

DOI: 10.7242/1999-6691/2012.5.1.14

УДК 534.113

ОТРАЖЕНИЕ КРУТИЛЬНОЙ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ В СТЕРЖНЕ С ИСКУССТВЕННЫМ ДЕФЕКТОМ

А.Г. Хакимов

Институт механики Уфимского научного центра РАН, Уфа, Россия

Исследуется отражение и прохождение крутильной волны, распространяющейся по бесконечному стержню с искусственным поперечным дефектом. Получена зависимость отраженной и проходящей волн от параметров надреза. Решение обратной задачи позволяет определить координату повреждения стержня и параметр, содержащий глубину и длину дефекта, по характеристикам падающей и отраженной волн в месте наблюдения.

Ключевые слова: стержень, крутильная волна, прямая и обратная задачи

TORSIONAL TRAVELLING WAVE REFLECTION IN THE BAR WITH AN ARTIFICIAL DEFECT

A.G. Khakimov

Institute of Mechanics of Ufa Scientific Center RAS, Ufa, Russia

Reflection and propagation of a torsional wave in an infinite bar with an artificial transverse defect are investigated. Dependence of the reflected wave on the damage parameters is obtained. The solution of the inverse problem allows us to determine the damaged region coordinate and the parameter, including damage depth and length, based on the characteristics of falling and reflected waves at the sighting point.

Key words: rod, torsional wave, direct and inverse problems

1. Постановка задачи

В колонне бурильных труб не все участки могут быть доступны для визуального осмотра и приборного диагностирования. В настоящей работе предлагается методика диагностирования длинных стержней с помощью измерений величин параметров крутильных бегущих волн. В случае стержней конечной длины наличие в них дефектов может быть диагностировано по изменению спектра собственных изгибных, продольных или крутильных колебаний [1–11]. В [1] по известной зависимости перемещения свободного конца стержня от частоты возмущающей силы находится переменная площадь поперечного сечения стержня как функция продольной координаты. В статьях [2–3] исследуются обратные задачи теории трещин в твердых телах. Вычисление массы, скорости движения груза и положение места его удара по стержню исходя из анализа продольных смещений одного из сечений стержня выполнено в [4]. Решению обратных задач о продольных волнах в стержнях конечной длины посвящены работы [5, 6]. В [7] поставлена обратная задача для определения начальной координаты и размера поперечного надреза вала турбокомпрессора по трем собственным частотам крутильных колебаний. В [8] и ряде других работ трещина в стержне моделируется пружиной, а повреждение балки, совершающей изгибные колебания — вращательной пружиной. Обзор таких исследований имеется в [9]. В [10] предложено решение обратной задачи, позволяющее найти координату повреждения стержня и параметр, содержащий его глубину и длину, по характеристикам продольной падающей и отраженной волн в месте наблюдения.

В данной работе рассматривается установившийся процесс отражения от надреза и прохождения крутильной бегущей волны, распространяющейся по бесконечному стержню с полярным моментом инерции поперечного сечения J_p . В точке с координатой x_c стержень имеет поперечный надрез длиной l и полярный момент инерции поперечного сечения в этом месте j_p (Рис. 1) Предполагается, что поперечный размер стержня и длина надреза l значительно меньше длины волны λ . Не учитываются затухание колебаний в стержне и пространственный характер напряженно-деформированного состояния в зоне надреза. В такой постановке определяются отраженная и проходящая волны по известным параметрам надреза и его координате (прямая задача). Определение координат надреза и его размеров по отраженной волне в точке наблюдения представляет собой обратную задачу.

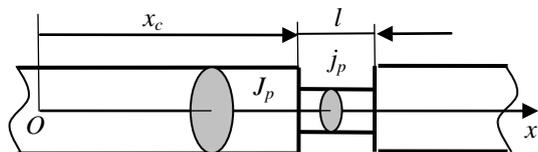


Рис. 1. Расчетная схема

Дифференциальное уравнение крутильных колебаний стержня имеет вид [11]:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x^2} - \frac{\rho}{G} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial t^2} = 0, \quad c^2 = \frac{G}{\rho}, \quad (1)$$

где $\tilde{\varphi}$ — угловое перемещение элемента стержня; c — скорость распространения волны сдвига; G, ρ — модуль сдвига и плотность материала стержня; x — продольная координата на оси, берущей начало в точке наблюдения и совпадающей с осью стержня; t — время. В решаемой задаче угловые перемещения возбуждаются источником, находящимся на расстоянии $x = -\infty$, и представляют собой в (1) бегущую волну $\tilde{\varphi} = \Phi \sin(\omega t - kx)$, где Φ, ω — амплитуда и частота крутильной волны, k — волновое число $k = \omega/c$. Вводя параметр $\lambda = 2\pi c/\omega$ и переходя к безразмерным переменным $\xi = 2\pi x/\lambda, \xi_c = 2\pi x_c/\lambda, \tau = \omega t, \varphi = \tilde{\varphi}/\Phi, \varepsilon = 2\pi l/\lambda$, падающую и отраженную волны представим в виде:
– до области надреза

$$\begin{aligned} \varphi &= \sin(\tau - \xi), \quad -\infty \leq \xi \leq \xi_c, \\ \varphi_1 &= A_1 \cos(\tau + \xi) + B_1 \sin(\tau + \xi), \quad -\infty \leq \xi \leq \xi_c; \end{aligned} \quad (2)$$

– для области надреза:

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= A_2 \cos(\tau - \xi) + B_2 \sin(\tau - \xi), \quad \xi_c \leq \xi \leq \xi_c + \varepsilon, \\ \varphi_3 &= A_3 \cos(\tau + \xi) + B_3 \sin(\tau + \xi), \quad \xi_c \leq \xi \leq \xi_c + \varepsilon. \end{aligned} \quad (3)$$

За областью надреза проходящая волна имеет вид:

$$\varphi_4 = A_4 \cos(\tau - \xi) + B_4 \sin(\tau - \xi), \quad \xi_c + \varepsilon \leq \xi \leq \infty. \quad (4)$$

На краях надреза запишем условия равенства угловых перемещений и крутящих моментов:

$$\varphi + \varphi_1 = \varphi_2 + \varphi_3, \quad m \frac{\partial(\varphi + \varphi_1)}{\partial \xi} = \frac{\partial(\varphi_2 + \varphi_3)}{\partial \xi}, \quad m = \frac{J_p}{j_p}, \quad \xi = \xi_c, \quad (5)$$

$$\varphi_2 + \varphi_3 = \varphi_4, \quad \frac{\partial(\varphi_2 + \varphi_3)}{\partial \xi} = m \frac{\partial \varphi_4}{\partial \xi}, \quad \xi = \xi_c + \varepsilon. \quad (6)$$

2. Прямая задача

Из условий (5), (6) получаем коэффициенты выражений (2)–(4):

$$\begin{aligned} gA_1 &= [2m(m^2 - 1)\cos 2\xi_c - (m^4 - 1)\operatorname{tg}\varepsilon \sin 2\xi_c] \operatorname{tg}\varepsilon, \\ gB_1 &= [(m^4 - 1)\operatorname{tg}\varepsilon \cos 2\xi_c + 2m(m^2 - 1)\sin 2\xi_c] \operatorname{tg}\varepsilon, \\ gA_2 &= -m(m^2 - 1)(m - 1)\operatorname{tg}\varepsilon, \quad gB_2 = m(m + 1)[2m + (m^2 + 1)\operatorname{tg}^2\varepsilon], \\ gA_3 &= m(m - 1)\{(m^2 + 1)\operatorname{tg}\varepsilon \cos 2\xi_c + [2m - (m^2 + 1)\operatorname{tg}^2\varepsilon] \sin 2\xi_c\}, \\ gB_3 &= m(m - 1)\{[(m^2 + 1)\operatorname{tg}^2\varepsilon - 2m] \cos 2\xi_c + (m^2 + 1)\operatorname{tg}\varepsilon \sin 2\xi_c\}, \\ gA_4 &= -2m(m - 1)^2 \operatorname{tg}\varepsilon, \quad gB_4 = 2m[2m + (m^2 + 1)\operatorname{tg}^2\varepsilon]. \end{aligned} \quad (7)$$

Отраженную от надреза (2) и проходящую через надрез (4) волны можно также представить как

$$\varphi_1 = k_1 \sin(\tau + \xi - \eta_0), \quad -\infty \leq \xi \leq \xi_c, \quad (8)$$

$$\varphi_4 = k_4 \sin(\tau - \xi - \psi), \quad \xi_c + \varepsilon \leq \xi \leq \infty, \quad (9)$$

где коэффициенты отражения k_1 и прохождения k_4 и соответствующие фазы η_0 и ψ находятся по формулам

$$k_1 = \frac{(1-m^2)\sin \varepsilon}{\sqrt{(m^2+1)^2 - (m^2-1)^2 \cos^2 \varepsilon}}, \quad k_4 = \frac{2m}{\sqrt{(m^2+1)^2 - (m^2-1)^2 \cos^2 \varepsilon}},$$

$$\operatorname{tg} \eta_0 = \frac{-2m \cos \varepsilon \cos 2\xi_c + (m^2+1)\sin \varepsilon \sin 2\xi_c}{(m^2+1)\sin \varepsilon \cos 2\xi_c + 2m \cos \varepsilon \sin 2\xi_c}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{(m-1)^2 \operatorname{tg} \varepsilon}{2m + (m^2+1)\operatorname{tg}^2 \varepsilon}.$$
(10)

Сдвиг фазы между падающей и отраженной волной η в точке с координатой ξ определяется выражением:
 $\eta = \eta_0 - 2\xi$.

Из соотношений (7)–(10) видно, что коэффициенты отражения и прохождения, а также сдвиг фазы между падающей и проходящей волной ψ зависят только от относительных параметров надреза m и ε . Сдвиг фазы между падающей и отраженной волной η зависит как от параметров m и ε , так и от положения надреза ξ_c и координаты места проведения замеров ξ . При отсутствии надреза ($m \rightarrow 1$) из (10) следует, что $k_1 \rightarrow 0$, $k_4 \rightarrow 1$.

Суммарные угловые перемещения элемента стержня Λ в точке наблюдения ($\xi=0$) состоят из перемещений, вызванных отраженной и падающей волнами:

$$\Lambda = \varphi + \varphi_1 = C \sin(\tau - \delta). \quad (11)$$

Здесь амплитуда суммарного углового перемещения C и сдвиг фазы суммарной волны δ вычисляются с помощью формул:

$$C = 2\sqrt{\left[1 + (m^4 - 1)\cos^2 \xi_c \sin^2 \varepsilon + m(m^2 - 1)\sin 2\xi_c \sin \varepsilon \cos \varepsilon + (m^2 - 1)\cos^2 \varepsilon\right] / \left[\left(m^2 + 1\right)^2 - \left(m^2 - 1\right)^2 \cos^2 \varepsilon\right]},$$

$$\operatorname{tg} \delta = N/M, \quad N = \left[(m^2 + 1)\sin \xi_c \cos \xi_c \sin \varepsilon - m \cos \varepsilon \cos 2\xi_c\right](1 - m^2)\sin \varepsilon,$$

$$M = (1 - m^4)\cos^2 \xi_c \sin^2 \varepsilon - m^2(1 + \cos^2 \varepsilon) - \sin^2 \varepsilon - m(m^2 - 1)\sin \varepsilon \cos \varepsilon \sin 2\xi_c.$$
(12)

Для малых по сравнению с единицей ε можно считать, что $\sin \varepsilon \approx \varepsilon$, $\cos \varepsilon \approx 1$, $\operatorname{tg} \varepsilon \approx \varepsilon$, и если при этом ограничить значения $m < 10$, $\varepsilon < 10^{-3}$, то соотношения (7)–(10) примут вид:

$$2mA_1 = (m^2 - 1)\varepsilon \cos 2\xi_c, \quad 2mB_1 = (m^2 - 1)\varepsilon \sin 2\xi_c, \quad 4mA_2 = -(m^2 - 1)(m - 1)\varepsilon,$$

$$2B_2 = m + 1, \quad 4mA_3 = (m - 1)\left[(m + 1)^2 \varepsilon \cos 2\xi_c + 2m \sin 2\xi_c\right],$$

$$4mB_3 = (m - 1)\left[-2m \cos 2\xi_c + (m^2 + 1)\varepsilon \sin 2\xi_c\right], \quad 2mA_4 = -(m - 1)^2 \varepsilon, \quad B_4 = 1,$$
(13)

$$k_1 = (1 - m^2)\varepsilon / (2m), \quad k_4 = 1 - (m - 1/m)^2 \varepsilon^2 / 8,$$

$$\operatorname{tg} \eta_0 = \left[-2m \cos 2\xi_c + (m^2 + 1)\varepsilon \sin 2\xi_c\right] / \left[(m^2 + 1)\varepsilon \cos 2\xi_c + 2m \sin 2\xi_c\right], \quad \operatorname{tg} \psi = (m - 1)^2 \varepsilon / (2m).$$

В точке наблюдения $\xi=0$, как следует из (8), отраженная волна описывается выражением $\varphi_1 = k_1 \sin(\tau - \eta_0)$, разность фаз между падающей и проходящей волной равняется $\psi = \operatorname{arctg}\left[(m - 1)^2 \varepsilon / (2m)\right]$, а соответствующая амплитуда суммарного перемещения и сдвиг фазы в суммарной волне преобразуются к виду: $C = \sqrt{1 + (m - 1/m)\varepsilon \sin 2\xi_c}$, $\operatorname{tg} \delta = -(m^2 - 1)\cos 2\xi_c / \left[2m + (m^2 - 1)\varepsilon \sin 2\xi_c\right]$.

На рисунке 2 приводятся зависимости углового перемещения элемента стержня в отраженной волне от τ для $\varepsilon = 0,001$. Видно, что отраженные волны зависят от параметра m , координаты надреза. Чем больше значение m , тем больше амплитуда сигнала в отраженной волне. Зависимости коэффициента отражения k_1 от ε и m даются на рисунке 3. Видна линейная связь коэффициента отражения с параметрами m и ε

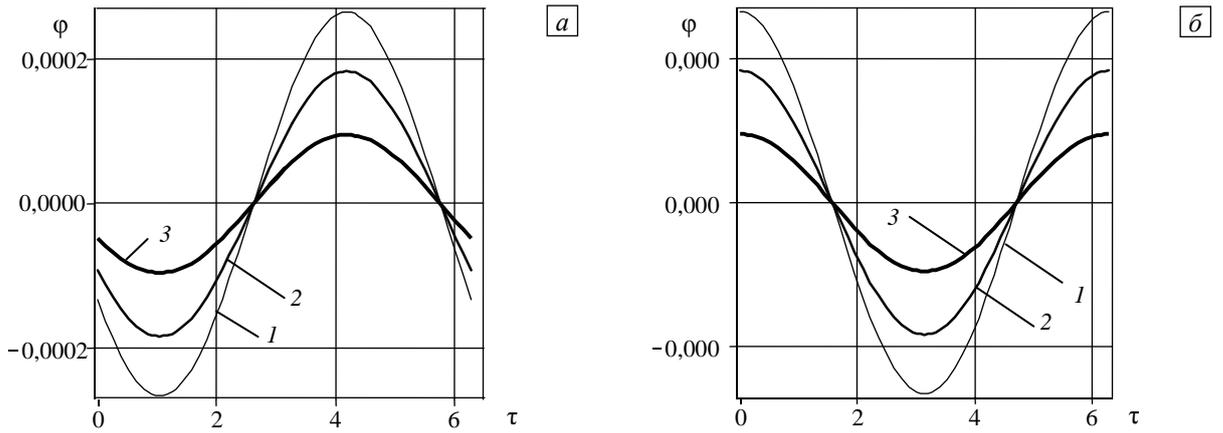


Рис. 2. Зависимости от τ углового перемещения элемента стержня в точке наблюдения $\xi=0$ в отраженной волне для двух положений надреза: $\xi_c = 2\pi/3$ (а), $\xi_c = 2\pi$ (б) при $\varepsilon = 0,001$ и различных значениях m : 1,1 (кривые 1); 1,2 (2); 1,3 (3)

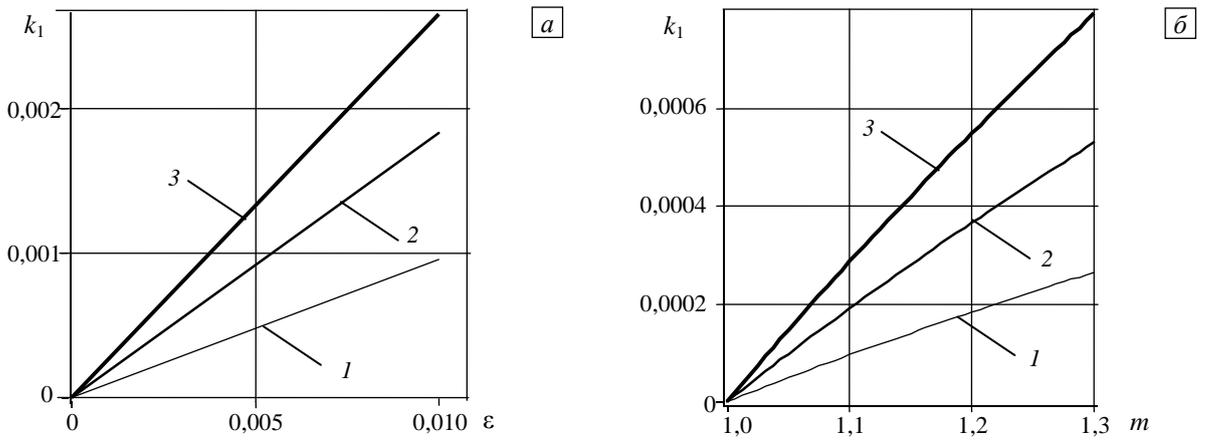


Рис. 3. Зависимости коэффициента отражения k_1 от ε (а) при различных значениях m : 1,1 (кривая 1); 1,2 (2); 1,3 (3), и от m (б) при различных значениях ε : 0,001 (кривая 1); 0,002 (2); 0,003 (3)

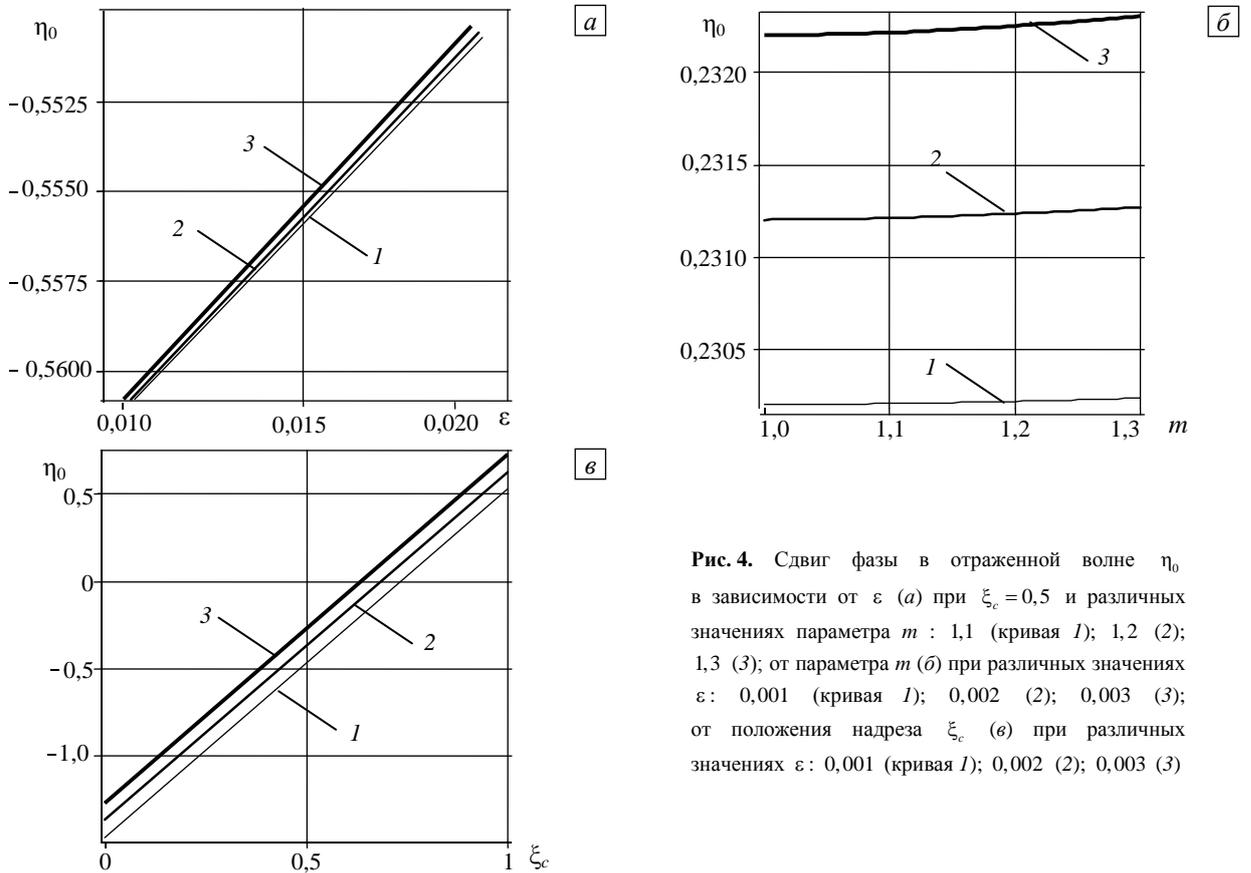


Рис. 4. Сдвиг фазы в отраженной волне η_0 в зависимости от ε (а) при $\xi_c = 0,5$ и различных значениях параметра m : 1,1 (кривая 1); 1,2 (2); 1,3 (3); от параметра m (б) при различных значениях ε : 0,001 (кривая 1); 0,002 (2); 0,003 (3); от положения надреза ξ_c (в) при различных значениях ε : 0,001 (кривая 1); 0,002 (2); 0,003 (3)

в области их малых значений, то есть в случае небольшого надреза. Причем на коэффициент отражения k_1 не влияет координата надреза ξ_c , что является следствием пренебрежения эффектами затухания в стержне. Сдвиг фазы в отраженной волне η_0 в зависимости от параметров ε , m и положения надреза ξ_c содержит рисунок 4. Анализ кривых указывает на периодическую зависимость сдвига фазы в отраженной волне. Таким образом, сдвиг фазы в отраженной волне можно использовать для определения координаты надреза или зарождающегося повреждения.

3. Обратная задача

Способы определения параметров надреза в стержне по измеряемым с помощью приборных средств характеристикам отраженной и проходящей волн подробно описываются в работе [12].

При $m = 1,5$; $\xi_c = 0,9$; $\varepsilon = 0,0001$, полученных на основе замеренных параметров надреза, вычисленные значения коэффициентов в решении прямой задачи (7) получаются равными: $A_1 = -0,000009471149704$; $B_1 = 0,00004057595872$; $A_4 = -0,000008333333254$. Следует заметить, что $A_1 = \varphi_1(0; 0)$, $B_1 = \varphi_1(\pi/2; 0)$, $A_4 = \varphi_4(2\pi; 2\pi)$. Значения остальных коэффициентов здесь не приводятся.

В случае замера характеристик отраженной и проходящей волн $A_1 = -0,000009$, $B_1 = 0,00004$, $A_4 = -0,000008$ решение обратной задачи дает значения параметров: $m = 1,484848488$, $\xi_c = 0,8960008533$, $\varepsilon = 0,0001010624996$. На рисунке 5 приводятся зависимости относительной координаты ξ_c и длины надреза ε и параметра m от A_1 при различных значениях B_1 и фиксированном $A_4 = -0,000008$. Таким образом, трех замеренных величин (A_1 , B_1 , A_4) оказывается достаточно для того, чтобы установить размер дефекта и его местоположение.

Возможно использование и других замеренных параметров падающей, отраженной от надреза и проходящей волн. Требования повышенной точности измерений с помощью приборных средств и применения регуляризации в обратной задаче являются обычными и здесь не обсуждаются.

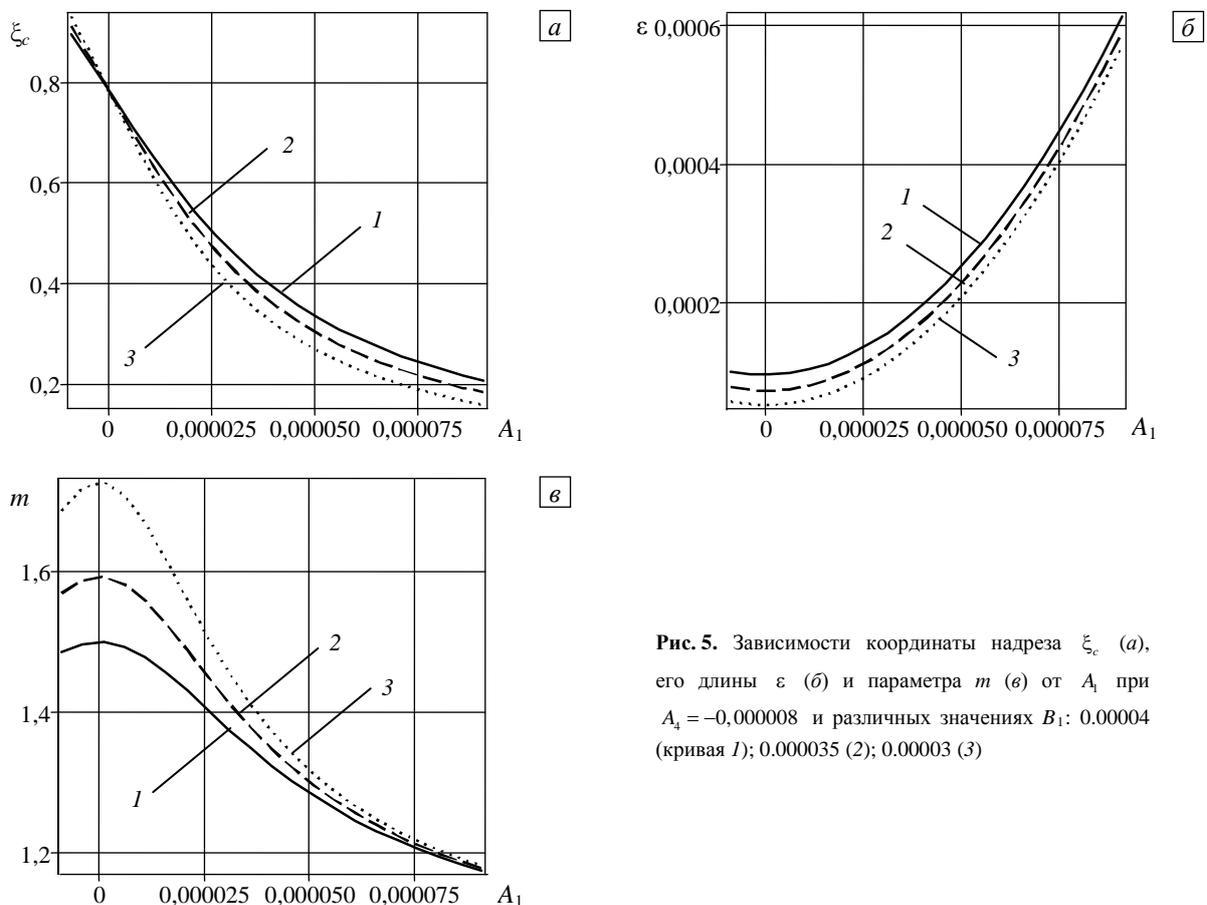


Рис. 5. Зависимости координаты надреза ξ_c (а), его длины ε (б) и параметра m (в) от A_1 при $A_4 = -0,000008$ и различных значениях B_1 : 0.00004 (кривая 1); 0.000035 (2); 0.00003 (3)

4. Частные случаи

Далее приводятся несколько вариантов повреждений стержня и соответствующие характеристики отраженной, проходящей и суммарной волн.

1. Повреждение стержня при $\xi = \xi_c$ отсутствует. Тогда: $m = 1$, $k_1 = 0$, $\eta_0 = -2\xi_c$, $k_4 = 1$, $\psi = 0$, $C = 1$, $\delta = 0$.

2. Имеется небольшое повреждение стержня ($m > 1$) или его утолщение ($m < 1$) при $\xi = \xi_c$. В этом случае:

$$m \rightarrow 1, k_1 = (m^2 - 1)\varepsilon/2m, \eta_0 = 2\xi_c - \pi/2, k_4 = 1 - (m - 1/m)^2 \varepsilon^2/8, \psi = 2\xi_c - \pi/2,$$

$$C = 1 + (m - 1/m)\varepsilon \sin 2\xi_c/2, \operatorname{tg} \delta = (m - 1/m)\varepsilon \cos 2\xi_c/2.$$

3. Обрыв стержня при $\xi = \xi_c$. Здесь $m \rightarrow \infty$, $k_1 = 1$, $\eta_0 = 2\xi_c$, $k_4 = 0$, $\psi = 0$, $C = 1$, $\delta = \xi_c$.

4. В точке $\xi = \xi_c$ на стержень надето специальное приспособление, фиксирующее его угловое перемещение. Тогда: $m = 0$, $k_1 = 1$, $\eta_0 = 2\xi_c$, $k_4 = 0$, $\psi = 0$, $C = 2 \sin \xi_c$, $\delta = \xi_c$.

Анализ отраженных и суммарных волн в стержне позволяет сделать вывод о том, что амплитуда и сдвиг фазы обуславливаются величиной и положением надреза. Изменение сдвига фазы в отраженной волне от положения надреза ξ_c имеет периодический характер. В то же время сдвиг фазы практически не зависит от длины надреза ε и параметра m .

Поскольку по сдвигу фазы в отраженной волне можно определить координату надреза или зарождающегося повреждения, полученная методика может быть применена для разработки системы диагностирования повреждений длинных стержневых систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-01-00293_a).

Литература

1. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. – М.: Физматлит, 2007. – 224 с.
2. Ватульян А.О., Соловьев А.Н. О реконструкции плоских трещин в анизотропном упругом теле // ПММ. – 2005. – № 3. – С. 552-561.
3. Ватульян А.О., Соловьев А.Н. Обратные задачи теории трещин в твердых телах // Изв. Вузов. Сев.-Кавк. Рег.: Спецвыпуск «Математика и механика сплошной среды». – 2004. – С. 74-80.
4. Ахтямов А.М. Определение массы, скорости движения груза и места его удара по стержню с помощью продольных смещений одного из сечений стержня // Контроль. Диагностика. – 2007. – № 11. – С. 59-61.
5. Ватульян А.О., Солуянов Н.О. Об определении местоположения и размера полости в упругом стержне // Дефектоскопия. – 2005. – № 9. – С. 44-56.
6. Ильгамов М.А. Диагностика повреждений вертикальной штанги // Тр. ин-та механики УНЦ РАН. – Уфа: Гилем, 2007. – Вып. 5. – С. 201-211.
7. Хакимов А.Г. О собственных колебаниях вала турбокомпрессора с искусственным дефектом // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника: Науч.-техн. журн. – 2011. – № 1. – С. 71-73.
8. Biscontin G., Morassi A., Wendel P. Asymptotic separation of spectrum in notched rods // J. Vibr. and Control. – 1998. – V. 4, N. 3. – P. 237-251.
9. Глэдвелл Г.М.Л. Обратные задачи теории колебаний. – М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. – 608 с.
10. Ильгамов М.А., Хакимов А.Г. Отражение продольной бегущей волны в стержне с повреждением // Контроль. Диагностика. – 2009. – № 7. – С. 43-48.
11. Прочность, устойчивость, колебания: Справочник в трех томах / Под общ. ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – Т. 3. – 568 с.
12. Ильгамов М.А., Хакимов А.Г. Отражение продольной волны от надреза в стержне, погруженном в вязкую жидкость // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2010. – Т. 3, № 3. – С. 58-67.

Поступила в редакцию 09.06.11; опубликована в электронном виде 11.04.12

Сведения об авторе

Хакимов Аким Гайфуллинович, кфмн, доц., внс, Институт механики Уфимского научного центра РАН (ИМех УНЦ РАН), 450054, Уфа, пр. Октября, д. 71; E-mail: hakimov@anrb.ru