

DOI: 10.7242/1999-6691/2012.5.1.4
УДК 539.3:539.384.4

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОЭЛЕМЕНТНОЙ СТЕРЖНЕВОЙ КОНСТРУКЦИИ ПРИ НЕПРОПОРЦИОНАЛЬНОМ НАГРУЖЕНИИ

М.Л. Бартоломей¹, Н.А. Труфанов¹, И.Н. Шардаков²

¹Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

²Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

Исследовано напряженно-деформированное состояние и процесс потери устойчивости многоэлементной стержневой конструкции, опирающейся на систему колонн, при заданных осадках колонн. Разработана численная модель конструкции, позволяющая выявить элементы, потерявшие устойчивость. Приведено сравнение результатов, характеризующих процесс потери устойчивости, полученных при расчете инженерным и численным методами. Определены величины критических воздействий, приводящих к полной и локальной потере устойчивости конструкции.

Ключевые слова: метод конечных элементов, устойчивость, многоэлементная стержневая конструкция, критические воздействия

NUMERICAL ANALYSIS OF THE STABILITY OF A MULTI-ELEMENT ROD STRUCTURE UNDER DISPROPORTIONATE LOADING

M.L. Bartolomey¹, N.A. Trufanov¹ and I.N. Shardakov²

¹Perm State National Research Polytechnical University, Perm, Russia

²Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

We study the stress-strain state and the process of stability loss for a multi-element rod structure supported by pillars, whose subsidence is prescribed. A numerical model is developed to reveal structure elements with lost stability. The calculated results corresponding to the stability loss process are compared with the data on stability loss obtained by engineering methods. Critical impacts that cause complete and local stability loss in the structure are determined.

Key words: finite element method, stability, multi-element rod structure, critical impact

Современные материалы и технологии строительства позволяют создавать уникальные проекты, в которых существует возможность использования сложных многопролетных стержневых конструкций. При проектировании таких конструкций должны выполняться расчеты, оценивающие прочность, несущую способность, а также устойчивость как всей системы, так и ее отдельных элементов. Подобные расчеты сложных систем весьма трудоемки, поэтому их можно выполнить только с помощью численных методов.

В рамках данной статьи рассматривается только расчет на устойчивость стержневых систем, который сводится к определению критических сил. Превышение величины критической силы вызывает переход системы из одного равновесного состояния в другое и может вызвать аварию или даже разрушение конструкции, поэтому для практики важно знание спектра критических сил и соответствующих им форм потери устойчивости [1]. Впервые задача исследования устойчивости стержня постоянного поперечного сечения с шарнирно закрепленными концами, сжатого силой, приложенной к торцу, поставлена и решена Л. Эйлером. Им же выведена формула для критической силы на основе приближенного дифференциального уравнения изогнутой оси.

Устойчивости рам и ферм посвящено большое число работ. Так, в [2] на основе численного подхода сформулирован матричный метод решения задач устойчивости для сложных стержневых систем с произвольной степенью статической неопределенности. Расчет на устойчивость стержневых систем численными методами обсуждается в [1], [3]. Из современных работ наиболее подробно теория и расчет стержней за пределами потери устойчивости исследован в [4–6]. В монографии [7] анализируется устойчивость стержней при ползучести с учетом начальных несовершенств, определено критическое время и показана его существенная зависимость от отношения размеров стержня, а также релаксационных констант материала. Исследованию устойчивости сжатого стержня при наличии несовершенств посвящена работа [8]. В [9] предлагается методика корректного определения в пределах упругости расчетных длин сжатых элементов плоских стержневых конструкций. В [10] выведены основные соотношения и даются примеры расчета строительных стержневых конструкций из железобетона. Кроме этого, имеются работы, в которых критическая сила и форма потери устойчивости эйлеровского стержня вычисляются с учетом демпфирования [11] и анизотропии материала стержня [12].

В данной работе рассматриваются и сравниваются два различных подхода к определению критической силы и оценке устойчивости стержневой конструкции. В одном из них сила находится инженерным методом, в другом — численным. Также анализируется изменение состояния стержневой системы при постепенном увеличении нагрузки, действующей на конструкцию.

1. Постановка задачи

Исследуется общая и локальная потеря устойчивости многоэлементной стержневой конструкции под воздействием неравномерных вертикальных смещений (осадок). Под локальной понимается потеря устойчивости отдельных элементов конструкции, которая не приводит к разрушению конструкции в целом или потере ее работоспособности. Общая же потеря устойчивости означает выход из строя большого количества элементов и полную утрату несущей способности всей конструкции. Расчетная схема исследуемого строительного объекта изображена на рисунке 1, *а*.

Расчет стержневой конструкции на устойчивость выполнен при следующих предположениях: из расчетной схемы исключается грунтовый массив, и вся неравномерность замеренных осадок, возникающая из-за изменения свойств и состояния грунтового массива, переносится на колонны, которые служат опорой для стержневой конструкции. Колонны, в силу их достаточно высокой продольной жесткости, также исключаются из расчетной схемы и, таким образом, перенесенная на них осадка прикладывается непосредственно к узлам фермы (множество M), в которых колонны стыкуются с фермой. Ввиду принятых упрощений расчетная схема приобретает вид, изображенный на рисунке 1, *б*.

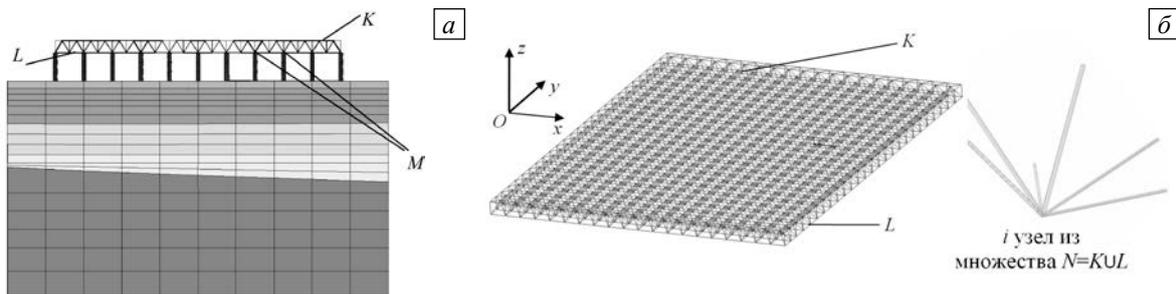


Рис. 1. Схема строительного объекта (*а*) и расчетная схема исследуемой стержневой конструкции (*б*)

Для определения положения любой точки конструкции введем в рассмотрение правую прямоугольную систему глобальных координат $Oxyz$, а с каждым стержнем свяжем локальную систему координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ (Рис. 2). С любым i -м узлом конструкции может быть соотнесен вектор \mathbf{V}_i (например, обобщенных перемещений) с размерностью, равной числу принятых степеней свободы одного узла. Все характеристики отдельного узла конструкции могут быть установлены как в глобальной системе координат $Oxyz$, так и в локальной $O\xi_1\xi_2\xi_3$; для перехода из одной системы координат в другую используются соответствующие формулы: $\mathbf{V}_i = T_0 \mathbf{V}'_i$, где T_0 — матрица преобразования, которая в каждом конкретном случае находится из геометрических соображений; \mathbf{V}'_i — вектор узловых неизвестных в локальной системе координат [13].

Математическая постановка задачи упругого деформирования произвольного стержня в составе многоэлементной конструкции содержит следующие уравнения:

– геометрические

$$\varphi_1 = \frac{du_3}{d\xi_1}, \quad \varphi_2 = \frac{du_2}{d\xi_1}, \quad \varepsilon_1 = \frac{du_1}{d\xi_1}, \quad \chi = \frac{d\varphi_1}{d\xi_1}, \quad \chi_2 = -\frac{d^2u_3}{d\xi_1^2}, \quad \chi_3 = -\frac{d^2u_2}{d\xi_1^2}, \quad (1)$$

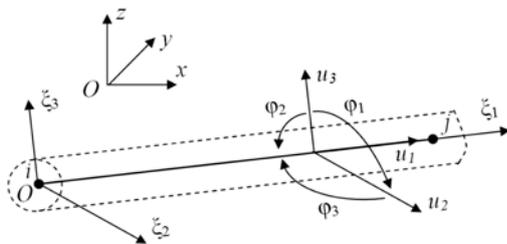


Рис. 2. Направление компонент перемещений и углов поворота

где u_1, u_2 и u_3 — перемещения точки стержня, расположенной на оси стержня ξ_1 , в направлениях ξ_1, ξ_2 и ξ_3 соответственно; φ_1, φ_2 и φ_3 — углы поворота стержня относительно осей ξ_1, ξ_2 и ξ_3 соответственно; ε_1 — осевая деформация; χ — относительный угол закручивания; χ_2 и χ_3 — кривизны в направлениях ξ_2 и ξ_3 соответственно;

– физические

$$N = EA\varepsilon_1, \quad M = GJ\chi, \quad M_2 = EI_2\chi_2, \quad M_3 = EI_3\chi_3, \quad (2)$$

где N — продольная сила; M — крутящий, M_2 и M_3 — изгибающие моменты; A — площадь поперечного сечения стержня; GJ — жесткость стержня при кручении; E — модуль упругости материала; I_2 и I_3 — главные моменты инерции поперечного сечения относительно осей ξ_2 и ξ_3 соответственно;

– равновесия

$$\frac{dN}{d\xi_1} = 0, \quad \frac{dQ_2}{d\xi_1} = 0, \quad \frac{dQ_3}{d\xi_1} + q_3 (\cos(z, \xi_3) + \cos(z, \xi_2) + \cos(z, \xi_1)) = 0, \quad \frac{dM}{d\xi_1} = 0, \quad \frac{dM_2}{d\xi_1} = 0, \quad \frac{dM_3}{d\xi_1} = 0, \quad (3)$$

где Q_2 и Q_3 — поперечные силы, q_3 — массовые силы; $\cos(z, \xi_i)$ ($i = 1, 2, 3$) — косинусы углов между соответствующими осями из матрицы преобразования координат T_0 .

Для замыкания системы уравнений (1)–(3) необходимо сформулировать граничные условия. Внешние воздействия на конструкцию складываются из нагрузок постоянных, состоящих из собственного веса конструкции, веса кровли и снега, и переменных во времени, связанных с неравномерностью осадок. Ко всем узлам K верхнего пояса стержневой системы приложены сосредоточенные силы P_i , соответствующие действию веса кровли и снеговой нагрузки. Все узлы L нижнего пояса свободны от нагрузок, за исключением относящихся к множеству M . В узлах множества M известны перемещения W_j , соответствующие неравномерной осадке колонн:

$$Q_z|_i = P_i, \quad i \in K, \quad (4)$$

$$u_z|_j = W_j, \quad j \in L. \quad (5)$$

Также для всех стержней, соединенных в узле i множества N (Рис. 1, б), перемещения этого узла одинаковы, что соответствует шарнирному соединению стержней.

Вследствие того, что осадки колонн конструкции ведут себя во времени эволюционно, их изменения носят характер процесса, суммарная нагрузка является непропорциональной, то есть имеет место непростое (по Ильюшину) нагружение конструкции. Поэтому оценку устойчивости в данной ситуации также следует рассматривать как процесс.

2. Алгоритм численного исследования устойчивости

Сначала краевая задача (1)–(5) сводилась к вариационной с использованием принципа возможных перемещений [14]

$$\delta U = \delta A, \quad (6)$$

где δU — вариация потенциальной энергии деформации системы, δA — работа внешних сил на возможных перемещениях системы. Далее уравнение (6) решалось методом конечных элементов [15] с использованием программного комплекса ANSYS. Для дискретизации исследуемого объекта был выбран балочный конечный элемент типа BEAM44, имеющий возможность воспринимать растяжение, сжатие, кручение и изгиб. Также элемент допускает различие геометрических характеристик поперечных сечений в каждом узле и смещение узлов относительно оси балки. Каждый из узлов элемента имеет шесть степеней свободы: перемещения в направлении осей x , y , z и повороты вокруг этих осей.

Оценить устойчивость стержневой системы можно несколькими способами. Так, для отдельного продольно сжатого шарнирно закрепленного стержня известно определение критической силы по Эйлеру

$$P_{кр} = \pi^2 EI_x / (\mu l)^2, \quad (7)$$

где E — модуль упругости материала, I_x — момент инерции поперечного сечения стержня, l — длина стержня, μ — безразмерный коэффициент приведения длины [14].

В то же время нормы и правила, принятые в строительстве (СНиП) [16], дают для вычисления критической силы формулу:

$$P_{кр} = A\varphi R_y, \quad (8)$$

где A — площадь поперечного сечения стержня; R_y — расчетное напряжение; φ — коэффициент вида:

$$\varphi = \begin{cases} 1 - (0,073 - 5,53 R_y/E) \tilde{\lambda}^{3/2}, & 0 < \tilde{\lambda} \leq 2,5, \\ 1,47 - 13 R_y/E - (0,371 - 27,3 R_y/E) \tilde{\lambda} + (0,0275 - 5,53 R_y/E) \tilde{\lambda}^2, & 2,5 < \tilde{\lambda} \leq 4,5, \\ 332 / [\tilde{\lambda}^2 (51 - \tilde{\lambda})], & \tilde{\lambda} > 4,5, \end{cases} \quad (9)$$

где $\tilde{\lambda} = \lambda \sqrt{R_y/E}$; λ — гибкость стержня.

И, наконец, известны численные методы определения критических сил для идеальных упругих линейных систем. В таком случае предсказывается теоретическое значение нагрузок, вызывающих общую потерю устойчивости (точку бифуркации), находится критическая система внешних воздействий, при которой система теряет устойчивость (коэффициент, на который можно увеличить внешние воздействия в конструкции), а также форма потери устойчивости [17]. Критические величины получаются из решения матричного уравнения:

$$([K] + \lambda_i [S]) \{\psi\}_i = \{0\}, \quad (10)$$

где $[K]$ — матрица жесткости упругой системы; $[S]$ — матрица геометрической жесткости; λ_i , $\{\psi\}_i$ — i -й параметр нагружения и i -й вектор узловых перемещений ансамбля элементов, соответствующий нормированному вектору узловых сил, вызывающий только сжатие в конечных элементах. После потери устойчивости узловые перемещения становятся неопределимыми. Математическим критерием потери устойчивости является равенство $\det([K] + \lambda_i [S]) = 0$. Если же подойти к анализу устойчивости стержневой системы как к обобщенной проблеме, то уравнение (10) может быть преобразовано к виду $[K]\{X\} = -\lambda_i [S]\{X\}$, где $\{X\}$ — собственный вектор, характеризующий возможную форму потери устойчивости. Таким образом, задача устойчивости сводится к решению задачи на собственные значения [1]. Параметр нагружения λ может принимать значения $\lambda \geq 1$ или $\lambda \leq 1$. При этом потеря устойчивости наступит

- при увеличении действующей нагрузки в λ раз, если $\lambda > 1$;
- при действующей нагрузке, если $\lambda = 1$;
- при усилиях, в λ раз меньше действующих, если $\lambda < 1$.

3. Результаты вычислений

Потеря устойчивости многоэлементной стержневой системы (Рис. 1, б) оценивалась инженерным и численным методами. На систему оказывали воздействие собственный вес конструкции, неравномерность осадки колонн, вес кровли, вес снега.

3.1. Расчет инженерным методом

При оценке устойчивости в соответствии со СНиП работоспособность всей системы оценивалась по двум критериям: по критической силе (см. формулу (8)) для стержней, в которых возникали сжимающие усилия; по осевым напряжениям для стержней, которые испытывали растягивающие усилия (стержень считался работоспособным, если напряжения в нем оставались меньше предела текучести его материала). При этом предполагалось, что осадки колонн стержневой системы от нуля до замеренного значения увеличиваются постепенно и равномерно. Для моделирования прироста вертикальных перемещений, соответствующих осадке колонн, вводился коэффициент пропорциональности a .

Алгоритм оценки устойчивости стержневой конструкции является пошаговым и выглядит следующим образом:

- 1) Действующие на конструкцию нагрузки разбиваются на две составляющие: постоянно действующая во времени (включает собственный вес, вес кровли и снега) и нагрузка, развивающаяся постепенно;
- 2) Моделируется прирост осадок колонн, для чего вводится коэффициент пропорциональности a , который может изменяться от 0 до 1: $a = 0$ соответствует нулевым осадкам колонн, $a = 1$ — максимальной замеренной разности осадки колонн.

3) К рассчитываемой конструкции (Рис. 1, б) прикладывается постоянная нагрузка и учитываются вычисленные с использованием коэффициента a осадки колонн. На этом и каждом последующем шаге после определения НДС конструкции все стержневые элементы системы поочередно оцениваются по описанным выше критериям, и те из них, которые испытывают сжимающие или растягивающие усилия выше критических, исключаются из работы системы. Коэффициент a увеличивается только в том случае, если после перерасчета НДС конструкции процесс потери устойчивости останавливается, то есть на текущем шаге нагружения больше не появляются стержни, теряющие устойчивость или не проходящие по прочности. Данная последовательность расчета выполняется до тех пор, пока система не станет геометрически неопределимой.

В таблице приведено количество стержней, переставших «работать» и по этой причине исключенных из рассмотрения перед текущим шагом нагружения. Процесс нарастания осадок, моделируемый увеличением коэффициента a от 0 до 1, имеет различный шаг: $\Delta a = 0,1$, $\Delta a = 0,05$, $\Delta a = 0,02$ и $\Delta a = 0,01$. В левом столбце приведены значения коэффициента a , возможные при различных шагах нарастания осадок. Некоторые из значений a повторяются, так как на отвечающих им шагах происходит исключение стержней из работы системы, и НДС конструкции пересчитывается без очередного увеличения осадок.

Таблица. Процесс потери устойчивости конструкции при вычислении методом СНИП

Величина коэффициента a	Шаг процесса нарастания осадок							
	$\Delta a = 0,1$		$\Delta a = 0,05$		$\Delta a = 0,02$		$\Delta a = 0,01$	
	Количество стержней, исключенных из рассмотрения как не удовлетворяющих критериям							
	потеряна устойчивость	превышен предел текучести	потеряна устойчивость	превышен предел текучести	потеряна устойчивость	превышен предел текучести	потеряна устойчивость	превышен предел текучести
0	6	0	6	0	6	0	6	0
0	6	0	6	0	6	0	6	0
0,01							6	0
0,02					6	0	6	0
0,03							6	0
0,04					6	0	6	0
0,05			6	0			6	0
0,06					6	0	6	0
0,07							6	0
0,08					6	0	6	0
0,09							6	0
0,10	6	0	6	0	6	0	6	0
0,11							6	0
0,12					6	0	6	0
0,13							6	0
0,14					6	0	6	0
0,15			6	0			6	0
0,16					6	0	6	0
0,17							6	0
0,18					7	0	7	0
0,18					8	0	8	0
0,18							8	0
0,19							8	0
0,20	8	0	8	0	9	0	9	0
0,20	10	0	10	0	10	0	10	0
0,21							11	0
0,21							16	0
0,21							30	0
0,21							51	1
0,21							101	4
0,22					11	0		
0,22					16	0		
0,22					30	0		
0,22					52	1		
0,22					102	4		
0,25			13	0				
0,25			26	0				
0,25			40	0				
0,25			72	2				
0,25			159	23				
0,30	15	0						
0,30	28	0						
0,30	43	0						
0,30	78	2						
0,30	160	28						

При рассмотренных шагах процесса нарастания осадок система становится геометрически неопределимой, вследствие чего расчет останавливается на разных этапах, но характер и последовательность исключения стержней из работы сохраняются.

На рисунке 3 показана качественная картина процесса деформирования стержневой конструкции (вид сверху), изображенной на рисунке 1, б. Темными линиями обозначены стержни, не удовлетворяющие выбранным критериям устойчивости и прочности, которые исключаются из рассмотрения перед следующим шагом нагружения. Рисунок свидетельствует, что с ростом осадок колонн из строя выходит большее количество стержневых элементов, что может привести к обрушению всей конструкции, то есть к глобальной потере устойчивости системы.

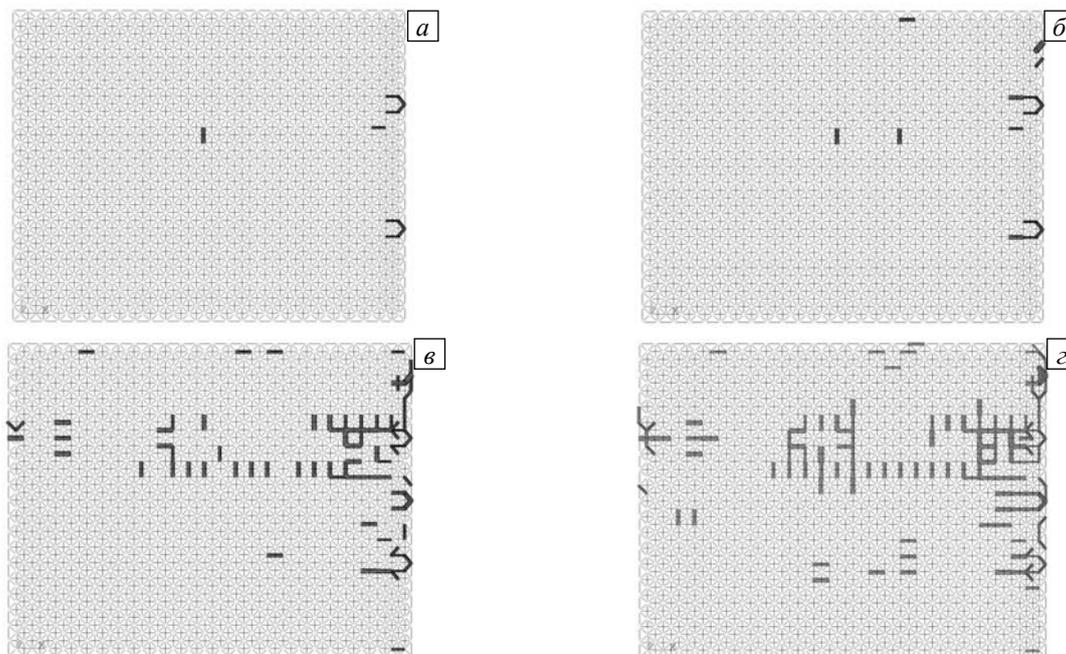


Рис. 3. Качественная картина процесса потери устойчивости стержневой конструкции при вычислении согласно СНиП с различными значениями коэффициента пропорциональности осадок a : 0,20 (а); 0,21 (б); 0,22 (в); 0,25 (г)

3.2. Расчет численным методом

При оценке устойчивости стержневой конструкции с помощью модуля Buckling Analysis программного комплекса ANSYS решалась тестовая задача. Анализировалась устойчивость круглой консольной балки длиной $L=1$ м и радиусом $r=0,01$ м под действием сжимающей силы $P=1$ Н. Предполагалось, что материал балки — сталь с модулем упругости $E=2,058 \cdot 10^{11}$ Па, балка имеет момент инерции поперечного сечения $I_x=0,784 \cdot 10^{-8}$ м⁴.

Численное решение с использованием ANSYS заключалось в определении коэффициента λ , который отвечает за значение критической силы: $P_{кр} = P \cdot \lambda$. Было получено следующее его значение: $\lambda = 3979,2$; ему соответствует величина критической силы $P_{кр} = 3979,2$ Н. Для верификации полученного результата критическая сила вычислялась также по формуле Эйлера (7). Согласно [14] коэффициент приведения длины μ для консольной балки составляет $\mu = 2$. Таким образом, $P_{кр} = 3981,1$ Н. Разница между значениями сил, полученными по формуле Эйлера и численным методом, составляет менее 0,5%, что является приемлемым в инженерных расчетах.

Устойчивость конструкции оценивалась численным методом также при постепенном увеличении параметра a , то есть рост осадок колонн моделировался как процесс. Изменение коэффициента λ , характеризующего состояние конструкции, при постепенном увеличении параметра a приведено на рисунке 4. Из рисунка видно, что конструкция теряет устойчивость только при действии полной нагрузки.

При решении задачи в программном комплексе ANSYS в случае действия всех нагрузок, как постоянных, так и переменных во времени (им отвечает $a=1$), получается значение коэффициента $\lambda = 0,95692$. Так как $\lambda < 1$, то система при действующих нагрузках теряет устойчивость (см. раздел 2). Потеря устойчивости при этом носит локальный характер, ее форма, соответствующая вычисленному коэффициенту λ , приведена на рисунке 5. Геометрические параметры рассматриваемой стержневой

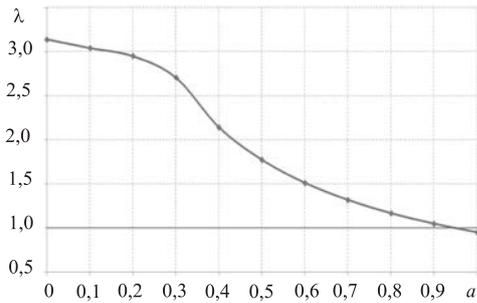


Рис. 4. Изменение коэффициента λ при постепенном увеличении осадок колонн

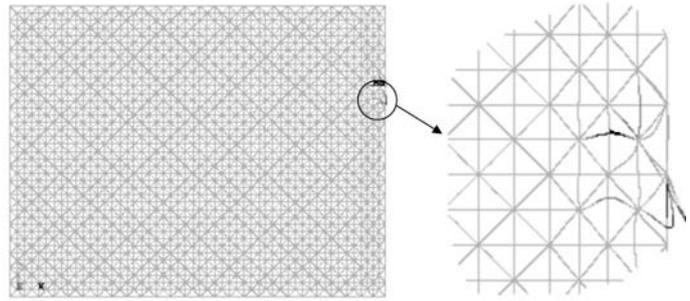


Рис. 5. Форма и характер потери устойчивости конструкции при расчете численным методом

конструкции и действующие нагрузки соответствуют параметрам и нагружению реального объекта, за которым ведется наблюдение. Конструкция покрытия исследуемого строительного объекта в целом не потеряла устойчивость, наблюдается лишь локальная потеря устойчивости отдельных стержней.

Таким образом, и инженерный, и численный методы дают одинаковый качественный результат: при действующих нагрузках исследуемая многоэлементная стержневая система теряет устойчивость. Результаты инженерного метода показывают глобальную потерю устойчивости системы в силу того, что система становится геометрически неопределимой. Численный метод выявляет локальный характер потери устойчивости.

С использованием модуля ANSYS также изучалась устойчивость стержневой конструкции при действии только постоянных нагрузок и полной потере несущей способности одной из опорных колонн системы. Схема расположения колонн и полученные значения коэффициента λ при исключении соответствующей колонны из работы системы приведены на рисунке 6.

В результате расчета получено, что при потере несущей способности одной из выделенных четырех колонн (Рис. 6) стержневая система теряет устойчивость, так как величина параметра нагружения λ в этих случаях меньше 1. Потеря устойчивости стержневой системы при выходе из строя одной из выделенных четырех колонн носит локальный характер, аналогичный приведенному на рисунке 5.

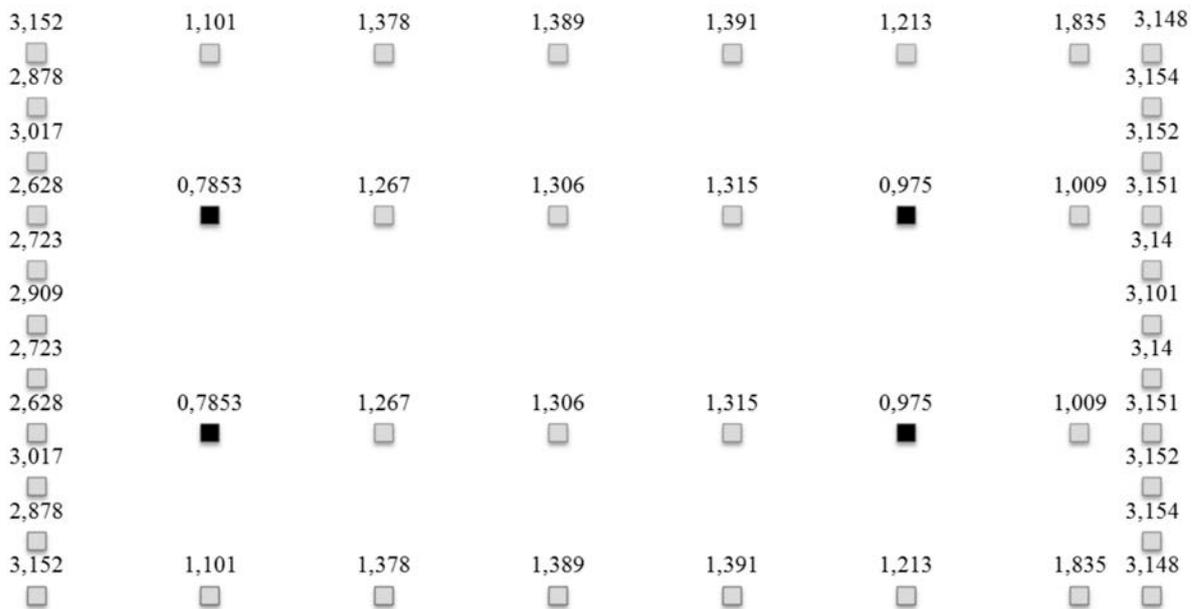


Рис. 6. Значения коэффициента λ в системе колонн при действии постоянной нагрузки; черным цветом ($\lambda < 1$) выделены колонны, удаление каждой из которых ведет к потере устойчивости всей системы

4. Заключение

В работе проведена оценка устойчивости многоэлементной стержневой системы инженерным и численным методами. Результаты оценки сильно различаются: инженерный метод существенно занижает величину критических воздействий по сравнению с полученной численным методом. Данная ситуация возникает вследствие того, что при реализации первого подхода не учитывается жесткость стержней, потерявших устойчивость, вследствие их исключения из расчетной схемы. Таким образом, в дальнейших

исследованиях устойчивости многоэлементной стержневой конструкции необходимо учитывать жесткость стержней, потерявших устойчивость.

Показана возможность развития потери устойчивости конструкции строительного покрытия при полной потере несущей способности одной из колонн и установлены местоположения четырех таких колонн.

Литература

1. *Гайджуров П.П.* Расчет стержневых систем на устойчивость и колебания: Учеб. пособие для вузов. – Новочеркасск: ЮРГТУ, 2009. – 195 с.
2. *Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лащеников Б.Я., Шапошников Н.Н.* Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. – М: Стройиздат, 1984. – 413с.
3. *Баженов В.А., Даценко А.Ф., Оробей В.Ф., Сурьянинов Н.Г.* Численные методы в механике: Учеб. пособие. – 2004. – 564 с. (URL: http://www.ph4s.ru/book_pc_chisl.html).
4. *Попов Е.П.* Теория и расчет гибких упругих стержней. – М.: Наука, 1986. – 296 с.
5. *Кузнецов В.В., Левяков С.В.* О вторичной потере устойчивости Эйлера стержня // ПМТФ. – 1999. – Т. 40, № 6. – С. 184-185.
6. *Левяков С.В.* Формы равновесия и вторичная потеря устойчивости прямого стержня, нагруженного продольной силой // ПМТФ. – 2001. – Т. 42, № 2. – С. 153-159.
7. *Перельмутер А.В., Сливкер В.И.* Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. – Киев: Сталь, 2002. – 600 с.
8. *Языев С.Б.* Устойчивость стержней при ползучести с учетом начальных несовершенств / Автореф. дис. канд. тех. наук: 05.23.17. – Ростов-на-Дону, 2010. – 21 с.
9. *Геммерлинг И.Г.* Развитие методов оптимизации и расчета на устойчивость упругих стержневых систем / Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. – М., 1996. – 15 с.
10. *Ветюков М.Ю., Елисеев В.В.* Моделирование каркасов зданий как пространственных стержневых систем с геометрической и физической нелинейностью // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2010. – Т. 3, № 3. – С. 32-45.
11. *Lee H.P.* Damping effects on the dynamic stability of a rod subjected to intermediate follower loads // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. – 1996. – V. 131, N 1-2. – P. 147-157. DOI
12. *Majumdar A., Prior C., Goriely A.* Stability estimates for a twisted rod under terminal loads: a three-dimensional study (URL: <http://eprints.maths.ox.ac.uk/1450/1/finalOR64.pdf>)
13. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов: Справочник / Под общ. ред. В.И. Мяченкова. – М.: Машиностроение, 1989. – 520 с.
14. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. — М.: Наука, 1988. – 712с.
15. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике – М.: Мир, 1975. – 541 с.
16. СНиП П-23-81 Стальные конструкции. – М.: ФГУП ЦПП, 2005. – 90 с.
17. *Басов К.А.* ANSYS. Справочник пользователя. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 640 с.

Поступила в редакцию 16.12.11; опубликована в электронном виде 11.04.12

Сведения об авторах

Бартоломей Мария Леонидовна, асп., Пермский национальный исследовательский политехнический университет (ПНИПУ), 614990, Пермь, Комсомольский пр-т, д. 29; E-mail: mbartolomey@mail.ru

Труфанов Николай Александрович, дтн, проф., зав. каф., ПНИПУ; E-mail: nat@pstu.ru

Шардаков Игорь Николаевич, дфмн, проф., зав. лаб., Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614013, Пермь, ул. Королева, д.1; E-mail: shardakov@icmm.ru