

DOI: 10.7242/1999-6691/2012.5.1.1

УДК 519.63

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАНСФОРМАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В УСЛОВИЯХ ЗАЛИВОВ

И.Б. Аббасов

Таганрогский технологический институт Южного федерального университета, Таганрог, Россия

В работе рассматриваются вопросы численного моделирования трансформации нелинейных поверхностных гравитационных волн в условиях мелководных заливов. Дискретная модель построена на основе нелинейных уравнений мелкой воды. Приведены граничные и начальные условия. Методом расщепления по физическим процессам получена система из трех уравнений. Определен порядок аппроксимации, исследованы условия устойчивости дискретной модели. Для решения системы уравнений использован метод прогонки. Представлены профили поверхностных гравитационных волн для различных этапов распространения.

Ключевые слова: уравнения мелкой воды, численное моделирование, нелинейные поверхностные гравитационные волны, трансформация профилей

NUMERICAL MODELING OF TRANSFORMATION OF NONLINEAR SURFACE GRAVITY WAVES UNDER CONDITIONS OF GULFS

I.B. Abbasov

Taganrog Institute of Technology of Southern Federal University, Taganrog, Russia

This paper is concerned with the numerical modeling of transformation of nonlinear surface gravity waves under conditions of a shallow gulf. A discrete model is constructed using nonlinear shallow water equations. Boundary and initial conditions are given. A system consisting of three equations is obtained by means of the splitting method with respect to physical processes. The approximation order is defined, and stability conditions for discrete models are examined. The system of equations is solved by the sweep method. The profiles of surface gravity waves obtained at various stages of their propagation are presented.

Key words: shallow water equations, numerical modeling, nonlinear surface gravity waves, profile transformation

Проблема исследования поверхностных гравитационных волн на мелководье имеет достаточно давнюю историю. Интерес к волновым явлениям на поверхности жидкости можно объяснить распространенностью и доступностью этого физического явления. Нелинейные поверхностные гравитационные волны в условиях мелководья, как правило, описываются уравнениями мелкой воды. И, несмотря на огромное количество работ по теории волновых движений жидкости, она все ещё остается не завершенной. В связи с этим вопрос о волновых явлениях на поверхности мелководных акваторий, с позиций учета их влияния на береговые образования и гидротехнические сооружения, по-прежнему является актуальным. Моделирование нелинейных поверхностных гравитационных волн также может играть немаловажную роль при мониторинге экологического состояния мелководных заливов. В рамках данной статьи для модели мелководья будут использоваться гидрофизические данные Таганрогского залива Азовского моря.

Рассмотрим некоторые результаты исследований с применением численного моделирования волновых процессов на основе нелинейных и нелинейно-дисперсионных уравнений теории мелкой воды, полученные за последние десятилетия. Так, в [1] и [2] довольно подробно изучены вопросы трансформации монохроматических волн над горизонтальным дном в прибрежной зоне. В лабораторных экспериментах и путем численного моделирования исследовано влияние первых четырех гармоник на профиль поверхностной волны при её распространении по мелководью. Система эволюционных уравнений решалась численно с помощью метода Рунге–Кутты. Модель верифицирована с использованием лабораторных и натуральных данных. Численное моделирование нестационарных периодических поверхностных волн проводится в статье [3], где задача об эволюции поверхностных волн сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследуется динамика гравитационных волн при различных амплитудах и длинах волн. Приведены профили гравитационных волн в начальный момент времени и в момент обрушения. Объектом изучения в [4] являются нелинейные длинные волны в бассейнах с пологим дном. Рассматривается нелинейно-дисперсионная модель мелкой воды с учетом топографии дна водоема и вязкости жидкости. Проводится сравнение расчетов по трансформации плоского возмущения свободной поверхности воды с опытными данными. Численно решается задача о воздействии коническо-цилиндрического острова, подводного хребта и трения о наклонное дно на эволюцию плоской уединенной волны. Работа [5] содержит результаты численного моделирования и экспериментальных наблюдений влияния эффектов нелинейного взаимодействия, отражения и затухания на распространение поверхностных гравитационных волн в береговой зоне. Установлено, что нелинейные взаимодействия приводят к удвоению числа гребней волны, однако для волн меньшей высоты гребень не раздваивается. Описанные эффекты обсуждаются в рамках модели

Буссинеска. Статья [6] посвящена численному исследованию в двухмерной постановке воздействия затопленного волнореза на распространение волны. Модель учитывает параметры волны как до обрушения, так и после обрушения. Для проверки модели представлены результаты лабораторных экспериментов. Анализируется трансформация профиля волны и связь крутизны волны с её спектральным составом. В [7] рассмотрена система уравнений, описывающая распространение длинных поверхностных волн на воде с учетом дисперсионных эффектов. Такие модели используются для решения задач гидродинамики длинных волн, когда применение полных трехмерных моделей приводит к необоснованно большим затратам вычислительных ресурсов.

Следует отметить также некоторые работы, содержащие численные расчеты прерывных волн на основе уравнений мелкой воды. В работе [8] предложен численный алгоритм для моделирования распространения прерывных волн по сухому руслу. Представлены результаты численного моделирования распространения волны, возникающей в результате разрушения плотины в русле с неровным дном. В работе [9] приводится численное решение уравнений мелкой воды, моделирующих прерывные волны, с помощью неявных разностных схем повышенной точности. Достаточно подробный обзор работ по численному решению уравнений мелкой воды представлен в монографии [10]. В основном эти решения предназначены для моделирования одномерных и двумерных течений жидкости при средних и больших значениях чисел Фруда. Влияние нелинейных эффектов на экмановские течения во вращающемся плоском горизонтальном слое жидкости исследованы в работе [11].

Данная работа посвящена численному решению дискретных уравнений мелкой воды с условиями, привязанными к гидрофизическим параметрам Азовского моря. При этом используются точные методы решения дискретных уравнений мелкой воды. Моделирование на основе аналитических выражений, описывающих процессы распространения нелинейных поверхностных гравитационных волн в условиях мелководья, также проводилось в работе [12].

1. Система уравнений мелкой воды. Граничные и начальные условия

Поверхностные гравитационные волны на мелководье описываются уравнениями мелкой воды. Система уравнений мелкой воды содержит уравнение неразрывности и динамическое уравнение на основе закона сохранения импульса [13], [14]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial((H + \zeta)u)}{\partial x}, \quad (1)$$

где u — скорость частиц среды; ζ — уровень свободной поверхности жидкости; H — постоянная глубина жидкости; g — гравитационная постоянная; x — пространственная координата; t — текущее время процесса. Уравнения мелкой воды не учитывают эффект дисперсии из-за её незначительности на мелководье.

Полагаем, что на свободной поверхности жидкости выполняется кинематическое граничное условие, а давление равно атмосферному. На дне предполагаем равенство нулю скорости частиц жидкости: $u|_{z=-H} = 0$. Возмущение на поверхности задаем в виде гармонического закона. Начальное условие для скорости частиц представляем как $u(x, 0) = 0$, $u(0, t) = a \sin(\omega t)$, где a , ω — амплитуда и круговая частота поверхностной волны.

2. Построение дискретной модели

Для первого уравнения системы (1) запишем дискретный аналог производной по временной координате:

$$\frac{\hat{u} - u}{\tau} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}.$$

Применим к этому уравнению метод расщепления по физическим процессам [15]:

$$\frac{\tilde{u} - u}{\tau} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\hat{u} - \tilde{u}}{\tau} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad (2)$$

где u и \tilde{u} — компоненты скорости на текущем и вспомогательном временных слоях; \hat{u} — компонента скорости на следующем временном слое, τ — шаг по времени, μ — параметр искусственной вязкости ($0 < \mu < 1 \text{ м}^2/\text{с}$). Умножим второе уравнение системы (2) на $(H + \zeta)$ и возьмем производную по x от обеих частей:

$$\frac{\partial(\zeta + H)\hat{u}}{\partial x} - \frac{\partial(\zeta + H)\tilde{u}}{\partial x} = -\tau \frac{\partial}{\partial x} \left((\zeta + H)g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right). \quad (3)$$

С учетом второго уравнения системы (1) уравнение (3) примет вид:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial(\tilde{u}\zeta)}{\partial x} = \tau g \frac{\partial}{\partial x} \left((\zeta + H) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) - \frac{\partial(\tilde{u}H)}{\partial x}.$$

Полученное выражение является уравнением связи уровня свободной поверхности жидкости ζ с \tilde{u} . Таким образом, для рассматриваемого случая система уравнений мелкой воды приобретет следующий окончательный вид:

$$\frac{\tilde{u} - u}{\tau} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial(\tilde{u}\zeta)}{\partial x} = \tau g \frac{\partial}{\partial x} \left((\zeta + H) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) - \frac{\partial(\tilde{u}H)}{\partial x}, \quad \frac{\hat{u} - \tilde{u}}{\tau} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}. \quad (4)$$

Алгоритм решения системы уравнений (4) заключается в следующем:

- через компоненты скорости на текущем временном слое u из первого уравнения найдем компоненты на вспомогательном временном слое \tilde{u} ;
- из второго уравнения определим уровень свободной поверхности жидкости ζ ;
- из третьего уравнения вычислим компоненты скорости на следующем временном слое \hat{u} .

Уравнения мелкой воды относятся к системам уравнений гиперболического типа. Нелинейные гиперболические уравнения по сравнению с линейными уравнениями обладают рядом принципиальных отличий, которые особенно важно учитывать при их численном интегрировании. Даже при сколь угодно гладких начальных условиях решение нелинейных уравнений может содержать разрывы. Во избежание этой проблемы при практическом решении задач нелинейной механики в дифференциальную систему вводится малое дополнительное возмущение в виде искусственной вязкости (аналогично методу Неймана–Рихтмайера) [16], [17], которая устраняет разрывы и приводит к адекватным результатам. Такой прием применяется и в данной работе.

Для записи дискретного аналога дифференциальных уравнений используем неявную разностную схему, которая строится на основе интегро-интерполяционного метода на равномерной сетке [18], [19]. Неявная схема выбрана из-за её большего запаса устойчивости.

Система уравнений (4) в дискретной форме имеет следующую запись:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{u}_i^{j+1/2} - \tilde{u}_i^j}{\tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1}^j + u_i^j}{2} \cdot \frac{u_{i+1}^{j+1/2} - u_i^{j+1/2}}{h_x} + \frac{u_{i-1}^j + u_i^j}{2} \cdot \frac{u_i^{j+1/2} - u_{i-1}^{j+1/2}}{h_x} \right) &= \mu \left(\frac{u_{i+1}^{j+1/2} - u_i^{j+1/2}}{h_x^2} - \frac{u_i^{j+1/2} - u_{i-1}^{j+1/2}}{h_x^2} \right), \\ & \left(\frac{\zeta_i^{j+1} - \zeta_i^j}{\tau} + \left(\frac{\tilde{u}_{i+1}^j \zeta_{i+1}^{j+1} - \tilde{u}_{i-1}^j \zeta_{i-1}^{j+1}}{2h_x} \right) \right) = \\ = \tau g \left(\left(\frac{\zeta_{i+1}^j + H_{i+1} + \zeta_i^j + H_i}{2} \right) \frac{\zeta_{i+1}^{j+1} + \zeta_i^{j+1}}{h_x^2} - \left(\frac{\zeta_i^j + H_i + \zeta_{i-1}^j + H_{i-1}}{2} \right) \frac{\zeta_i^{j+1} + \zeta_{i-1}^{j+1}}{h_x^2} \right) &- \left(\frac{\tilde{u}_{i+1}^j H_{i+1} - \tilde{u}_{i-1}^j H_{i-1}}{2h_x} \right), \\ \frac{\hat{u}_i^{j+1/2} - \hat{u}_i^j}{\tau} &= -g \left(\frac{\zeta_{i+1}^{j+1} - \zeta_{i-1}^{j+1}}{2h_x} \right). \end{aligned}$$

Далее определяем порядок аппроксимации и исследуем условия устойчивости дискретной модели. Для решения системы уравнений применялся метод прогонки. Непрерывная задача эквивалентна дискретной задаче с порядком аппроксимации $O(h_x^2 + \tau)$, где h_x — шаг по пространственной координате. Согласно условию Куранта шаги сетки ограничены выражением: $(2gH/\tilde{u}) \cdot (\tau/h_x) \leq 1$.

3. Моделирование распространения нелинейных поверхностных гравитационных волн в условиях залива

Рассмотрим особенности моделирования процесса распространения поверхностных гравитационных волн на мелководье. Для этого необходимы некоторые гидрофизические данные акватории. В качестве мелководной акватории используем Таганрогский залив Азовского моря ввиду его географической доступности (хотя можно взять гидрофизические условия и других районов).

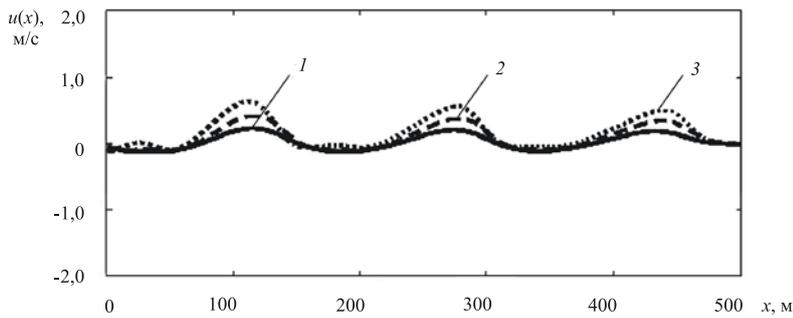


Рис. 1. Зависимость профиля поверхностной гравитационной волны от её начальной крутизны при частоте $f = 0,045$ Гц, длине волны $\lambda = 155,6$ м, глубине водоёма $H = 5$ м, скорости распространения $c = 7$ м/с, $kH = 0,2$ (где k – волновое число) при различных значениях отношения $2a/\lambda$ и величины ε : 0,0024 и 0,04 (кривая 1); 0,0039 и 0,06 (2); 0,0060 и 0,09 (3)

Из десяти заливов Азовского моря три относятся к заливам закрытого типа: Таганрогский, Сиваш и Таманский. На северо-востоке сильно опресненный Таганрогский залив соединяется с морем широким проливом между косами Белосарайской и Долгой. Наименьшая ширина залива (около 26 км) отмечена между косами Петрушиной и Чумбурской. Дно залива активно понижается от дельты реки Дон в сторону моря, средний уклон дна составляет 0,06%. Западнее Таганрога глубина залива достигает 5 м, а у дельты Дона она составляет менее 1 м [21].

В Азовском море волновые движения проявляются, прежде всего, в виде ветрового волнения. Оно развивается быстро и примерно через 2 часа после возникновения ветра достигает установившегося состояния. В открытом море, как правило, образуются короткие и очень крутые волны. В холодную часть года господствующие северо-восточные и восточные ветры вызывают волнение большой силы, при котором высота волн в открытом море равняется 2,1 м, а иногда и 3,0 м. Чаше всего волны достигают длины 10–12 м и высоты от 0,5 до 1 м [22].

На рисунке 1 представлены результаты численного расчета скорости частиц поверхностной гравитационной волны для разных значений её начальной крутизны. Значения параметров поверхностной волны приспособлены к батиметрическим условиям (данным о рельефе морского дна) Таганрогского залива. Для расчетов используются значения глубин в пределах $0,5 \text{ м} \leq H \leq 5 \text{ м}$. При этом значение глубины для конкретных условий остается постоянным.

Далее рассмотрим случай, когда поверхностные гравитационные волны являются свободными, то есть по сути — это волны зыби, следовательно, влиянием ветра пренебрегаем. Мелководными будем считать поверхностные гравитационные волны при выполнении следующего условия [23]: $H/\lambda < 1/2$, где λ — длина поверхностной гравитационной волны. Длины поверхностных гравитационных волн должны не менее чем в 2 раза превышать глубину мелководья. Тогда для условий Таганрогского залива мелководными можно считать поверхностные гравитационные волны с длинами свыше 30 м.

Для расчетов использовалась сетка с количеством точек $n = 5000$, число узлов на длину волны при этом составляло 1556, значение шага по пространству $h_x = 0,1$ м, параметр мелководности волны $H/\lambda = 0,032$, нелинейный параметр $\varepsilon = a/H$. Профиль синусоидальной поверхностной волны (Рис. 1, кривая 1) не претерпевает особых изменений по пути распространения. С увеличением крутизны поверхностной волны исходный синусоидальный профиль меняется, сначала впадины становятся пологими (кривая 2), далее во впадине появляется промежуточный гребень. По пути распространения промежуточный гребень сглаживается, и происходит укрупнение (увеличение крутизны) переднего фронта основного гребня волны (кривая 3).

При меньшей крутизне укрупнение переднего фронта волны происходит медленнее, то есть для накопления нелинейных эффектов требуются большие расстояния. Увеличение значения крутизны волны приводит к усилению нелинейности, и поверхностная волна быстрее приходит к укрупнению переднего фронта. Укрупнение переднего фронта гребня поверхностной волны связано с влиянием нелинейного члена уравнений мелкой воды. При подходе к берегу из-за трения о дно гребень волны движется быстрее впадины. В момент, когда гребень волны догоняет подошву, передний склон волны становится отвесным, и наблюдается обрушение волны.

Для более детального слежения за процессом укрупнения переднего фронта волны на рисунке 2 приведено поэтапное искажение профиля поверхностной волны с параметрами: частота $f = 0,045$ Гц; длина $\lambda = 49,2$ м; глубина водоёма $H = 0,5$ м; $c = 2,2$ м/с; $kH = 0,6$; $2a/\lambda = 0,0073$; $\varepsilon = 0,4$. Представленные зависимости соответствуют разным моментам времени. Число точек сетки составляет $n = 1000$; количество узлов на длину волны 492, значение шага по пространству $h_x = 0,1$ м.

Азовское море и его подводный рельеф сформировались в условиях погружения Азово-Кубанской впадины. Азовское море относится к типу внутренних морей, имеет сравнительно простые очертания, относительно однообразные берега и довольно несложный рельеф дна. Море преимущественно окружено абразионными и аккумулятивными береговыми формами. Пологое побережье переходит в ровное и плоское дно. Самые большие глубины находятся в центральной части моря. Наибольшая глубина Азовского моря составляет 14 м, а средняя глубина — около 8 м [20].

В начале пути распространения (кривая 1) гребень поверхностной волны является синусоидальным, далее впадина волны начинает отставать и передвигается к последующему гребню (кривая 2). Это приводит к укрупнению переднего фронта гребней (кривая 4) (Рис. 2). Когда передний фронт станет отвесным, волна начнет обрушаться. Искажения профиля поверхностной волны обусловлены влиянием глубины.

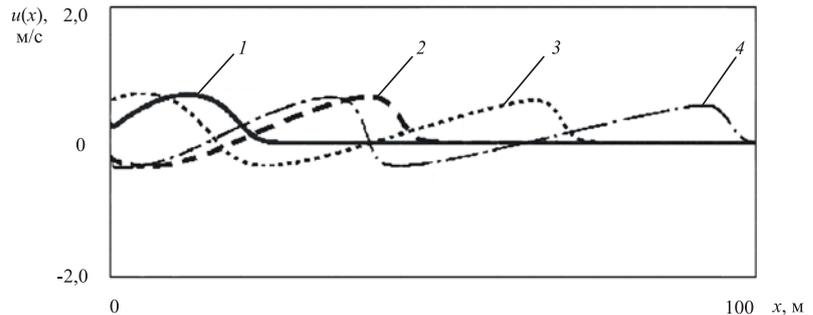


Рис. 2. Постепенное искажение профиля поверхностной гравитационной волны в зависимости от времени t , с: 9,9 (кривая 1); 19,9 (2); 29,9 (3); 39,9 (4)

4. Анализ результатов

Для проверки достоверности разработанной модели сравним полученные результаты с данными лабораторных и численных экспериментов. В статье [24] представлена установка, а также результаты лабораторного эксперимента по распространению поверхностной волны над ступенчатым горизонтальным дном с наклонными подъемами разной крутизны. Работа [6] посвящена численным и экспериментальным исследованиям влияния затопленного волнореза на распространение поверхностной волны. Двумерная конечно-разностная численная модель создана на основе уравнения Навье–Стокса. Для сравнения воспользуемся экспериментальными и численными профилями поверхностных волн, представленными в [6]: длина лабораторного бассейна 30 м, ширина 0,7 м, глубина 0,95 м, периоды волн $T = 0,8; 1,2; 1,68$ с; $2a/\lambda = 0,03$; $H/\lambda = 0,2$.

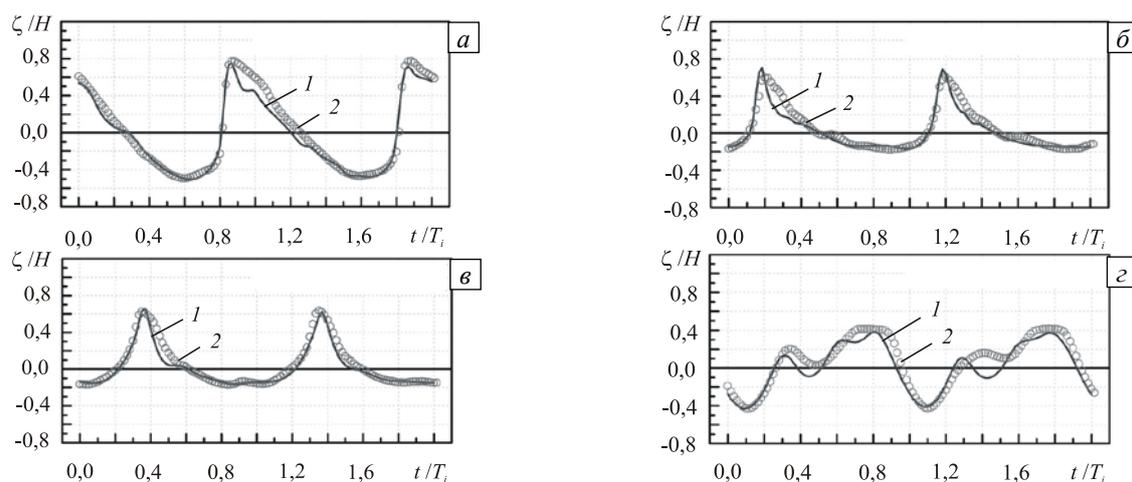


Рис. 3. Расчетные (кривые 1) и экспериментальные (кривые 2) профили поверхностной волны (берег водоёма слева) [6]: в начале волнореза ($x/\lambda = 0,1$) (а); над волнорезом ($x/\lambda = 0,3$) (б); над волнорезом ($x/\lambda = 0,4$) (в); за волнорезом ($x/\lambda = 0,7$) (г)

На рисунке 3 представлены результаты численного моделирования и экспериментальные профили поверхностной волны, взятые из работы [6], на разных этапах распространения. Из их сравнения с авторскими результатами (Рис. 1 и 2) следует:

- у начала волнореза экспериментальные профили поверхностных волн начинают искажаться из-за уменьшения глубины; передний фронт гребня укрупняется, впадины сглаживаются (Рис. 3, а, б);
- при дальнейшем распространении волны над волнорезом гребни заостряются; во впадине появляется промежуточный гребень (Рис. 3, в);
- поверхностная волна (из-за влияния глубины) в дальнейшем из синусоидальной преобразуется в нелинейную с крутым передним фронтом (Рис. 2, кривая 4) как в начальной стадии экспериментального пути (Рис. 3, а);
- увеличение начальной крутизны приводит в авторской модели к появлению промежуточного гребня во впадине (Рис. 1, кривая 3), что соответствует экспериментальному профилю (Рис. 3, в);
- за волнорезом глубина увеличивается, и из-за дисперсии гребни волны рассыпаются. Эта стадия трансформации профиля волны уже не описывается уравнениями мелкой воды. Следует отметить также, что первичные процессы заострения гребней и последующее укрупнение их переднего фронта были описаны приближенными аналитическими выражениями в работе [25].

Проведенный анализ свидетельствует, что результаты численного моделирования нелинейных поверхностных гравитационных волн на основе уравнений мелкой воды в целом имеют хорошее совпадение с экспериментальными измерениями и численными результатами других авторов.

Автор выражает благодарность рецензентам статьи за ценные замечания.

Литература

1. *Chapalain G., Cointe R., Temperville A.* Observed and modeled resonantly interacting progressive water-waves // *Coastal Eng.* – 1992. – V. 16, N. 3. – P. 267-300. DOI
2. *Eldeberky Y., Madsen P.A.* Deterministic and stochastic evolution equations for fully dispersive and weakly nonlinear waves // *Coastal Eng.* – 1999. – V. 38, N. 1. – P. 1-24. DOI
3. *Коган В.Р., Кузнецов В.В.* Применение теории аналитических функций в численном моделировании нестационарных поверхностных волн // *ЖВМиМФ.* – 1995. – Т. 35, № 9. – С. 1448-1456.
4. *Литвиненко А.А., Хабахпаишев Г.А.* Численное моделирование нелинейных достаточно длинных двумерных волн на воде в бассейнах с пологим дном // *ЖВТ.* – 1999. – Т. 4, № 3. – С. 95-105.
5. *Elgar S., Norheim C.A., Herbers T.H.* Nonlinear evolution of surface wave spectra on a beach // *J. Phys. Oceanogr.* – 1998. – V. 28, N. 7. – P. 1534-1551. DOI
6. *Kawasaki K.* Numerical simulation of breaking and post-breaking wave deformation process around a submerged breakwater // *Coastal Eng. J.* – 1999. – V. 41, N. 3&4. – P. 201-223. DOI
7. *Федотова З.И.* Об одной системе нелинейно-дисперсионных уравнений гидродинамики с полезным свойством // *ЖВТ.* – 2004. – Т. 9, № 6. – С. 82-88.
8. *Борисова Н.М., Остапенко В.В.* О численном моделировании процесса распространения прерывных волн по сухому руслу // *ЖВМиМФ.* – 2006. – Т. 46, № 7. – С. 1322-1345.
9. *Delis A., Skeels C.P.* TVD schemes for open channel flow // *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* – 1998. – V. 26, N. 7. – P. 791-809. DOI
10. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: Физматлит, 2001. – 608 с.
11. *Аристов С.Н., Фрик П.Г.* Нелинейные эффекты влияния экмановского слоя на динамику крупномасштабных вихрей в «мелкой воде» // *ПМТФ.* – 1991. – № 2. – С. 49-54.
12. *Аббасов И.Б.* Моделирование нелинейных волновых явлений на поверхности мелководья. – М.: Физматлит, 2010. – 128 с.
13. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977. – 622 с.
14. *Габов С.А.* Введение в теорию нелинейных волн. – М.: Изд-во МГУ, 1988. – 176 с.
15. *Яненко Н.Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 1967. – 196 с.
16. *Вольцингер Н.Е., Пяковский Р.В.* Теория мелкой воды. Океанологические задачи и численные методы. – Л.: Гидрометеониздат, 1977. – 207 с.
17. *Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 421 с.
18. *Самарский А.А.* Введение в численные методы. Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука, 1987. – 288 с.
19. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 636 с.
20. *Гидрометеорология и гидрохимия морей СССР. Проект «Моря СССР».* Т. V. Азовское море / Под ред. Н.П. Гоптарева и др. – СПб.: Гидрометеониздат, 1991. – С. 75-88.
21. *Мамыкина В.А., Хрусталева Ю.П.* Береговая зона Азовского моря. – Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1980. – 176 с.
22. *Шлямин Б.А.* Волнение на Азовском море // *Труды ГОИН* – 1977. – Т.16. – С. 45-47.
23. *Динамика русловых потоков и литодинамика прибрежной зоны моря / Под ред. В.К. Дебольского.* – М.: Наука, 1994. – 304 с.
24. *Goda Y., Morinobu K.* Breaking wave heights on horizontal bed affected by approach slope // *Coastal Eng. J.* – 1998. – V. 40, N. 4. – P. 307-326. DOI
25. *Аббасов И.Б.* Исследование и моделирование нелинейных поверхностных гравитационных волн на мелководье // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* – 2003. – Т. 39, № 4. – С. 568-573.

Поступила в редакцию 10.06.11; опубликована в электронном виде 11.04.12