

DOI: [10.7242/1999-6691/2012.5.1.11](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2012.5.1.11)
УДК 539.3

КОНСЕРВАТИВНЫЙ ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СТАТИКИ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

И.В. Киреев¹, Ю.В.Немировский²

¹Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия

²Институт теоретической и прикладной механики, Новосибирск, Россия

В работе предложен алгоритм построения полностью консервативной численной схемы решения краевых задач для линейных гамильтоновых систем с произвольным конечным порядком аппроксимации на точном решении. На базе алгоритма на языках высокого уровня разработаны программы расчета напряженно-деформированного состояния тонкой многослойной анизотропной оболочки вращения. Приведены результаты расчётов реальных оболочек из композиционных материалов.

Ключевые слова: упругость; теория оболочек; гамильтонова система

CONSERVATIVE NUMERICAL METHOD FOR SOLVING STATIC LINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF ELASTIC SHELLS OF REVOLUTION

I.V. Kireev¹ and Yu.V. Nemirovskii²

¹Institute of Computational Modeling SB RAS, Krasnoyarsk, Russia

²Khrstianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russia

In this paper, we propose an algorithm for constructing a conservative numerical scheme for solving boundary value problems for linear Hamiltonian systems with an arbitrary finite-order approximation to the exact solution. Application of the algorithm expressed in high-level languages allowed us to develop the program for calculating the stress-strain state of a thin multilayered anisotropic shell of revolution. The results of calculations of real shells made of composite materials are presented.

Key words: elasticity, theory of shells, Hamiltonian system

1. Линейные \mathbf{J} -симметричные краевые задачи для \mathbf{J} -систем обыкновенных дифференциальных уравнений и \mathbf{J} -симметричные численные методы их решения

Методы асимптотического анализа линейных \mathbf{J} -симметричных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, изложенные в работе [1], основаны на идее перехода от исходной линейной системы дифференциальных уравнений к другой, в некотором смысле более простой. В этом разделе аналогичный подход используется для построения численной схемы решения краевых задач для \mathbf{J} -систем. Для простоты выкладки ограничимся рассмотрением только вещественного случая.

Пусть на отрезке $[t_l, t_r]$ требуется найти решение линейной \mathbf{J} -системы

$$\frac{dz(t)}{dt} = \mathbf{G}(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{g}(t); \quad \mathbf{J}\mathbf{G} + \mathbf{G}^T\mathbf{J} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{z}, \quad \mathbf{g} \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

удовлетворяющее на концах отрезка краевым условиям

$$\mathbf{B}_l[\mathbf{z}(t_l) - \mathbf{z}_l] + \mathbf{B}_r[\mathbf{z}(t_r) - \mathbf{z}_r] = \mathbf{0}. \quad (2)$$

Частным случаем краевой задачи (1), (2) является задача Коши для системы (1), когда $\mathbf{B}_r = \mathbf{0}$, а $\mathbf{B}_l = \mathbf{E}_n$ — единичная матрица размерностью n .

Предполагаем, что

а) \mathbf{B}_l и \mathbf{B}_r — $n \times n$ матрицы, такие, что ранг блочной матрицы $(\mathbf{B}_l, \mathbf{B}_r)$ равен n ;

б) решение краевой задачи (1), (2) существует и единственно для любой вектор-функции $\mathbf{g}(t)$ с интегрируемым на $[t_l, t_r]$ квадратом евклидовой нормы, то есть для любой $\mathbf{g}(t) \in \mathbf{L}_2^n$. Кроме этого без ограничения общности будем считать, что краевые условия (2) однородны:

$$\mathbf{z}_l = \mathbf{z}_r = \mathbf{0}. \quad (3)$$

Тогда в силу предположения \bar{b} и известных теорем вложения [2], можно говорить об интегральном операторе $B_G : \mathbf{g}(t) \mapsto \mathbf{z}(t)$, ставящем в соответствие любой вектор-функции $\mathbf{g}(t) \in \mathbf{L}_2^n$ решение краевой задачи (1)–(3). При этом из предположения \bar{b} также следует, что оператор B_G , рассматриваемый как оператор из \mathbf{L}_2^n в \mathbf{L}_2^n , ограничен некоторой константой $C_G > 0$:

$$\|\mathbf{z}\| \leq C_G \|\mathbf{g}\|. \quad (4)$$

При этом $\|\mathbf{z}\| = \sqrt{\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle}$, $\langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle = \int_{t_l}^{t_r} (\mathbf{z}(t), \mathbf{y}(t)) dt$, где (\mathbf{z}, \mathbf{y}) — скалярное произведение векторов \mathbf{z} и \mathbf{y} из \mathbb{R}^n .

Наряду с однородной краевой задачей для \mathbf{J} -системы (1) рассмотрим однородную краевую задачу для линейной системы с \mathbf{J} -симметричной матрицей $\mathbf{F}(t)$ ($\mathbf{J}\mathbf{F}(t) + \mathbf{F}^T(t)\mathbf{J} \equiv \mathbf{0}$) и теми же матрицами $\mathbf{B}_l, \mathbf{B}_r$ краевых условий (\mathbf{T} — знак операции транспонирования). Предполагая, как и ранее, что соответствующая краевая задача однозначно разрешима, введём интегральный оператор

$$B_F : \mathbf{L}_2^n \rightarrow \mathbf{L}_2^n, \quad \|B_F\| \leq C_F, \quad (5)$$

где $\mathbf{z}(t) = B_F(\zeta)$ — образ вектор-функции $\zeta(t)$ при $t \in [t_l, t_r]$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \mathbf{F}(t)\mathbf{z}(t) + \zeta(t)$ и краевым условиям $\mathbf{B}_l\mathbf{z}(t_l) + \mathbf{B}_r\mathbf{z}(t_r) = \mathbf{0}$. Выражая отсюда производную $\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \mathbf{F}(t)B_F(\zeta) + \zeta(t)$ и подставляя её в \mathbf{J} -систему (1), приходим к интегральному уравнению

$$\zeta(t) = [\mathbf{G}(t) - \mathbf{F}(t)]B_F(\zeta) + \mathbf{g}(t), \quad \zeta(t) \in \mathbf{L}_2^n, \quad (6)$$

эквивалентному исходной дифференциальной краевой задаче (1) с краевыми условиями (2), (3).

Целью настоящей работы является построение численной схемы решения краевых задач для \mathbf{J} -системы (1), в полной мере учитывающей те основные законы сохранения, которые следуют из леммы 1 статьи авторов [1]. Конкретизация требований к вычислительной схеме приводит к следующему определению \mathbf{J} -симметричности численной схемы: численная схема решения \mathbf{J} -системы (1) называется \mathbf{J} -симметричной (\mathbf{J} -схемой), если для построенной по этой схеме аппроксимации оператора сдвига \mathbf{Z} справедливо соотношение (3) из [1] $\mathbf{Z}^{-1} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{J}$, $\det(\mathbf{Z}) = 1$ в тех узлах сетки, в которых находится решение. Смысл этого определения заключается в том, что аппроксимацию оператора сдвига \mathbf{J} -системы в силу \mathbf{J} -схемы можно интерпретировать как оператор сдвига некоторой другой \mathbf{J} -системы.

Для того чтобы построить \mathbf{J} -схему решения исходной краевой задачи с однородными краевыми условиями, применим проекционный метод. При этом целесообразно использовать не дифференциальную постановку задачи (1), а интегральную (6). Разбиваем исходный отрезок $[t_l, t_r]$ изменения независимой переменной t на N промежутков узлами $t_k : t_0 = t_l, t_1, \dots, t_{N-1}, t_N = t_r$. На каждом из отрезков $[t_{k-1}, t_k]$ ($k = 1, 2, \dots, N$) для n -мерных вектор-функций определено пространство $\mathbf{L}_{2,k}^n$ с интегрируемым по $[t_{k-1}, t_k]$ квадратом евклидовой нормы, так что \mathbf{L}_2^n есть прямая сумма $\mathbf{L}_2^n = \bigoplus_{k=1}^{k=N} \mathbf{L}_{2,k}^n$ подпространств $\mathbf{L}_{2,k}^n = \{\mathbf{1}(t) \in \mathbf{L}_2^n : \mathbf{1}(t) = \mathbf{0}, t \notin [t_{k-1}, t_k]\}$. Обозначая через \mathbf{L}_k^A конечномерное аппроксимирующее подпространство из $\mathbf{L}_{2,k}^n$, а через \mathbf{L}^A — их прямую сумму $\mathbf{L}^A = \bigoplus_{k=1}^{k=N} \mathbf{L}_k^A$, рассмотрим $L_k : \mathbf{L}_{2,k}^n \rightarrow \mathbf{L}_k^A$ — ортогональный проектор пространства $\mathbf{L}_{2,k}^n$ на соответствующее \mathbf{L}_k^A . Тогда можно говорить об ортогональном в \mathbf{L}_2^n проекторе $L : \mathbf{L}_2^n \rightarrow \mathbf{L}^A$ пространства \mathbf{L}_2^n на подпространство \mathbf{L}^A , по определению совпадающем на каждом из $\mathbf{L}_{2,k}^n$ с операторами L_k . В качестве приближения $\gamma(t) \in \mathbf{L}^A$ к решению $\zeta(t)$ операторного уравнения (6) берем решение уравнения

$$\gamma(t) = L\{[\mathbf{G}(t) - \mathbf{F}(t)][LB_F(\gamma)] + \mathbf{g}(t)\}, \quad (7)$$

где оператор \mathbf{B}_F определён выше (5).

Возникает численный метод решения интегрального уравнения (6), а стало быть, и исходной краевой задачи, отличие которого от классического подхода [2] $\boldsymbol{\gamma}(t) = \mathbf{L}\{[\mathbf{G}(t) - \mathbf{F}(t)][\mathbf{B}_F(\boldsymbol{\gamma})] + \mathbf{g}(t)\}$ заключается во введении дополнительного проектора \mathbf{L} на аппроксимирующее пространство \mathbf{L}^A так, что вместо $[\mathbf{B}_F(\boldsymbol{\gamma})]$ модифицированная схема содержит $[\mathbf{L}\cdot\mathbf{B}_F(\boldsymbol{\gamma})]$. Схема (7) обладает дополнительными свойствами симметрии, которых нет у классического проекционного метода:

Лемма 1. Численная схема (7) решения краевой задачи (2), (3) для \mathbf{J} -системы (1) является \mathbf{J} -схемой относительно узлов t_0, \dots, t_N .

Доказательство. В силу (7) функция $\mathbf{y}(t) = \mathbf{B}_F[\boldsymbol{\gamma}(t)]$, согласно (6), удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{L}\{[\mathbf{G}(t) - \mathbf{F}(t)]\mathbf{L}(\mathbf{y}) + \mathbf{g}(t)\}. \quad (8)$$

Следовательно, на отрезке $[t_{k-1}, t_k]$ оператор сдвига $\mathbf{Y}_k(t) = \frac{\partial \mathbf{y}(t)}{\partial \mathbf{y}_{k-1}}$, $\mathbf{Y}_k(t_{k-1}) = \mathbf{E}_n$, удовлетворяет

$$\text{соотношению} \quad \frac{d\mathbf{Y}_k(t)}{dt} = \mathbf{F}(t)\mathbf{Y}_k(t) + \mathbf{L}\{[\mathbf{G}(t) - \mathbf{F}(t)]\mathbf{L}(\mathbf{Y}_k)\}, \quad \text{которое} \quad \text{получается} \quad \text{из} \quad (8)$$

дифференцированием по \mathbf{y}_{k-1} . Поэтому $\mathbf{Y}_k^T(t_k)\mathbf{J}\mathbf{Y}_k(t_k) - \mathbf{J} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} [\dot{\mathbf{Y}}_k^T(t)\mathbf{J}\mathbf{Y}_k(t) + \mathbf{Y}_k^T(t)\mathbf{J}\dot{\mathbf{Y}}_k(t)] dt =$

$$= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\{ \mathbf{Y}_k^T(t) [\mathbf{F}^T(t)\mathbf{J} + \mathbf{J}\mathbf{F}(t)] \mathbf{Y}_k(t) + (\mathbf{L}\mathbf{Y}_k^T(t)) \left\{ [\mathbf{G}(t) - \mathbf{F}(t)]^T \mathbf{J} + \mathbf{J} [\mathbf{G}(t) - \mathbf{F}(t)] \right\} (\mathbf{L}\mathbf{Y}_k(t)) \right\} dt = \mathbf{0}, \quad \text{поскольку}$$

матрицы $\mathbf{G}(t)$ и $\mathbf{F}(t)$ являются \mathbf{J} -симметричными. Тем самым утверждение доказано.

Исследуем аппроксимационные свойства предложенной вычислительной схемы (7). С этой целью рассмотрим функцию невязки $\boldsymbol{\delta}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{z}(t)$, где $\mathbf{z}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$ удовлетворяют уравнениям (1) и (8) соответственно. Вычитая (1) из (8), после несложных преобразований приходим к интегро-дифференциальному соотношению

$$\frac{d\boldsymbol{\delta}(t)}{dt} = \mathbf{G}(t)\boldsymbol{\delta}(t) + \mathbf{L}\{[\mathbf{F} - \mathbf{G}]\mathbf{L}_\perp(\boldsymbol{\delta} + \mathbf{z})\} + \mathbf{L}_\perp\{[\mathbf{F} - \mathbf{G}](\boldsymbol{\delta} + \mathbf{z})\} - \mathbf{L}_\perp(\mathbf{g}), \quad (9)$$

где оператор \mathbf{L}_\perp ставит в соответствие любой вектор-функции $\mathbf{g}(t) \in \mathbf{L}_2^n$ её ортогональную составляющую относительно подпространства \mathbf{L}^A : $\mathbf{L}_\perp(\mathbf{g}) = \mathbf{g} - \mathbf{L}(\mathbf{g})$. Имеет место следующая лемма:

Лемма 2. Пусть $\boldsymbol{\delta}_k(t)$ — ограничение на k -й отрезок $[t_{k-1}, t_k]$ решения $\boldsymbol{\delta}(t)$ уравнения (9) с начальным условием $\boldsymbol{\delta}_k(t_{k-1}) = \mathbf{0}$. Тогда, если выполняется неравенство $c_k \|\mathbf{F} - \mathbf{G}\|_k \leq \sqrt{2}/2$,

где $c_k = \sqrt{n} (t_k - t_{k-1}) \exp\left[2 \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\mathbf{G}(t)\| dt\right]$, то $\|\boldsymbol{\delta}_k\|_k \leq \frac{c_k}{\sqrt{1 - 2[c_k \|\mathbf{F} - \mathbf{G}\|_k]^2}} \left[\|\mathbf{F} - \mathbf{G}\|_k \|\mathbf{L}_\perp(\mathbf{z})\|_k + \|\mathbf{L}_\perp(\boldsymbol{\zeta})\|_k \right]$;

здесь $\boldsymbol{\zeta}(t) = \dot{\mathbf{z}}(t) - \mathbf{F}(t)\mathbf{z}(t)$, а $\|\cdot\|_k$ — ограничение нормы $\|\cdot\|$ из \mathbf{L}_2^n на $\mathbf{L}_{2,k}^n$.

Доказательство. Обозначим через $\boldsymbol{\Phi}(t)$ фундаментальную систему решений системы уравнений (1) на отрезке $[t_{k-1}, t_k]$: $\boldsymbol{\Phi}(t_{k-1}) = \mathbf{E}_n$. Тогда, применяя метод неопределённых коэффициентов к уравнению (9), можно показать, что для вектор-функции $\boldsymbol{\delta}_k(t)$ справедливо интегральное уравнение

$$\boldsymbol{\delta}_k(t) = \boldsymbol{\Phi}(t) \int_{t_{k-1}}^t (\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\tau) \mathbf{L}\{[\mathbf{F}(\tau) - \mathbf{G}(\tau)]\mathbf{L}_\perp(\boldsymbol{\delta}_k + \mathbf{z})\} + \mathbf{L}_\perp\{[\mathbf{F}(\tau) - \mathbf{G}(\tau)](\boldsymbol{\delta}_k + \mathbf{z})\} - \mathbf{L}_\perp(\mathbf{g})) d\tau. \quad (10)$$

Из определения фундаментальной матрицы $\boldsymbol{\Phi}(t)$ следует, что при $t \in [t_{k-1}, t_k]$ для любого вектора

$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ выполняются неравенства: $\|\Phi(t)\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{v}\| \exp\left[\int_{t_{k-1}}^t \|\mathbf{G}(\tau)\| d\tau\right]$; $\|\Phi(t)^{-1}\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{v}\| \exp\left[\int_{t_{k-1}}^t \|\mathbf{G}(\tau)\| d\tau\right]$.

Поэтому, если $\delta_k(t) = \Phi(t) \int_{t_{k-1}}^t \Phi^{-1}(\tau) \Delta_k(\tau) d\tau$, то, используя неравенство Коши–Буняковского [2] и интегрируя

$$\begin{aligned} \text{по частям, получаем: } \|\delta_k(t)\|_k^2 &= \int_{t_{k-1}}^t \left\| \Phi(t) \int_{t_{k-1}}^t \Phi^{-1}(\tau) \Delta_k(\tau) d\tau \right\|_k^2 dt \leq \int_{t_{k-1}}^t \exp\left[2 \int_{t_{k-1}}^t \|\mathbf{G}(\tau)\| d\tau\right] \times \left\| \int_{t_{k-1}}^t \Phi^{-1}(\tau) \Delta_k(\tau) d\tau \right\|_k^2 dt \leq \\ &\leq n \int_{t_{k-1}}^t \exp\left(2 \int_{t_{k-1}}^t \|\mathbf{G}(\tau)\| d\tau\right) \int_{t_{k-1}}^t \exp\left(2 \int_{t_{k-1}}^{\tau} \|\mathbf{G}(\nu)\| d\nu\right) d\tau dt \int_{t_{k-1}}^t \|\Delta_k\|_k^2 dt = \frac{n}{2} \|\Delta_k(t)\|_k^2 \left[\int_{t_{k-1}}^t \exp\left(2 \int_{t_{k-1}}^t \|\mathbf{G}(\tau)\| d\tau\right) dt \right]^2 \leq \\ &\leq \frac{n(t_k - t_{k-1})^2}{2} \|\Delta_k(t)\|_k^2 \exp\left(4 \int_{t_{k-1}}^t \|\mathbf{G}(t)\| dt\right) dt = \frac{1}{2} [c_k \|\Delta_k(t)\|_k]^2. \end{aligned}$$

Из интегрального уравнения (10) следует, что $\|\Delta_k(t)\|_k^2 = \|\mathbf{L}\{[\mathbf{F}-\mathbf{G}]\mathbf{L}_\perp(\delta_k + \mathbf{z})\}\|_k^2 + \|\mathbf{L}_\perp\{[\mathbf{F}-\mathbf{G}]\delta_k + \zeta\}\|_k^2 \leq 2\|\mathbf{L}\{[\mathbf{F}-\mathbf{G}]\mathbf{L}_\perp(\delta_k)\}\|_k^2 + 2\|\mathbf{L}\{[\mathbf{F}-\mathbf{G}]\mathbf{L}_\perp(\mathbf{z})\}\|_k^2 + 2\|\mathbf{L}_\perp\{[\mathbf{F}-\mathbf{G}](\delta_k)\}\|_k^2 + 2\|\mathbf{L}_\perp(\zeta)\|_k^2 \leq 4\|\mathbf{F}-\mathbf{G}\|_k^2 \|\delta_k\|_k^2 + 2[\|\mathbf{F}-\mathbf{G}\|_k \|\mathbf{L}_\perp(\mathbf{z})\|_k + \|\mathbf{L}_\perp(\zeta)\|_k]^2$. Подставляя последнюю оценку нормы вектор-функции $\Delta_k(t)$ в неравенство, связывающее между собой $\|\delta_k(t)\|$ и $\|\Delta_k(t)\|$, и разрешая его относительно $\|\delta_k(t)\|$, находим требуемую оценку. Лемма доказана.

Однако интегральная оценка невязки $\delta_k(t)$ на k -м отрезке $[t_{k-1}, t_k]$ не так важна с практической точки зрения. Более содержательной является оценка евклидовой нормы невязки в узлах сетки. Верхнюю асимптотическую оценку евклидовой нормы узловых значений невязки даёт следующее утверждение:

Лемма 3. Пусть каждое из аппроксимирующих пространств \mathbf{L}_k^A содержит постоянную на $[t_{k-1}, t_k]$ функцию, и для гладких функций $\mathbf{v}(t)$ имеет место асимптотическая при $(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0$ оценка $\max_{t \in [t_{k-1}, t_k]} \|\mathbf{L}_\perp[\mathbf{v}(t)]\| \leq c_{kv} (t_k - t_{k-1})^{m_k}$. Тогда для функций $\mathbf{G}(t)$, $\mathbf{F}(t)$ и $\mathbf{g}(t)$, дифференцируемых достаточно число раз, асимптотически при $(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0$ выполняется неравенство $\|\delta_k(t_k)\| \leq c_{k\delta} (t_k - t_{k-1})^{2m_k + 1}$.

Доказательство. Поскольку $1 \in \mathbf{L}_k^A$, то, интегрируя по t от t_{k-1} до t_k обе части уравнения (9), получаем

$$\delta_k(t_k) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\mathbf{G}(t)\delta_k(t) + \{\mathbf{L}_\perp[\mathbf{F}(t) - \mathbf{G}(t)]\} \{\mathbf{L}_\perp[\delta_k(t) + \mathbf{z}(t)]\}) dt, \text{ где } \delta_k(t) \text{ определено в лемме 2. Введём}$$

в рассмотрение матричную функцию $\Psi(t) = \Phi(t_k)\Phi^{-1}(t) - \mathbf{E}_n$, где матрица $\Phi(t)$ есть фундаментальная система решений системы уравнений (1) (см. доказательство леммы 2). Тогда $\Psi(t_k) = \mathbf{0}$, и после

интегрирования по частям интеграла $\int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{G}(t)\delta_k(t) dt$, в котором функция $\delta_k(t)$ заменена её интегральным представлением из (10), приходим к следующему выражению для евклидовой нормы невязки в точке t_k : $\|\delta_k(t_k)\| = \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\{\mathbf{L}_\perp(\Psi)[\mathbf{F}-\mathbf{G}] + \mathbf{L}_\perp(\mathbf{F}-\mathbf{G}) + \mathbf{L}_\perp[\mathbf{L}(\Psi)(\mathbf{F}-\mathbf{G})]\} \delta_k(t) + \mathbf{L}_\perp(\mathbf{F}-\mathbf{G})\mathbf{L}_\perp[\mathbf{z}(t)]) dt \right\|$.

Теперь, применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем довольно грубую оценку: $\|\delta_k(t_k)\| \leq \left\{ \|\mathbf{L}_\perp(\Psi)\|_k \|\mathbf{F}-\mathbf{G}\|_k + \|\mathbf{L}_\perp[\mathbf{L}(\Psi)(\mathbf{F}-\mathbf{G})]\|_k + \|\mathbf{L}_\perp(\mathbf{F}-\mathbf{G})\|_k \right\} \|\delta_k\|_k + \|\mathbf{L}_\perp(\Psi)\|_k \left\{ \|\mathbf{L}_\perp[(\mathbf{F}-\mathbf{G})\mathbf{z}]\|_k + \|\mathbf{L}_\perp(\zeta)\|_k \right\}$.

Поскольку, по предположению, для любой достаточно гладкой функции $\mathbf{v}(t)$ имеет место асимптотическая при $(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0$ оценка $\|\mathbf{L}_\perp\{\mathbf{v}(t)\}\|_k^2 \leq c_{kv} (t_k - t_{k-1})^{2m_k + 1}$, то в силу леммы 2 для достаточно гладких матриц $\Psi(t)$, $\mathbf{G}(t)$, $\mathbf{F}(t)$ и вектор-функции $\mathbf{g}(t)$ норма невязки $\|\delta_k(t_k)\|$ будет ограничена сверху величиной порядка $(t_k - t_{k-1})^{2m_k + 1}$. Лемма доказана.

Таким образом, численная схема (7) решения краевой задачи для \mathbf{J} -системы (1)–(3), помимо консервативности, обладает и хорошими аппроксимационными свойствами. Однако при численной

реализации предложенной методики решения краевых задач для построения ортогональной в \mathbf{L}_2^n проекции на аппроксимирующее пространство \mathbf{L}^A необходимо находить интегралы. Один из возможных способов приближённого вычисления интегралов связан с использованием квадратурных формул [3]. При этом, естественно, возникает сомнение: остаётся ли модифицированная схема (7), в которой для вычисления проекции $\mathbf{L}[\mathbf{v}(t)]$ используются квадратурные приближения интегралов, по-прежнему \mathbf{J} -схемой. Однако нетрудно видеть, что если для любых $\mathbf{a}(t)$ и $\mathbf{b}(t)$ из \mathbf{L}^A используемые квадратурные формулы точны при

вычислении интегралов вида $\int_{t_{k-1}}^{t_k} (\mathbf{a}, \mathbf{V}_F \mathbf{b}) dt$, где оператор \mathbf{V}_F введён выше соотношением (5),

то модифицированная схема будет \mathbf{J} -схемой.

Другой вопрос, с которым приходится сталкиваться при численной реализации предложенной схемы решения краевых задач, связан с выбором численного метода решения возникающей системы линейных алгебраических уравнений. Анализ системы (7) показывает, что непосредственное вычисление и хранение ненулевых элементов матрицы системы сопряжено со значительными затратами ресурсов компьютера, поскольку сама матрица является сильно заполненной. Однако, при незначительных затратах памяти компьютера, легко организовать быстродействующую процедуру умножения матрицы этой системы на вектор, исходя только из операторного представления системы линейных алгебраических уравнений (7). Поэтому для численного решения системы целесообразно использовать итерационные методы. В этой связи полезной оказывается следующая лемма:

Лемма 4. Пусть система (1) \mathbf{J} -симметрична, причём \mathbf{J} -невырождена, и матрицы \mathbf{V}_l и \mathbf{V}_r из краевых условий (2), (3) удовлетворяют ограничению

$$\mathbf{V}_l \mathbf{J}^{-1} \mathbf{V}_l^T = \mathbf{V}_r \mathbf{J}^{-1} \mathbf{V}_r^T. \quad (11)$$

Тогда оператор \mathbf{V}_G , порождённый линейной краевой задачей (1)-(3), является \mathbf{J} -симметричным в метрике пространства \mathbf{L}_2^n .

Доказательство. Рассмотрим для произвольных $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in \mathbf{L}_2^n$ скалярное в \mathbf{L}_2^n произведение: $\langle (\mathbf{J}\mathbf{V}_G + \mathbf{V}_G^T \mathbf{J}) \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \rangle = \langle \mathbf{J}\mathbf{z}_1, \mathbf{g}_2 \rangle + \langle \mathbf{J}\mathbf{g}_1, \mathbf{V}_G \mathbf{g}_2 \rangle = \langle \mathbf{J}\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle + \langle \mathbf{J}\mathbf{z}_1, \dot{\mathbf{z}}_2 \rangle - \langle (\mathbf{J}\mathbf{G} + \mathbf{G}^T \mathbf{J}) \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle$; здесь \mathbf{V}_G^T — оператор, сопряженный с \mathbf{V}_G в метрике пространства \mathbf{L}_2^n , а \mathbf{z}_j — решение краевой задачи для системы (1), правая часть которой содержит не $\mathbf{f}(t)$, а $\mathbf{f}_j(t)$ ($j=1,2$). В силу \mathbf{J} -симметричности системы (1), последнее слагаемое в приведенных соотношениях обращается в нуль. Первые же слагаемые, по определению скалярного произведения в \mathbf{L}_2^n , в сумме дают

$$(\mathbf{J}\mathbf{z}_1(t_r), \mathbf{z}_2(t_r)) - (\mathbf{J}\mathbf{z}_1(t_l), \mathbf{z}_2(t_l)). \quad (12)$$

Поскольку $\mathbf{z}_1(t)$ — решение краевой задачи, то оно удовлетворяет краевым условиям (2), (3) и, в силу условия леммы, найдется вектор \mathbf{b} из \mathbf{R}^n такой, что будут выполняться соотношения: $\mathbf{z}_1(t_r) = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{V}_r^T \mathbf{b}$; $\mathbf{z}_1(t_l) = -\mathbf{J}^{-1} \mathbf{V}_l^T \mathbf{b}$. Но вектор-функция $\mathbf{z}_2(t)$ удовлетворяет однородным краевым условиям (2), (3). Поэтому, подставляя последние выражения в (12), получим нуль. Это и доказывает лемму.

Сформулируем итоговое для раздела 1 утверждение в виде следующей теоремы [4]:

Теорема 1. Вычислительная схема (7) решения краевой задачи для \mathbf{J} -системы (1)-(3) является \mathbf{J} -схемой относительно узлов t_0, \dots, t_N . Если же каждое из аппроксимирующих пространств \mathbf{L}_k^A содержит постоянные на отрезке $[t_{k-1}, t_k]$ функции, а любая достаточно гладкая функция может быть приближена на k -м отрезке в норме пространства непрерывных функций \mathbf{C} элементами пространства \mathbf{L}_k^A с асимптотическим при $(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0$ порядком m_k , то погрешность аппроксимации схемы (7) на точном решении в k -м узле t_k имеет асимптотический порядок $2m_k + 1$. Вычислительная схема (7) порождает систему линейных алгебраических уравнений, матрица которой может быть представлена в виде $\mathbf{A} = \mathbf{E} + \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2$, где \mathbf{E} — единичная матрица, а $\mathbf{J}\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1^T \mathbf{J} = 0$ и $\mathbf{J}\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2^T \mathbf{J} = 0$, если только выполнено ограничение (11) для матриц \mathbf{V}_l и \mathbf{V}_r из краевых условий (2).

2. Полностью консервативный численный метод решения линейных краевых задач для гамильтоновых систем

Рассмотренная в предыдущем разделе вычислительная схема (7) сохраняет в каждом из узлов t_1, \dots, t_N разбиения отрезка $[t_l, t_r]$ значения квадратичной формы $(\mathbf{z}_1(t), \mathbf{J}\mathbf{z}_2(t))$ для любых двух приближённых решений $\mathbf{z}_1(t)$ и $\mathbf{z}_2(t)$ краевой задачи для однородной системы (1) ($\mathbf{g}(t) \equiv \mathbf{0}$) с однородными краевыми условиями (2) ($\mathbf{z}_l = \mathbf{z}_r = \mathbf{0}$). При этом, как следует из доказательства леммы 1, вычислительная схема (7) будет консервативной и для любой другой квадратичной формы, значения которой сохраняются на решениях однородной системы (1). Подобные схемы естественно называть полностью консервативными. Консервативные схемы, как известно, играют особую роль при численном моделировании механических процессов [5]. Как было показано в [6], поведение оболочки вращения при деформировании описывается гамильтоновой системой обыкновенных дифференциальных уравнений с дополнительной симметрией, то есть \mathbf{J}_n -системой, определенной в [6].

Анализ полностью консервативной схемы (7), проведённый в первом разделе для общего случая, может быть существенно дополнен для гамильтоновых систем обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающих в теории оболочек вращения. Это связано с тем, что, как показано в [6], симметричные блоки с индексами 12 и 21 матрицы системы неотрицательно определены. Кроме этого, анализ реализуемых практически краевых условий в задачах теории оболочек вращения показывает, что на каждом из торцов оболочки задается, как правило, либо обобщенное усилие, либо отвечающее ему обобщённое смещение. Таковы, например, естественные краевые условия. Эти соображения приводят к следующему классу линейных гамильтоновых систем и краевых условий [7]:

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \mathbf{H}(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{h}(t); \quad \mathbf{z}, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \mathbf{J}_n \mathbf{H} + \mathbf{H}^T \mathbf{J}_n = \mathbf{0}; \quad (\mathbf{r}, \mathbf{I}_n \mathbf{H} \mathbf{r}) \geq \frac{\lambda_H}{2} (\mathbf{r}, \mathbf{r}), \quad \lambda_H > 0, \quad \forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}^{2n}. \quad (13)$$

$$\mathbf{B}_l \mathbf{z}(t_l) + \mathbf{B}_r \mathbf{z}(t_r) = \mathbf{0}, \quad \text{rang}(\mathbf{B}_l \mathbf{B}_r) = 2n; \quad \mathbf{B}_r (\mathbf{J}_n - \mathbf{I}_n) \mathbf{B}_r^T = \mathbf{B}_l (\mathbf{J}_n - \mathbf{I}_n) \mathbf{B}_l^T. \quad (14)$$

Здесь \mathbf{I}_n и \mathbf{J}_n — блочные матрицы порядка $2n$, составленные из нулевой $\mathbf{0}$ и единичной \mathbf{E}_n матриц:

$\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E}_n \\ \mathbf{E}_n & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, $\mathbf{J}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{E}_n \\ \mathbf{E}_n & \mathbf{0} \end{pmatrix}$. Для гамильтоновых систем будем рассматривать линейные краевые задачи только такого типа, поскольку методы получения априорных оценок в более сложных для исследования случаях нелинейных или несильно выпуклых краевых задач хотя и более громоздки, но аналогичны приводимым ниже и подробно изложены в работе [7].

Для краевой задачи (13), (14) имеет место следующая теорема, обобщающая для линейных гамильтоновых систем аналогичное утверждение из работы [8]:

Теорема 2. Пусть матричная функция $\mathbf{H}(t)$ из (13) кусочно непрерывна и ограничена, а вектор-функция $\mathbf{h}(t) \in \mathbf{L}_2^{2n}$. Тогда решение $\mathbf{z}(t)$ краевой задачи (13), (14) существует и единственно, а линейный интегральный оператор \mathbf{V}_H , ставящий в соответствие вектор-функции $\mathbf{h}(t)$ решение $\mathbf{z}(t)$ рассматриваемой краевой задачи, является \mathbf{J}_n -симметричным и ограничен в норме пространства \mathbf{L}_2^{2n} : $\|\mathbf{V}_H\| \leq \lambda_H^{-1}$.

Доказательство. Вначале докажем \mathbf{J}_n -симметричность оператора \mathbf{V}_H . С этой целью транспонируем обе части равенства, которому удовлетворяет матрица краевых условий $\mathbf{V} = (\mathbf{B}_l \mathbf{B}_r)$ из (14), и вычитаем его почленно из исходного соотношения. Тогда приходим к равенству, аналогичному (11), из которого, в силу леммы 4, следует утверждение о \mathbf{J}_n -симметричности оператора \mathbf{V}_H .

Теперь докажем ограниченность оператора \mathbf{V}_H . Для этого покажем, что для любой вектор-функции $\mathbf{z}(t)$, удовлетворяющей краевым условиям (14), имеет место равенство:

$$(\mathbf{z}(t_r), \mathbf{I}_n \mathbf{z}(t_r)) - (\mathbf{z}(t_l), \mathbf{I}_n \mathbf{z}(t_l)) = 0. \quad (15)$$

В силу условия теоремы ранг блочной матрицы краевых условий $(\mathbf{B}_l \mathbf{B}_r)$ равен $2n$. Поэтому размерность пространства решений линейной однородной системы уравнений $\mathbf{B}_l \mathbf{z}(t_l) + \mathbf{B}_r \mathbf{z}(t_r) = \mathbf{0}$ относительно неизвестных $\mathbf{z}(t_l), \mathbf{z}(t_r) \in \mathbb{R}^{2n}$ также равняется $2n$, и общее решение этой системы может быть

представлено в виде $\mathbf{z}(t_l) = \mathbf{J}_n \mathbf{B}_r^T \mathbf{b}$, $\mathbf{z}(t_r) = -\mathbf{J}_n \mathbf{B}_l^T \mathbf{b}$, где \mathbf{b} — некоторый вектор из \mathbb{R}^{2n} . Поскольку левая часть соотношения (15) равна $(\mathbf{z}(t_r), [\mathbf{I}_n + \mathbf{J}_n] \mathbf{z}(t_r)) - (\mathbf{z}(t_l), [\mathbf{I}_n + \mathbf{J}_n] \mathbf{z}(t_l))$, то после подстановки сюда общего решения краевой системы линейных алгебраических уравнений, выраженного через вектор \mathbf{b} , получаем $(\mathbf{J}_n^T \mathbf{B}_l \mathbf{b}, (\mathbf{I}_n + \mathbf{J}_n) \mathbf{J}_n^T \mathbf{B}_l \mathbf{b}) - (\mathbf{J}_n \mathbf{B}_r^T \mathbf{b}, (\mathbf{I}_n + \mathbf{J}_n) \mathbf{J}_n \mathbf{B}_r^T \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{B}_l \mathbf{J}_n^T (\mathbf{I}_n + \mathbf{J}_n) \mathbf{J}_n \mathbf{B}_l^T \mathbf{b}) - (\mathbf{b}, \mathbf{B}_r \mathbf{J}_n^T (\mathbf{I}_n + \mathbf{J}_n) \mathbf{J}_n \mathbf{B}_r^T \mathbf{b}) =$
 $= (\mathbf{b}, [\mathbf{B}_l \mathbf{J}_n^T (\mathbf{I}_n + \mathbf{J}_n) \mathbf{J}_n \mathbf{B}_l^T - \mathbf{B}_r \mathbf{J}_n^T (\mathbf{I}_n + \mathbf{J}_n) \mathbf{J}_n \mathbf{B}_r^T] \mathbf{b}) = \mathbf{0}$, в силу ограничений теоремы на матрицу краевых условий, так как $\mathbf{J}_n^T (\mathbf{J}_n + \mathbf{I}_n) \mathbf{J}_n = \mathbf{J}_n - \mathbf{I}_n$.

Теперь умножаем скалярно обе части системы дифференциальных уравнений (13) на вектор $\mathbf{I}_n \mathbf{z}(t)$ и интегрируем по t от t_l до t_r . Учитывая только что доказанное равенство (15), получаем

$$\int_{t_l}^{t_r} (\mathbf{H} \mathbf{z} + \mathbf{h}, \mathbf{I}_n \mathbf{z}) dt = \mathbf{0}. \quad \text{Но по условию теоремы должно выполняться неравенство}$$

$$(\mathbf{H}(t) \mathbf{z}(t), \mathbf{I}_n \mathbf{z}(t)) \geq \lambda_H (\mathbf{z}(t), \mathbf{z}(t)). \quad \text{Следовательно,} \quad \int_{t_l}^{t_r} (\mathbf{z}(t), \mathbf{z}(t)) dt \leq \frac{1}{\lambda_H} \int_{t_l}^{t_r} (-\mathbf{h}(t), \mathbf{z}(t)) dt, \quad \text{или в}$$

обозначениях (4) для нормы и скалярного произведения в пространстве: \mathbf{L}_2^{2n} , $\|\mathbf{z}(t)\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_H} \langle -\mathbf{h}(t), \mathbf{z}(t) \rangle$.

Применяя к правой части этого соотношения неравенство Коши-Буняковского, получаем

$$\|\mathbf{z}\| \leq \|\mathbf{h}\| / \lambda_H. \quad (16)$$

Отсюда следует единственность решения $\mathbf{z}(t)$ краевой задачи (13), (14), что для линейных краевых задач означает также и его существование. Неравенство (16) даёт и требуемую оценку нормы оператора \mathbf{B}_H . Теорема доказана.

Следует отметить, что величина $(\mathbf{y}, \mathbf{I}_n \mathbf{y})$ имеет прозрачный механический смысл: если $\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{pmatrix}$, где $\mathbf{v}(t)$ — обобщённое смещение, а $\mathbf{q}(t)$ — отвечающее ему обобщённое усилие, то число $1/2(\mathbf{y}(t), \mathbf{I}_n \mathbf{y}(t)) = (\mathbf{v}(t), \mathbf{q}(t))$ есть работа силы $\mathbf{q}(t)$ на смещении $\mathbf{v}(t)$ в сечении t оболочки вращения, а $(\mathbf{y}(t_r), \mathbf{I}_n \mathbf{y}(t_r)) - (\mathbf{y}(t_l), \mathbf{I}_n \mathbf{y}(t_l))$ является суммарной работой торцевых усилий, действующих на оболочку. Поэтому ограничение на матрицу $\mathbf{H}(t)$ в условии теоремы эквивалентно тому, что суммарная работа, совершаемая только торцевыми обобщёнными усилиями на обобщённых смещениях, всегда положительна.

Как и в разделе 1, перейдём от дифференциальной постановки краевой задачи к интегральной. Для этого определяем интегральный оператор $\mathbf{B}_F : \mathbf{L}_2^{2n} \rightarrow \mathbf{L}_2^{2n}$ следующим образом: если $\mathbf{y}(t) = \mathbf{B}_F \{\boldsymbol{\gamma}(t)\}$, то

$$\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{y}(t) + \boldsymbol{\gamma}(t); \quad \mathbf{B}_l \cdot \mathbf{y}(t_l) + \mathbf{B}_r \cdot \mathbf{y}(t_r) = \mathbf{0}. \quad (17)$$

Здесь \mathbf{F} — постоянная \mathbf{J}_n -матрица, удовлетворяющая условию, что для $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2n}$ справедливо неравенство $(\mathbf{y}, \mathbf{I}_n \mathbf{F} \mathbf{y}) \geq \frac{\lambda_F}{2} (\mathbf{y}, \mathbf{y})$, где $\lambda_F > 0$; считается, что для блочной матрицы краевых условий $(\mathbf{B}_l, \mathbf{B}_r)$ выполняются ограничения (14). Тогда краевая задача (13), (14) эквивалентна интегральному уравнению

$$\boldsymbol{\zeta}(t) - [\mathbf{H}(t) - \mathbf{F}] \mathbf{B}_F [\boldsymbol{\zeta}(t)] = \mathbf{h}(t), \quad \boldsymbol{\zeta}(t) \in \mathbf{L}_2^{2n}, \quad (18)$$

поскольку $\mathbf{z}(t) = \mathbf{B}_F \{\boldsymbol{\zeta}(t)\}$. Как и раньше, это интегральное уравнение будем решать модифицированным проекционным методом

$$\boldsymbol{\gamma}(t) - \mathbf{L} \{[\mathbf{H}(t) - \mathbf{F}] (\mathbf{L} \cdot \mathbf{B}_F) [\boldsymbol{\gamma}(t)]\} = \mathbf{L} [\mathbf{h}(t)], \quad (19)$$

и его решение $\gamma(t) \in \mathbf{L}^A$ является приближением к решению $\zeta(t)$ уравнения (18); здесь по-прежнему \mathbf{L} — ортогональный в \mathbf{L}_2^{2n} проектор пространства \mathbf{L}_2^{2n} на конечномерное аппроксимирующее подпространство \mathbf{L}^A . Следующее утверждение является тривиальным следствием из теоремы 2:

Следствие 1. Обозначим через \mathbf{A}_ζ и \mathbf{A}_γ операторы, стоящие в левых частях уравнений (18) и (19).

Тогда операторы \mathbf{A}_ζ и \mathbf{A}_γ обратимы и имеют место неравенства, $(1 + \lambda_H^{-1} \|\mathbf{H} - \mathbf{F}\|)^{-1} \leq \|\mathbf{A}_\zeta\| \leq 1 + \frac{1}{\lambda_F} \|\mathbf{H} - \mathbf{F}\|$,

$\left(1 + \frac{\lambda_F + \lambda_H}{\lambda_F \lambda_H} \|\mathbf{H} - \mathbf{F}\|\right)^{-1} \leq \|\mathbf{A}_\gamma\| \leq 1 + \frac{1}{\lambda_F} \|\mathbf{H} - \mathbf{F}\|$ в нормах пространств \mathbf{L}_2^{2n} и \mathbf{L}^A соответственно.

Это утверждение является важным для численной реализации предложенного метода, поскольку оно эквивалентно тому, что число обусловленности матрицы \mathbf{A}_γ ограничено сверху величиной, не зависящей от размерности пространства \mathbf{L}^A .

Получим оценку невязки приближённого решения $\mathbf{y}(t)$ по отношению к точному $\mathbf{z}(t)$ в узлах t_0, \dots, t_N . Для этого, как и раньше, вводим в рассмотрение вектор-функцию

$$\delta(t) = \mathbf{z}(t) - \mathbf{y}(t). \quad (20)$$

Поскольку $\mathbf{z}(t)$ удовлетворяет (13), (14), а $\mathbf{y}(t) = \mathbf{B}_F \{\gamma(t)\}$, где $\gamma(t)$ — решение интегральной задачи (19), то $\delta(t)$ должно удовлетворять интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{d\delta(t)}{dt} = \mathbf{H}(t)\delta(t) + \mathbf{L}_\perp \{[\mathbf{F} - \mathbf{H}]\delta(t)\} + \mathbf{L} \{[\mathbf{F} - \mathbf{H}]\mathbf{L}_\perp \{\delta(t)\}\} - \mathbf{L} \{[\mathbf{F} - \mathbf{H}]\mathbf{L}_\perp \{\mathbf{z}(t)\}\} + \mathbf{L}_\perp \{\zeta(t)\}, \quad (21)$$

аналогичному (9). Умножаем скалярно обе части этого равенства на $\mathbf{I}_n \delta(t)$ и интегрируем на отрезке $[t_l, t_r]$. Применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем интегральную оценку

$$\|\delta(t)\|^2 \leq \frac{\lambda_F + \lambda_H}{\lambda_F \lambda_H} \left(\|\mathbf{H}\mathbf{L}_\perp \{\mathbf{z}\}\|^2 + \|\mathbf{L}_\perp \{\zeta\}\|^2 \right). \quad (22)$$

Будем предполагать, что выполнены условия леммы 3 относительно аппроксимирующего пространства \mathbf{L}^A . Тогда, если соответствующие величины c_{kz} , $c_{k\zeta}$ и $\|\mathbf{H}(t)\|$ ограничены сверху, неравенство (22) эквивалентно неравенству:

$$\|\delta(t)\| \leq c_\delta \sqrt{(t_r - t_l) \cdot \Delta_A}, \quad (23)$$

где Δ_A — аналог диаметра разбиения отрезка $[t_l, t_r]$ узлами t_0, \dots, t_N [9]

$$\Delta_A = \max_{k=1,2,\dots,N} (t_k - t_{k-1})^{2m_k}, \quad (24)$$

а константа c_δ не зависит от Δ_A . Обозначим через $\Phi_H(t)$ фундаментальную систему решений однородной гамильтоновой системы (13): $\frac{d\Phi_H(t)}{dt} = \mathbf{H}(t)\Phi_H(t)$, $\Phi_H(t_l) = \mathbf{E}_{2n}$. В системе (21) перейдём к новой неизвестной вектор-функции $\Delta(t)$ в соответствии с формулой: $\delta(t) = \Phi_H(t)\Delta(t)$. Тогда

$$\frac{d\Delta(t)}{dt} = \Phi_H^{-1}(t) \left[\mathbf{L}_\perp \{[\mathbf{F} - \mathbf{H}]\delta(t)\} + \mathbf{L} \{[\mathbf{F} - \mathbf{H}]\mathbf{L}_\perp \{\delta(t)\}\} - \mathbf{L} \{[\mathbf{F} - \mathbf{H}]\mathbf{L}_\perp \{\mathbf{z}\}\} + \mathbf{L}_\perp \{\zeta\} \right]. \quad (25)$$

Интегрируем это уравнение по t от t_l до t_r . Учитывая свойства ортогонального в \mathbf{L}_2^{2n} проектора \mathbf{L}_\perp , определённого в (9), получаем: $\Delta(t_r) - \Delta(t_l) = \int_{t_l}^{t_r} \left[\mathbf{L}_\perp(\Phi_H^{-1}) \cdot (\mathbf{F} - \mathbf{H}) + \mathbf{L}_\perp \{ \mathbf{L}(\Phi_H^{-1}) \cdot (\mathbf{F} - \mathbf{H}) \} \right] \cdot \delta - \mathbf{L}_\perp \left[\mathbf{L}(\Phi_H^{-1}) \cdot \right.$

$\cdot(\mathbf{F}-\mathbf{H})\cdot\mathbf{L}_\perp(\mathbf{z})+\mathbf{L}_\perp\left[\Phi_{\mathbf{H}}^{-1}\right]\cdot\mathbf{L}_\perp(\zeta)\}dt$. Применяя неравенство (23), приходим к оценке евклидовой нормы $\|\Delta(t_r)-\Delta(t_l)\|\leq c_\Delta\Delta_A$; здесь константа c_Δ не зависит от Δ_A . Это неравенство означает, что $\Delta(t_r)-\Delta(t_l)=\Delta_A\mathbf{c}_\Delta$, где евклидова норма вектора \mathbf{c}_Δ не превосходит величину c_Δ . Но векторы $\Delta(t_l)$ и $\Phi_{\mathbf{H}}(t_r)\Delta(t_r)$ должны удовлетворять однородным краевым условиям (14), то есть должно быть $\mathbf{V}_l\Delta(t_l)+\mathbf{V}_r\Phi_{\mathbf{H}}(t_r)\Delta(t_r)=\mathbf{0}$. Таким образом, векторы $\Delta(t_l)$ и $\Delta(t_r)$ удовлетворяют линейной алгебраической системе уравнений, матрица которой не зависит от Δ_A и, в силу ограничений на вид краевых условий, невырождена. Поэтому, учитывая характер правой части этой системы, делаем вывод, что $\|\Delta(t_l)\|\leq c_{\Delta_l}\Delta_A$, $\|\Delta(t_r)\|\leq c_{\Delta_r}\Delta_A$, где константы c_{Δ_l} и c_{Δ_r} не зависят от Δ_A .

Для получения оценки нормы вектора невязки $\Delta(t_k)$ интегрируем уравнение (25) по t от t_l до t_k . Тогда, проводя аналогичные выкладки и учитывая полученные оценки для норм векторов $\Delta(t_l)$ и $\Delta(t_r)$, имеем $\|\Delta(t_k)\|\leq c_{\Delta_k}\Delta_A$. Вспоминая, что $\delta(t)=\Phi_{\mathbf{H}}(t)\Delta(t)$, получаем

$$\|\delta(t_k)\|\leq c_{\delta_k}\Delta_A, \quad (26)$$

где константа c_{δ_k} не зависит от диаметра разбиения отрезка $[t_l, t_r]$, а величина Δ_A определена выше (24). Тем самым доказана следующая теорема:

Теорема 3. Вычислительная схема (17), (19) решения гамильтоновой краевой задачи (13), (14) является полностью консервативной относительно узлов t_0, \dots, t_N , и для \mathbf{L}_2^{2n} -нормы вектора невязки (20) справедливо неравенство (22). Если же аппроксимирующие пространства \mathbf{L}_k^A содержат постоянные на отрезках $[t_{k-1}, t_k]$ функции, а любая достаточно гладкая функция может быть приближена на k -м отрезке в норме \mathbf{C} элементами пространства \mathbf{L}_k^A с асимптотическим при $(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0$ порядком точности m_k , то евклидова норма вектора невязки (20) в k -м узле t_k асимптотически удовлетворяет неравенству (26) и порождает систему линейных алгебраических уравнений, число обусловленности которой ограничено сверху величиной $\left(1 + \frac{1}{\lambda_{\mathbf{F}}}\|\mathbf{H} - \mathbf{F}\|\right)\left(1 + \frac{\lambda_{\mathbf{F}} + \lambda_{\mathbf{H}}}{\lambda_{\mathbf{F}}\lambda_{\mathbf{H}}}\|\mathbf{H} - \mathbf{F}\|\right)$; матрица системы может быть представлена в виде $\mathbf{A}_\gamma = \mathbf{E} + \mathbf{A}_{\mathbf{H}}\mathbf{A}_{\mathbf{F}}$, где \mathbf{E} — единичная, а $\mathbf{A}_{\mathbf{H}}$ и $\mathbf{A}_{\mathbf{F}}$ — гамильтоновы матрицы.

3. Численная реализация полностью консервативного численного метода решения линейных краевых задач для гамильтоновых систем

Проведённый в разделе 2 анализ полностью консервативной численной схемы решения линейных краевых задач для гамильтоновых систем показывает, что предложенный вариант проекционного метода помимо хороших аппроксимационных свойств порождает и удобную для численного решения алгебраическую систему линейных уравнений, если только достаточно быстро решается базовая краевая задача (17) для любой вектор-функции $\gamma(t) \in \mathbf{L}^A$. Самым оптимальным был бы вариант, при котором матрица \mathbf{F} этой дифференциальной системы была нулевой. Однако в этом случае нельзя гарантировать разрешимость краевой задачи (17) для любой $\gamma(t) \in \mathbf{L}^A$, что становится очевидным при рассмотрении двухточечных краевых условий в ситуации, когда одна и та же компонента искомой вектор-функции задаётся на каждом из краёв. Поэтому необходим алгоритм, позволяющий по заданной матрице краевых условий строить такую матрицу \mathbf{F} , при которой краевая задача (17) может быть быстро разрешена для любой вектор-функции $\gamma(t) \in \mathbf{L}^A$. По существу этот алгоритм описывается при доказательстве следующей леммы:

Лемма 5. Пусть краевые условия (14) являются двухточечными, то есть имеют вид

$$\mathbf{V}_l\mathbf{y}(t_l) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{V}_r\mathbf{y}(t_r) = \mathbf{0}, \quad (27)$$

где

$$\mathbf{B}_r (\mathbf{J}_n - \mathbf{I}_n) \mathbf{B}_r^T = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B}_l (\mathbf{J}_n - \mathbf{I}_n) \mathbf{B}_l^T = \mathbf{0}, \quad (28)$$

а $\text{rang}(\mathbf{B}_l) = \text{rang}(\mathbf{B}_r) = n$. Тогда существует постоянная нильпотентная гамильтонова матрица \mathbf{F} [10], такая, что $\mathbf{F}^2 = \mathbf{0}$, $(\mathbf{x}, \mathbf{I}_n \mathbf{F} \mathbf{x}) \geq 0$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$, и система дифференциальных уравнений $\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{F} \mathbf{y}(t) + \boldsymbol{\gamma}(t)$ для любой вектор-функции $\boldsymbol{\gamma}(t) \in \mathbf{L}_2^{2n}$ имеет единственное решение, удовлетворяющее краевым условиям (27).

Доказательство. Дополняем уравнения (27) соотношением $\mathbf{y}(t_l) - \mathbf{y}(t_r) = \mathbf{0}$. Тогда, если полученная система уравнений относительно векторов $\mathbf{y}(t_l)$ и $\mathbf{y}(t_r)$ имеет единственное (нулевое) решение, то в качестве матрицы \mathbf{F} можно взять нулевую матрицу; лемма доказана. В противном случае элементарными преобразованиями над строками матриц \mathbf{B}_l и \mathbf{B}_r можно привести соотношения (27)

к виду: $\begin{pmatrix} \mathbf{B}_{ov} & \mathbf{B}_{oq} \\ \mathbf{B}_{lv} & \mathbf{B}_{lq} \end{pmatrix} \mathbf{y}(t_l) = \mathbf{0}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{B}_{ov} & \mathbf{B}_{oq} \\ \mathbf{B}_{rv} & \mathbf{B}_{rq} \end{pmatrix} \mathbf{y}(t_r) = \mathbf{0}$, где \mathbf{B}_{ov} и \mathbf{B}_{oq} — матрицы размерностью $m \times n$, а \mathbf{B}_{lv} , \mathbf{B}_{lq} ,

\mathbf{B}_{rv} и \mathbf{B}_{rq} имеют размерность $(n-m) \times n$. При этом матрицы модифицированных краевых условий должны удовлетворять ограничениям (28), которые в данном случае означают не что иное, как ортогональность строк матрицы \mathbf{B}_{ov} к строкам матриц \mathbf{B}_{oq} , \mathbf{B}_{lq} и \mathbf{B}_{rq} . В свою очередь строки матрицы \mathbf{B}_{oq} должны быть ортогональны строкам матриц \mathbf{B}_{lv} и \mathbf{B}_{rv} , а у каждой из пар матриц \mathbf{B}_{lv} , \mathbf{B}_{lq} и \mathbf{B}_{rv} , \mathbf{B}_{rq} строки также должны быть взаимно ортогональны. Если применить процедуру ортогонализации Грамма–Шмидта [10]

к строкам блочной матрицы $\begin{pmatrix} \mathbf{B}_{ov} \\ \mathbf{B}_{oq} \end{pmatrix}$, дополнить полученную систему векторов-строк до ортонормированного базиса во всём \mathbb{R}^n и обозначить через \mathbf{O}_F матрицу перехода к этому базису [10], тогда симплектическое преобразование $\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_F & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{O}_F \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$ сохраняет все метрические свойства матриц и систем уравнений

и приводит к краевым условиям такого же типа, что и раньше, но входящие в них матрицы будут иметь существенно более простую структуру. Сохраняя старые обозначения для матриц краевых условий, имеем:

$$\mathbf{B}_{ov} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{m_v} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}_{oq} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{oq} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{m_q} & \mathbf{0} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}_{lq} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{lq} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}_{lv} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_{lv} & \mathbf{0} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}_{rv} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_{rv} & \mathbf{0} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}_{rq} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{rq} \end{pmatrix};$$

здесь \mathbf{E}_{m_v} и \mathbf{E}_{m_q} — единичные матрицы порядков m_v и m_q , $m_v + m_q = m$; матрица \mathbf{A}_{oq} имеет размерность $m_v \times (n-m)$, а квадратные матрицы \mathbf{A}_{lv} , \mathbf{A}_{lq} , \mathbf{A}_{rv} , \mathbf{A}_{rq} имеют порядок $(n-m)$. При этом матрица $\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{lv} & \mathbf{A}_{lq} \\ \mathbf{A}_{rv} & \mathbf{A}_{rq} \end{pmatrix}$

порядка $2(n-m)$ должна быть, в силу условий леммы, невырожденной. Поэтому в построенном базисе

искомую гамильтонову матрицу \mathbf{F}_O можно представить в виде: $\mathbf{F}_O = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{F}_{ov} \\ \mathbf{F}_{oq} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$; $\mathbf{F}_{ov} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{ov} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$;

$\mathbf{F}_{oq} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{oq} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$. Здесь \mathbf{S}_{ov} и \mathbf{S}_{oq} — положительно определённые симметричные матрицы порядков

m_v и m_q . Возвращаясь к исходному базису, получаем для матрицы \mathbf{F} представление $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{F}_{ov} \\ \mathbf{F}_{ov} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, где

$\text{rang}(\mathbf{F}_{ov}) = m_v$, $\text{rang}(\mathbf{F}_{ov}) = m_q$, а произведение блоков \mathbf{F}_{ov} и \mathbf{F}_{ov} равно нулю. Поэтому $\mathbf{F} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, и лемма доказана.

Подобный выбор матрицы \mathbf{F} позволяет сразу записать общее решение системы $\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{F} \mathbf{y}(t) + \boldsymbol{\gamma}(t)$,

равное $\mathbf{y}(t) = (\mathbf{E}_{2n} + t\mathbf{F}) \left\{ \mathbf{y}(t_l) + \int_{t_l}^t (\mathbf{E}_{2n} - \tau\mathbf{F}) \boldsymbol{\gamma}(\tau) d\tau \right\}$. Если в качестве образующих подпространств \mathbf{L}_k^A

взять многочлены Лежандра [11] от нулевой ($P_0 \equiv 1$) до k -й степени $P_k(t)$ включительно, то существуют явные формулы, выражающие коэффициенты разложений по полиномам Лежандра как произведений $P_i(t)P_j(t)$, так и интегралов и производных от этих полиномов. Поэтому для увеличения скорости

вычисления вектора $L\{[\mathbf{H}(t)-\mathbf{F}][L(\mathbf{B}_F)]\cdot\boldsymbol{\gamma}(t)\}$ как образа вектора $\boldsymbol{\gamma}(t)$ из (19) целесообразно использовать не квадратурные формулы, а готовые рекуррентные соотношения. Но для этого необходимо перейти от системы (13) к гамильтоновой системе

$$\frac{d\mathbf{z}_\varepsilon(t)}{dt} = \mathbf{H}_\varepsilon(t)\mathbf{z}_\varepsilon(t) + \mathbf{h}_\varepsilon(t), \quad (29)$$

где \mathbf{H}_ε и \mathbf{h}_ε — некие приближения к \mathbf{H} и \mathbf{h} . Для рассматриваемого класса краевых задач имеет место теорема устойчивости:

Теорема 4. Пусть для системы (13) выполняются условия теоремы 2; вектор-функция $\mathbf{h}_\varepsilon(t)$ принадлежит пространству \mathbf{L}_2^{2n} ; гамильтонова матрица \mathbf{H}_ε системы (29) удовлетворяет условию: для $\forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}^{2n}$ справедливо неравенство $(\mathbf{r}, \mathbf{I}_n \mathbf{H}_\varepsilon(t) \mathbf{r}) \geq \frac{\lambda_{\mathbf{H}_\varepsilon}}{2} (\mathbf{r}, \mathbf{r})$, где $\lambda_{\mathbf{H}_\varepsilon} > 0$. Тогда решение $\mathbf{z}_\varepsilon(t)$ краевой задачи (14), (29) существует, единственно, и имеют место оценки: $\|\mathbf{z}_\varepsilon(t)\| \leq \frac{1}{\lambda_{\mathbf{H}_\varepsilon}} \|\mathbf{h}_\varepsilon(t)\|$;

$$\|\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}_\varepsilon(t)\| \leq \frac{1}{\lambda_{\mathbf{H}}} \left\{ \left\| [\mathbf{H}(t) - \mathbf{H}_\varepsilon(t)] \mathbf{z}_\varepsilon(t) \right\| + \left\| \mathbf{h}(t) - \mathbf{h}_\varepsilon(t) \right\| \right\}.$$

Доказательство. Эти неравенства можно установить, повторив почти дословно доказательство теоремы 2; только в этом случае уравнение для невязки $\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}_\varepsilon(t)$ надо представить в виде $\frac{d}{dt}[\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}_\varepsilon(t)] = \mathbf{H}(t)[\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}_\varepsilon(t)] + [\mathbf{H}(t) - \mathbf{H}_\varepsilon(t)]\mathbf{z}_\varepsilon(t) + [\mathbf{h}(t) - \mathbf{h}_\varepsilon(t)]$. Важным для последующего изложения является следствие из этой теоремы:

Следствие 2. Пусть выполняются условия теоремы 4 и $\mathbf{H}_\varepsilon(t) = L\{\mathbf{H}(t)\}$, $\mathbf{h}_\varepsilon(t) = L\{\mathbf{h}(t)\}$, где, как и раньше, L — оператор ортогонального проектирования пространства \mathbf{L}_2^{2n} на аппроксимирующее подпространство \mathbf{L}^A , которое удовлетворяет условия леммы 3. Тогда $\|\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}_\varepsilon(t)\| \leq c_\varepsilon \Delta_A$, где Δ_A определено в (24).

Доказательство этого следствия незначительно отличается от доказательства аналогичного утверждения из теоремы 3 и поэтому здесь опускается. Смысл же следствия заключается в том, что если вектор правой части и матрица линейной гамильтоновой системы аппроксимируются элементами пространства \mathbf{L}^A с точностью порядка ε в норме \mathbf{C} , то решение краевой задачи для приближённой системы (29) будет отличаться от точного решения на величину порядка ε^2 . Следовательно, целесообразнее рассматривать не уравнение (19), а эквивалентное ему с точки зрения совершаемой погрешности уравнение.

Так как $\mathbf{H}(t)$ и \mathbf{F} — гамильтоновы матрицы, а $L \cdot \mathbf{B}_F$ — гамильтонов оператор, то уравнение (19) можно переписать в виде $\boldsymbol{\gamma}(t) + L\{[L(\mathbf{H}(t)) - \mathbf{F}]\mathbf{J}_n[L \cdot \mathbf{J}_n \mathbf{B}_F]\boldsymbol{\gamma}(t)\} = L[\mathbf{h}(t)]$, поскольку $\mathbf{J}_n \times \mathbf{J}_n = -\mathbf{E}_n$. Но если \mathbf{H} — гамильтонова матрица, то $\mathbf{H}\mathbf{J}_n$ — симметричная и, стало быть, разрешающая система линейных алгебраических уравнений представима в виде $(\mathbf{E} + \mathbf{S}_H \mathbf{S}_F)\mathbf{x} = \mathbf{b}$, где \mathbf{S}_H и \mathbf{S}_F — симметричные матрицы. Это позволяет использовать для её численного решения методы двойственных направлений [12]. Как и всякий итерационный метод, метод двойственных направлений даёт возможность определять в процессе решения спектральные характеристики матрицы системы, что в свою очередь позволяет оценивать точность вычисленного приближённого решения. Оценки же из теоремы 3 и следствия 2 дают возможность получать верхнюю границу как нормы в \mathbf{L}_2^{2n} невязки между приближённым и точным решениями, так и евклидовой нормы невязки в узлах сетки $t_i = t_0, t_1, \dots, t_N = t_r$, что необходимо в большинстве прикладных задач теории оболочек вращения при вычислении несущей способности оболочечной конструкции.

Рассмотрим теперь простейшую реализацию численного метода решения краевых задач для гамильтоновых систем, когда на правом краю оболочки приложены обобщенные усилия \mathbf{q}_r , а на левом заданы обобщенные смещения \mathbf{v}_l . Будем предполагать, что неоднородные краевые условия путем очевидной замены неизвестных сводятся к однородным. В качестве оператора \mathbf{B}_F из (17) берём интегральный оператор $\mathbf{I}_t: \boldsymbol{\zeta}(t) \mapsto \mathbf{z}(t)$, ставящий в соответствие вектор-функции $\boldsymbol{\zeta}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \boldsymbol{\rho}(t) \end{pmatrix}$

вектор-функцию $\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{p}(t) \end{pmatrix}$ согласно соотношениям: $\mathbf{u}(t) = \int_{t_i}^t \mathbf{v}(\tau) d\tau$, $\mathbf{p}(t) = \int_{t_i}^t \mathbf{\rho}(\tau) d\tau$, $\mathbf{v}(t), \mathbf{\rho}(t) \in \mathbf{L}_2^n$.

Тогда интегральное уравнение (18) принимает вид $\zeta(t) = \mathbf{H}(t) \mathbf{I}_t[\zeta(t)] + \mathbf{h}(t)$.

Пусть, как и ранее, $t_0, t_1, \dots, t_{N-1}, t_N$ — заданное разбиение отрезка $[t_l, t_r]$ на N промежутков узлами t_k . В качестве аппроксимирующего пространства \mathbf{L}^A возьмём подпространство постоянных на каждом из отрезков $[t_{k-1}, t_k]$ ($k=1, \dots, N$) функций. Тогда система линейных алгебраических уравнений (19)

примет вид: $\gamma_k = \frac{1}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{H}(t) dt \cdot \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{I}_t[\gamma(t)] dt + \frac{1}{\sqrt{t_k - t_{k-1}}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{h}(t) dt$; здесь γ_k — искомое значение $\gamma(t)$ на

k -м отрезке $[t_{k-1}, t_k]$. Вычисленная на решении $\gamma(t)$ функция $\mathbf{I}_t[\gamma(t)]$ в узлах t_k будет аппроксимировать решение исходной краевой задачи со вторым порядком точности. Обозначим $\mathbf{H}_k = \mathbf{H}(t_k)$, $\mathbf{h}_k = \mathbf{h}(t_k)$, $\mathbf{y}_k = \mathbf{y}(t_k)$, естественно предполагая при этом, что t_k является точкой непрерывности соответствующих функций, иначе необходимо рассматривать односторонние пределы. Воспользовавшись теперь квадратурными формулами для вычисления интегралов, разрешающую систему линейных алгебраических уравнений можно представить в виде

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}_{2nN} - \mathbf{H}_H \mathbf{H}_I) \gamma^N = \mathbf{h}^N, \quad (\gamma^N)^T = (\gamma_1^T, \dots, \gamma_N^T) \in \mathbb{R}^{2nN}, \quad (\mathbf{H}_H \gamma^N)_k = \frac{\sqrt{t_k - t_{k-1}}}{2} (\mathbf{H}_k + \mathbf{H}_{k-1}) \gamma_k, \\ (\mathbf{H}_H \gamma^N)_k = \frac{1}{2\sqrt{t_k - t_{k-1}}} (\mathbf{I}_{t_k}[\gamma(t)] + \mathbf{I}_{t_{k-1}}[\gamma(t)]), \quad (\mathbf{h}^N)^T = \left(\frac{\sqrt{t_1 - t_0}}{2} (\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_0)^T, \dots, \frac{\sqrt{t_k - t_{k-1}}}{2} (\mathbf{h}_N + \mathbf{h}_{N-1})^T \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь \mathbf{H}_H и \mathbf{H}_I — $\sqrt{\quad}$ -матрицы: $\mathbf{\Gamma}_N = \mathbf{E}_N \otimes \mathbf{J}_n$; \mathbf{E}_N — единичная матрица порядка N : $(\mathbf{\Gamma}_N \gamma^N)_k = \mathbf{J}_n \gamma_k$.

Систему (30), в силу свойств её матрицы, легко симметризовать несколькими способами. Один из них возникает при минимизации вектора ошибки. По существу в этом случае рассматривается не исходная система (30), а система вида: $(\mathbf{E}_{2nN} - \mathbf{H}_H \mathbf{H}_I)^T (\mathbf{E}_{2nN} - \mathbf{H}_H \mathbf{H}_I) \gamma^N = (\mathbf{E}_{2nN} - \mathbf{H}_H \mathbf{H}_I)^T \mathbf{h}^N$.

Симметризация такого рода универсальна, и ее называют симметризацией системы по методу наименьших квадратов. К сожалению, умножение вектора на матрицу симметризованной системы требует в два раза больше арифметических операций, чем умножение на исходную матрицу, а число обусловленности симметризованной системы оценивается как квадрат числа обусловленности первоначальной системы. Два других способа симметризации существенным образом опираются на теорему 3.

Способ симметризации, называемый ниже «интегральным», приводит к системе $\mathbf{\Gamma}_N \mathbf{H}_I (\mathbf{E}_{2nN} + \mathbf{H}_H \mathbf{\Gamma}_N \mathbf{\Gamma}_N \mathbf{H}_I) \gamma^N = \mathbf{\Gamma}_N \mathbf{H}_I \mathbf{h}^N$, матрица которой является симметричной, поскольку

$\mathbf{\Gamma}_N \mathbf{H}_I = (\mathbf{\Gamma}_N \mathbf{H}_I)^T$, $\mathbf{H}_H \mathbf{\Gamma}_N = (\mathbf{H}_H \mathbf{\Gamma}_N)^T$. В этом случае симметризованное уравнение есть не что иное как несколько модифицированная схема Бубнова–Галеркина [2] для решения интегрального уравнения $\mathbf{y}(t) = \mathbf{I}_t[\mathbf{H}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t)]$, решение $\mathbf{y}(t)$ которого является приближённым решением исходной краевой задачи (13)–(14). «Дифференциальная» симметризация приводит к системе алгебраических уравнений

$[(\mathbf{\Gamma}_N \mathbf{H}_I)^{-1} + \mathbf{H}_H \mathbf{\Gamma}_N] \mathbf{y}^N = \mathbf{h}^N$ относительно неизвестной $\mathbf{y}^N = (\mathbf{\Gamma}_N \mathbf{H}_I)^{-1} \gamma^N$, которая эквивалентна системе, записанной с использованием конечно-разностной схемы Эйлера [5] для уравнения (13):

$$\frac{\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} = \frac{1}{4} (\mathbf{H}_k + \mathbf{H}_{k-1}) (\mathbf{y}_k + \mathbf{y}_{k-1}).$$

Возникающие системы линейных алгебраических уравнений можно решать однотипными итерационными методами, основанными на ортогонализации в некоторой метрике степенных последовательностей, порождаемых исходной матрицей линейной системы [13]. На базе данного подхода были разработаны пакеты прикладных программ решения линейных краевых задач для гамильтоновых систем линейных дифференциальных уравнений; на их основе на языках высокого уровня созданы программы расчета напряжённо-деформированного состояния тонкой многослойной анизотропной оболочки вращения.

Тестирование пакета проводилось на решении задачи кручения оболочки вращения [6] торцевым усилием, приложенным к правому краю $t = 1, 0$, в то время как левый край $t = 0, 0$ был жестко зашпемлен. В этом случае краевые условия имели вид: $\pi_\varphi(t)|_{t=0} = 0, 0$ и $M_\varphi(t)|_{t=1,0} = 0, 0$. При проведении тестовых расчетов вектор правых частей дифференциальной системы выбирался таким образом, чтобы решение

краевой задачи являлось линейной комбинацией квадратичного полинома и экспонент $e^{\pm\lambda r}$, параметры же самой оболочки удовлетворяли условиям $D_\gamma^0 = r\Delta_\gamma$, $r\delta \cdot f_{\text{фп}} = (10\varepsilon)^2$, то есть $\lambda = 10,0$; здесь ε — постоянная толщина оболочки, отнесённая к характерному линейному размеру; t и $r(t)$ — обезразмеренные аналогичным образом меридиональная и радиальная координаты точки срединной поверхности; δ — отношение сдвиговых жесткостей материала оболочки в нормальной и касательной плоскостях. Во всех рассмотренных случаях итерационный процесс решения линейных алгебраических уравнений продолжался до машинного установления. Численно подтверждён второй порядок точности данной вычислительной схемы. Наилучшей, с точки зрения достигнутой погрешности, оказалась симметризация по методу наименьших квадратов; это наглядно видно на рисунке 1, где показано сравнительное поведение евклидовых норм невязок между точным и приближенным решениями модельной краевой задачи кручения для трех методов симметризации при равномерном шаге, равном 2^{-6} .

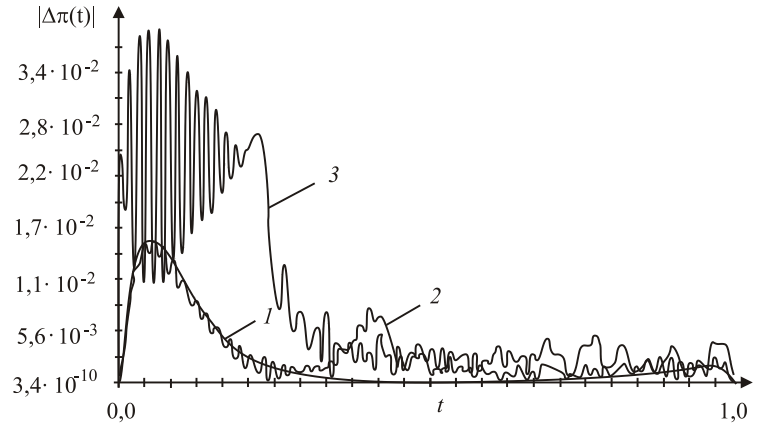


Рис. 1. Поведение невязок для трех типов симметризации: метод наименьших квадратов (кривая 1), дифференциальный метод (2), интегральный метод (3)

4. Влияние жесткостных параметров сдвиговой модели тонкой многослойной анизотропной оболочки вращения на НДС, определяемое с учетом поперечного сдвига

При построении аналитических решений для осесимметричных задач оболочек вращения [1] обнаружено, что характер погранслойных функций существенно зависит от выбора функций, отвечающих за распределение поперечных компонент тензора напряжений по толщине оболочки. С целью дальнейшего изучения этого факта проводились численные расчеты цилиндрической оболочки при неосесимметричной комбинированной нагрузке. В обозначениях работ [1], [6] оболочка имела следующие характеристики: $t_l = 0,04$; $t_r = 1,0$; $r(t) \equiv 0,5$; $\varepsilon = 0,1$; $z_l = -0,5$; $z_r = 0,5$; $\delta = 0,1$; $D_{ss}(t, z) \equiv 1,0$; $D_{\text{сп}}(t, z) \equiv 0,5$; $D_{\text{фп}}(t, z) \equiv 1,0$; $D_s(t, z) \equiv 1,0$; $D_\phi(t, z) \equiv 1,0$; $D_\gamma(t, z) \equiv 0,5$; параметры обезразмеривались по аналогии с задачей кручения. Рассматривалось сложное нагружение физически однослойной оболочки вращения внутренним гидростатическим давлением интенсивностью 1,0 и внешней ветровой нагрузкой с меридиональной плотностью 0,5: $\sigma_{tz}(t, \varphi) \equiv -1,0$, $\sigma_{rz}(t, \varphi) \equiv -0,5 \cos \varphi$. Поведение оболочки исследовалось при двух типах краевых условий и при пяти различных распределениях поперечных скальвающих напряжений по толщине оболочки: $\tau_{\alpha z}(s, z) = f(z)\pi_\alpha(s)$; $\alpha = s, \varphi$; $z \in [-0,5; 0,5]$.

Расчеты выполнялись с использованием программного комплекса, базирующегося как на алгоритме, изложенном в предыдущем разделе, так и на методе вложенных сеток [14]. При этом шаг интегрирования выбирался автоматически после анализа абсолютной погрешности невязки вычисленного приближенного решения на исходном операторном уравнении.

В процессе вычислений шаг интегрирования уменьшался до 10^{-3} , а число обусловленности системы линейных уравнений составляло порядка 10^4 и весьма незначительно изменялось в сторону увеличения с ростом числа шагов. Таким образом, удалось численно осуществить моделирование решения типа погранслоя, не используя специальной аппроксимации для погранслойных функций, а ограничиваясь лишь уменьшением шага в окрестности краёв оболочки.

На рисунке 2 приведены некоторые результаты вычислений компоненты вектора смещений $u_s^0(t)$ при жестком защемлении краев $t = 0,0$, $t = 1,0$ и различном характере распределения касательных напряжений $f(z)$ по толщине оболочки: $\sin(2\pi z)$ (кривая 1); $\sin(4\pi z)$ (2); $\sin(8\pi z)$ (3); $\sin(16\pi z)$ (4); классическая модель оболочки вращения $\delta = 0,0$ — кривая 5. Из графиков видно, что наибольшие отличия от классической оболочки в характере поведения возникают в случае, когда $f(z)$ имеет несколько осцилляций

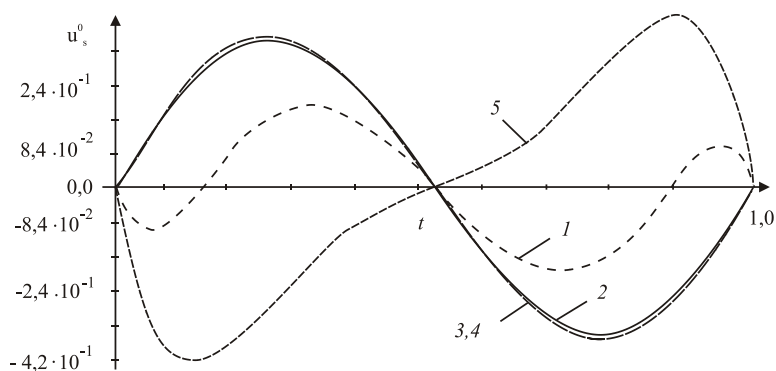


Рис. 2. Осевое смещение $u_s^0(t)$ цилиндрической оболочки при жестком защемлении концов и различном характере распределения по её толщине касательных напряжений $f(z)$ (кривые 1–4); классическая модель (кривая 5)

(кривые 2–4); различия по прогибу менее катастрофичны, но достигают более десяти процентов. Поскольку при решении системы использовалась симметризация по методу наименьших квадратов, а число обусловленности в рассматриваемом варианте алгоритма зависело квадратично от обезразмеренной толщины оболочки ε , то подобным образом удалось просчитать НДС оболочек, для которых $\varepsilon \geq 10^{-2}$.

В качестве иллюстрации проводились расчеты НДС реальных анизотропных многослойных оболочек вращения. Каждый слой был ортогонально армированным композитом бор–

алюминий. Осредненные характеристики такого материала рассчитывались по формулам из работы [15] при интенсивности армирования $C_a = 0,4688$, обеспечивающей максимально возможную анизотропию композиционного материала, составляющие которого имели следующие упругие характеристики: $\nu_{boron} = 0,1$; $E_{boron} = 45,0 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$; $\nu_{alum} = 0,3$; $E_{alum} = 7,0 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$.

В предположении, что каждый слой работает в условиях обобщенного плоского напряженно-деформированного состояния, получили следующие упругие характеристики слоя, армированного в направлении x : $D_y = 7,147 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$; $D_x = 7,147 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$; $D_z = 6,621 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$.

Была разработана версия алгоритма решения системы линейных уравнений (30), которая позволила рассчитать подобные оболочки с обезразмеренной толщиной порядка 10^{-5} . Алгоритм базировался на симметризации, которая возникала при прямом исключении из процесса счета обобщенных сил, в результате чего получалась некоторая вариационная постановка дискретной задачи. К сожалению, в этом случае непосредственное определение шага интегрирования было связано со значительными вычислительными затратами. Поэтому для определения функции шагов использовалась априорная информация о характере искомого решения, полученная в результате аналитического исследования, проведенного в [1], и шаг выбирался из условия неизменности погрешности аппроксимации на точном решении для каждого промежутка. При этом сетка была неравномерной, размеры шагов для проведенных численных экспериментов различались более чем в 10^6 раз.

Рассматривались три геометрических типа оболочек вращения: цилиндрическая с радиусом $r = 1,0$; коническая с $r(t) = 1,0 + \sqrt{2}(t/2)$ и углом раствора в 45° ; диск с $r(t) = 1,0 + t$ и внутренним отверстием с радиусом $1,0$; толщина оболочки составляла $\varepsilon = 10^{-3}$, параметр $\delta = 1,0$. При этом принимался квадратичный закон распределения касательных напряжений по толщине оболочки; на оболочку действовало внутреннее гидростатическое давление интенсивностью $p = 1,0 \cdot 10^2 \text{ кг/см}^2$, её левый край $t = 0,0$ был жестко закреплен, а правый $t = 5,0$ — свободен.

Исследовалось влияние количества слоев на максимальное по толщине оболочки значение напряжений в армирующем волокне: считалось, что число слоев четное и слои, армированные в меридиональном направлении, чередуются со слоями, армированными в окружном направлении, причем суммарная толщина оболочки остается неизменной; интенсивность армирования по толщине каждого слоя совпадала с интенсивностью армирования в касательной плоскости и в рассмотренных случаях была одинаковой для всех слоев. Переход от осредненных деформаций и напряжений оболочки к микродеформациям и напряжениям в волокне осуществлялся по методике [16].

Оказалось, что максимальные различия по напряжениям имеют место для цилиндрической оболочки и по осевым составляющим достигают 14%. Результаты расчетов приведены в таблице для 2, 8, 16 и 32-слойных оболочек. Расчеты выполнены на неравномерной сетке, построенной по заданной для неё относительной погрешности (не превосходящей 1%) аппроксимации пограничных функций; количество отрезков разбиения оказалось равным 256, а минимальный и максимальные шаги равнялись $4,04 \cdot 10^{-6}$ и $2,26 \cdot 10^{-2}$ соответственно. Возникающая в вычислительном процессе система линейных алгебраических уравнений имела число обусловленности $1,03 \cdot 10^{11}$ и была решена методом сопряженных градиентов [13].

Таблица. Зависимость максимальных напряжений в армирующих волокнах цилиндрической оболочки от числа слоев

Число физических слоев	$t_{\max s}$	$\max_t \{ \sigma_s(t) \}$	$t_{\max \phi}$	$\max_t \{ \sigma_\phi(t) \}$
2	$1,31 \cdot 10^{-4}$	$2,39 \cdot 10^{-5}$	$8,71 \cdot 10^{-2}$	$1,30 \cdot 10^{-5}$
4	$1,31 \cdot 10^{-4}$	$2,24 \cdot 10^{-5}$	$8,71 \cdot 10^{-2}$	$1,30 \cdot 10^{-5}$
8	$1,31 \cdot 10^{-4}$	$2,17 \cdot 10^{-5}$	$8,71 \cdot 10^{-2}$	$1,30 \cdot 10^{-5}$
16	$1,31 \cdot 10^{-4}$	$2,14 \cdot 10^{-5}$	$8,71 \cdot 10^{-2}$	$1,30 \cdot 10^{-5}$
32	$1,31 \cdot 10^{-4}$	$2,12 \cdot 10^{-5}$	$8,71 \cdot 10^{-2}$	$1,30 \cdot 10^{-5}$

5. Заключение

Предложена формулировка краевых задач для **J**-систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений в виде интегрального уравнения и модификация проекционного метода для его решения. В результате исходная краевая задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений, число обусловленности которой допускает верхнюю оценку, не зависящую от размерности аппроксимирующего пространства, на котором ищется приближенное решение. Проведено исследование предложенной вычислительной схемы. Доказано, что относительно узловых значений искомых полевых функций данная численная схема сохраняет все квадратичные (с постоянной матрицей формы) инварианты исходной механической системы.

Проанализировано влияние функциональных параметров, отвечающих за распределение поперечных касательных напряжений по толщине оболочки в сдвиговой модели [6] слоистых композиционных оболочек вращения, на характер решения, получаемого по этой модели. Выполнена серия иллюстративных расчетов для многослойных оболочечных конструкций из композиционных материалов при различных типах распределения поперечных напряжений по толщине оболочки.

Литература

1. Киреев И.В., Немировский Ю.В. Асимптотические методы исследования линейных гамильтоновых систем уравнений статики упругих оболочек вращения // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2011. – Т. 4, № 2. – С. 35-60.
2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984. – 750 с.
3. Крылов В.И., Шульгина Л.Т. Справочная книга по численному интегрированию. – М.: Наука, 1966. – 372 с.
4. Киреев И.В. Симметричные численные методы решения краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Моделирование в механике сплошных сред: Межвуз. сб. научных статей. / Красноярск, 1992. – С. 81-91.
5. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. – М.: Наука, 1992. – 424 с.
6. Киреев И.В., Немировский Ю.В. Гамильтонова формализация определяющих соотношений линейной теории оболочек вращения // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2010. – Т. 3, № 4. – С. 29-52.
7. Киреев И.В. Краевые задачи для гамильтоновых систем обыкновенных дифференциальных уравнений: Препр. № 11 / ВЦ СО АН СССР. – Красноярск, 1990. – 31 с.
8. Вису R.S. Two-point boundary value problems of linear Hamiltonian system // SIAM J. Appl. Math. – 1967. – V. 15, N. 6, – P. 1385-1389. DOI
9. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. – М.: Наука, 1979. – 720 с.
10. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 538 с.
11. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1979. – 416 с.
12. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
13. Чернышёва А.А., Киреев И.В. Модификация критерия Уилкинсона остановки итераций в методе сопряженных градиентов // Вестник КрасГУ. Серия «Физ.-мат. науки» / КрасГУ, 2005. – № 4.– С. 173-177.
14. Шайдунов В.В. Многосеточные методы конечных элементов. – М.: Наука, 1989. – 288 с.
15. Ванин Г.А. Микромеханика композиционных материалов. – Киев: Наук. думка, 1985. – 304 с.
16. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчёт многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1984. – 264 с.

Поступила в редакцию 08.09.10; опубликована в электронном виде 11.04.12

Сведения об авторах

Киреев Игорь Валериевич, кфмн, доц., Институт вычислительного моделирования СО РАН (ИВМ СО РАН), 660036, Красноярск, Академгородок, д. 50, стр. 44; E-mail: kiv@icm.krasn.ru

Немировский Юрий Владимирович, дфмн, проф., гнс, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН (ИТПМ СО РАН), 630090, Новосибирск, ул. Институтская, д. 4/1; E-mail: nemirov@itam.nsc.ru