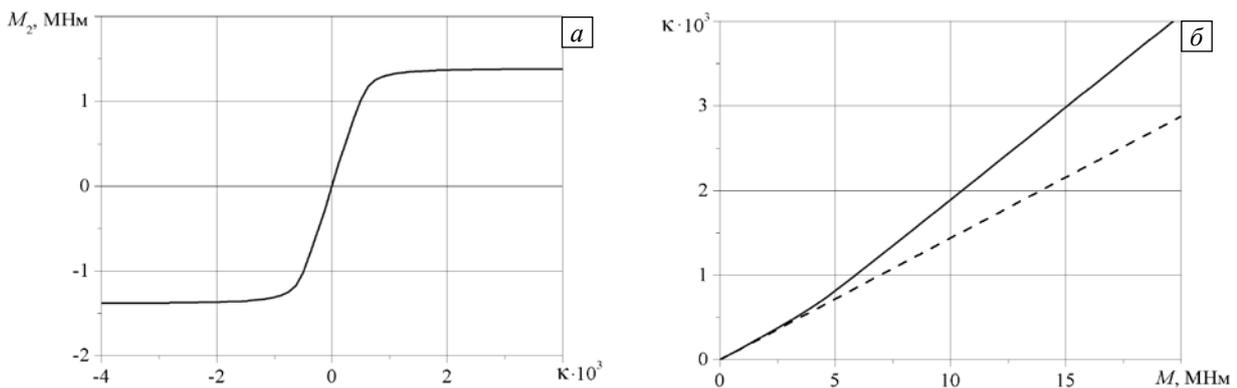


Рис. 7. Изгибающий момент в бетонной трубе (а) и зависимость кривизны от момента (б)

6. Влияние начального угла, нелинейности бетона и глубины

Численные результаты с учетом физической нелинейности бетона представлены на рисунке 8. Изображены форма провисающей части трубопровода и внутренние усилия для различных значений угла закрепления θ_* при глубине укладки $h = 100$ м. Влияние физической нелинейности показано на примере изгибающего момента (Рис. 8, з).

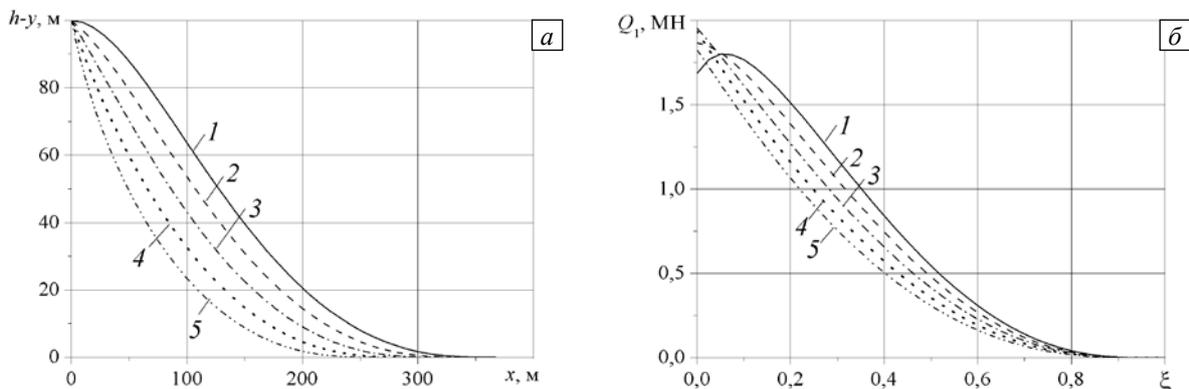


Рис. 8. Зависимости формы провисающей части трубопровода (а), продольной (б) и поперечной (в) сил, изгибающего момента (з) от значения угла закрепления θ_* , град: 0 (кривые 1), 15 (2), 30 (3), 45 (4), 60 (5) при глубине укладки $h = 100$ м; на фрагменте 4, з геометрическими фигурками показаны те же зависимости, полученные без учета физической нелинейности

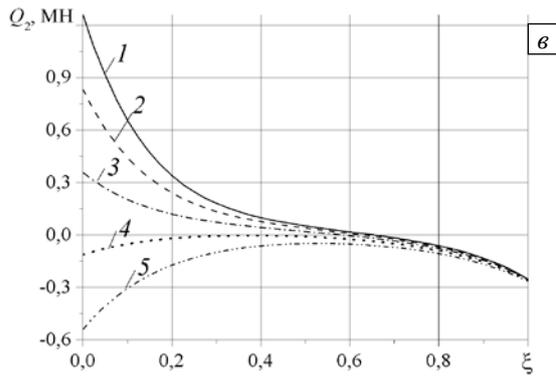
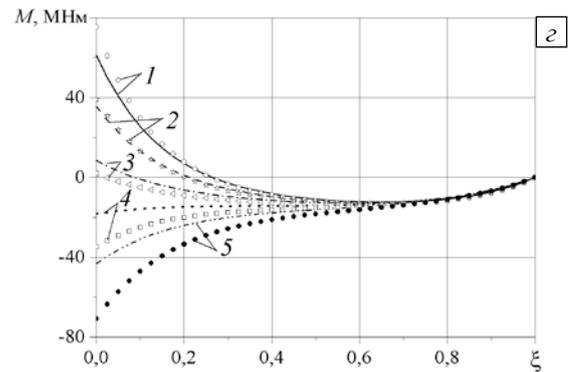


Рис. 8. Продолжение



После определения сил и момента в составном трубопроводе–стержне необходимо оценить возникающие в нем напряжения. Оставаясь в рамках элементарных представлений и полагая для бетона выполнение закона Гука, получим следующие выражения для максимальных (по сечению) напряжений в стали (индекс s) и бетоне (c): $\sigma_s = Q_1/[S_1(1+\alpha)] + |M|R_2/[I_1(1+\beta)]$, $\alpha \triangleq (E_2S_2)/(E_1S_1)$, $\beta \triangleq (E_2I_2)/(E_1I_1)$, $\sigma_c = Q_1/[S_2(1+\alpha^{-1})] + |M|R_3/[I_2(1+\beta^{-1})]$.

Зависимость максимального напряжения в стали от глубины укладки h при различных значениях угла закрепления θ_* демонстрирует рисунок 9. Графики показывают, под каким углом следует спускать трубопровод с судна, чтобы не превысить предел прочности стали $[\sigma_1] = 400$ МПа.

Исходя из полученных результатов, также можно установить оптимальную связь между глубиной и углом укладки трубопровода. Так, при достижении определенных значений глубины необходимо увеличить угол θ_* , иначе напряжения в стали недопустимо возрастут. Оптимальные значения угла укладки для глубин в диапазоне до 300 метров представлены в таблице.

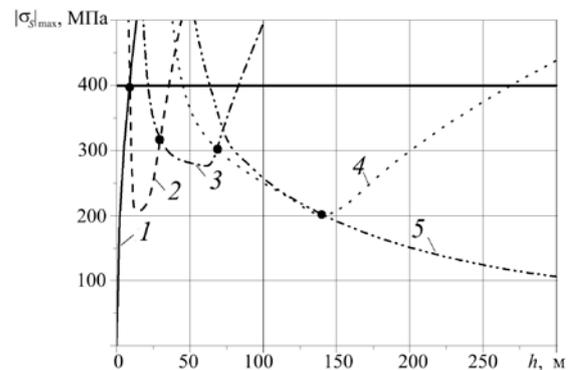
Рис. 9. Зависимость максимального напряжения в стали от глубины укладки h при различных значениях угла закрепления θ_* , град: 0 (кривая 1), 10 (2), 20 (3), 30 (4), 35 (5)

Таблица. Зависимость оптимального угла фиксации от глубины

Глубина укладки h , м	0–10	10–30	30–70	70–140	140–300
Угол укладки θ_* , град	0	10	20	30	35

Зависимость максимальных напряжений в бетоне аналогична приведенной на рисунке 9, но значения напряжений приблизительно в семь раз ниже, чем в стали. Расчеты показали, что во всем рассмотренном диапазоне глубин и углов напряжения достигают предела прочности бетона на растяжение $[\sigma_2] = 1,35$ МПа, причем происходит это одновременно почти во всех сечениях провисающей части трубопровода.

7. Заключение

Разработана математическая модель подводного трубопровода как нелинейно-упругого стержня. Определена гидростатическая нагрузка на трубопровод. Поставлены и решены (с учетом различных факторов) контактные задачи деформирования, возникающие при укладке трубопровода. Даются некоторые рекомендации по оптимизации процесса для снижения нагрузки на судно и напряжений в трубе.

Литература

1. Kyriakides S., Corona E. Mechanics of offshore pipelines. Vol. 1: Buckling and collapse. – Slovenia, Elsevier, 2007. – 400 p.
2. Lenci S., Callegari M. Simple analytical models for the J-lay problem // Acta Mechanica. – 2005. – V. 178, N. 1-2. – P. 23-39. DOI

3. *Pedersen P.T.* Equilibrium of offshore cables and pipelines during laying // *Int. Shipbuilding Progress.* – 1975.–V. 22, N. 256. – P. 399-408.
4. *Raman-Nair W., Baddour R.E.* Three-dimensional dynamics of a flexible marine riser undergoing large elastic deformations // *Multibody System Dynamics.* – 2003. – V. 10, N. 4. – P. 393-423. DOI
5. *Rienstra S.W.* Analytical approximations for offshore pipelaying problems // *Proc. of the First Int. Conf. on Industrial and Applied Mathematics. ICIAM 87.* – Amsterdam, CWI Tracts, 1987. – P. 99-108.
6. *Stump D.M., van der Heijden G.H.M.* Matched asymptotic expansions for bent and twisted rods: applications for cable and pipeline laying // *J. Eng. Math.,* 2000. – V. 38, N. 1. – P. 13-31. DOI
7. *Зиновьева Т.В.* Анализ напряженно-деформированного состояния трубопровода при укладке на морское дно // *Нефтегазовое дело.* – 2011. – № 1. – С. 220-236. – URL: http://www.ogbus.ru/authors/Zinovieva/Zinovieva_1.pdf (дата обращения: 16.01.2012).
8. *Antman St.* Nonlinear problems of elasticity. – Springer, 1995. – 751 p.
9. *Попов Е.П.* Теория и расчет гибких упругих стержней. – М.: Наука, 1986. – 296 с.
10. *Елисеев В.В.* Механика упругих тел. – СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. – 336 с.
11. *Елисеев В.В., Зиновьева Т.В.* Механика тонкостенных конструкций. Теория стержней: Учеб. пособие. – СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2008. – 96 с.
12. *Елисеев В.В.* Механика деформируемого твердого тела. – СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2006. – 231 с.
13. *Ветюков Ю.М., Елисеев В.В.* Моделирование каркасов зданий как пространственных стержневых систем с геометрической и физической нелинейностью // *Вычисл. мех. сплош. сред.* – 2010. – Т. 3, № 3. – С. 32-45.
14. *Моссаковский В.И., Гудрамович В.С., Макеев Е.М.* Контактные задачи теории оболочек и стержней. – М.: Машиностроение, 1978. – 247 с.
15. *Svetlitsky V.A.* Dynamics of rods. – Springer, 2005. – 448 p.
16. *Карпенко Н.И.* Общие модели механики железобетона. – М.: Стройиздат, 1996. – 416 с.
17. Nord Stream: строительство. URL: <http://www.nord-stream.com/ru/gazoprovod/cozdanie/> (дата обращения: 11.03.2012).
18. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.Г.* Численные методы. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2003. – 630 с.
19. *Каханер Д., Моулер К., Нэйш С.* Численные методы и программное обеспечение. – М.: Мир, 1998. – 576 с.
20. *Кирьянов Д.В., Кирьянова Е.Н.* Вычислительная физика. – М.: Полибук Мультимедиа, 2006. – 352 с.
21. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
22. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969.– 421 с.

Поступила в редакцию 27.06.11; опубликована в электронном виде 11.04.12

Сведения об авторах

Елисеев Владимир Васильевич, дфмн, проф., Санкт-Петербургский государственный политехнический университет (СПбГПУ), Россия, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29; E-mail: yeliseyev@inbox.ru

Зиновьева Татьяна Владимировна, ктн, доц., СПбГПУ; E-mail: tatiana.zinovieva@gmail.com