

УДК 532.546

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ ТЕНЗОРОВ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРОНИЦАЕМОСТИ НЕОДНОРОДНОГО АНИЗОТРОПНОГО ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОГО ПЛАСТА

Д.А. Губайдуллин, А.И. Никифоров, Р.В. Садовников

*Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Казань, Россия*

Предложен метод решения обратной задачи идентификации тензоров коэффициентов проницаемости неоднородного анизотропного трещиновато-пористого пласта по результатам экспериментальных гидродинамических исследований системы скважин. Для решения обратной задачи применяются параллельные вычисления на многопроцессорном кластере с распределенной памятью.

*Ключевые слова:* обратные задачи, идентификация, анизотропия, тензор проницаемости, фильтрация в пористых средах, параллельные вычисления

## IDENTIFICATION OF PERMEABILITY TENSORS OF A HETEROGENEOUS ANISOTROPIC FRACTURED POROUS RESERVOIR

D.A. Gubaidullin, A.I. Nikiforov and R.V. Sadovnikov

*Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Science Center RAS, Kazan, Russia*

A method for identification of the permeability tensors of a heterogeneous anisotropic fractured porous reservoir from the results of hydrodynamic well tests is proposed. Parallel computations on distributed memory multiprocessors are made for the solution of the inverse problem.

*Key words:* inverse problems, identification, anisotropy, permeability tensor, filtration in porous media, parallel computations

### 1. Введение

Продуктивные нефтяные и газовые пласты являются породами-коллекторами, то есть они содержат в себе углеводороды, способные двигаться под действием некоторого перепада давления. В реальных условиях коллекторы, как правило, обладают анизотропией фильтрационных свойств, которая может быть обусловлена послойной неоднородностью и разного рода включениями, появляющимися в результате процессов осадконакопления, а также развитием и формированием системы трещин определенной направленности вследствие различных тектонических процессов. Поэтому практика эксплуатации месторождений требует учета не только неоднородности коллекторских свойств пласта, но и тензорной природы его коэффициента проницаемости. Традиционный учет анизотропии пласта предполагает, что направления главных осей тензора коэффициента проницаемости точно известны. Однако для большинства реальных залежей указанное условие не выполняется, и в общем случае традиционный подход не пригоден для оценки продуктивных характеристик реальных пластов. Особенно это касается карбонатных коллекторов, отличающихся трещиновато-пористым строением [1]. При этом тензоры коэффициентов проницаемости трещин и блоков породы могут значительно отличаться как значением компонент, так и направлением главных осей. Такая «вложенная» анизотропия коэффициентов проницаемости трещиновато-пористого пласта в настоящее время практически не исследована.

Это объясняется тем, что значения компонент тензоров коэффициентов проницаемости трещин и блоков не могут быть измерены непосредственно.

Для вычисления тензора коэффициента проницаемости требуется решение обратной задачи, то есть задачи идентификации параметров пласта на основе данных об эксплуатации скважин, которые несут в себе информацию о коллекторских свойствах пласта. Решение задачи идентификации сводится к минимизации функционала невязки между наблюдаемыми и вычисленными давлениями в скважинах. Такие задачи, как известно, являются некорректными, то есть малое изменение входных параметров может приводить к значительным изменениям в решении [2].

Методам идентификации фильтрационных параметров пласта посвящено достаточно большое количество публикаций. Чтобы составить представление о состоянии этих исследований и их актуальности, можно обратиться к обзору обратных задач, сделанному в [3], а также к монографии, посвященной проблемам прогнозирования, анализа и регулирования разработки месторождений нефти и газа [4]. Среди методов идентификации выделяют два основных вида: методы, основанные на анализе коэффициентов чувствительности, и методы теории оптимального управления. В методах первого вида коэффициенты чувствительности используются для приближенного вычисления матрицы вторых производных от функционала–невязки [3]. В методах теории оптимального управления для поиска параметров используется градиент функционала невязки, который находится из решения сопряженной системы уравнений [3, 4].

Вследствие сложности решения обратных задач идентификации коллекторских свойств пласта с учетом тензорной природы коэффициента проницаемости на основе фактических данных эксплуатации системы скважин целесообразно применение параллельных вычислений на многопроцессорной ЭВМ. В данной работе для реализации алгоритма идентификации фильтрационных параметров применяются параллельные вычисления.

## 2. Постановка обратной задачи

Обратная задача состоит в определении параметров пласта, при которых минимизируется следующий функционал:

$$\min_{\mathbf{b} \in D_b} E(\mathbf{b}), \quad E(\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{N_w} \int_0^{T_i} (p_i^h(t) - p_i^g(\mathbf{b}, t))^2 dt.$$

Здесь  $\mathbf{b} = \{b_i\}_{i=1}^N$  — вектор искоемых параметров, где  $N$  — их число;  $D_b$  — множество допустимых значений параметров;  $N_w$  — количество скважин в пласте;  $T_i$  — общее время исследования  $i$ -й скважины;  $p_i^h$  и  $p_i^g$  — значения забойного (на забое  $i$ -й скважины) давления, замеренное в результате промышленного эксперимента на момент времени  $t$  и на тот же момент времени вычисленное в результате решения трехмерной задачи фильтрации в трещиновато-пористом пласте.

Используя формулу трапеций, функционал можно представить в виде:

$$E(\mathbf{b}) \cong \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_w} \mathbf{f}_i^T \mathbf{W}_i \mathbf{f}_i = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{T} \mathbf{F}. \quad (1)$$

где  $\mathbf{T} = \text{diag}\{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots, \mathbf{W}_{N_w}\}$  — диагональная матрица, элементы которой  $\mathbf{W}_i = \text{diag}\{\Delta t_{i1}, \Delta t_{i1} + \Delta t_{i2}, \dots, \Delta t_{iN_{T_i}}\}$  также являются диагональными матрицами, зависящими от временных шагов;  $\mathbf{F} = \{\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{N_w}\}^T$  — вектор невязок давлений в скважинах,

$\mathbf{f}_i = \{f_{i1}, f_{i2}, \dots, f_{iN_{T_i}}\}^T$  — изменение невязки давления с течением времени в  $i$ -й скважине,  $f_{in} = p_i^H(t_n) - p_i^G(\mathbf{b}, t_n)$  — невязка давления и  $N_{T_i}$  — количество замеров давления в  $i$ -й скважине.  $T$  — знак операции транспонирования.

В данной работе используется модель фильтрации однофазной жидкости в упругом трещиновато-пористом пласте, основанная на концепции взаимопроникающих континуумов (система трещин и блоков) с учётом обмена жидкостью между ними [5]. Эта модель с учётом анизотропии коэффициентов проницаемости как системы трещин, так и блоков породы описывается следующей системой уравнений:

$$\beta_1^* \frac{\partial p_1}{\partial t} = \nabla \left( \frac{\mathbf{k}_1}{\mu} \nabla p_1 \right) + \frac{\alpha}{\mu} (p_2 - p_1), \quad \beta_2^* \frac{\partial p_2}{\partial t} = \nabla \left( \frac{\mathbf{k}_2}{\mu} \nabla p_2 \right) - \frac{\alpha}{\mu} (p_2 - p_1), \quad (2)$$

где  $(x, y, z) \in D$ ,  $D$  — область фильтрации;  $0 < t \leq T$ ,  $t$  — время,  $T = \max_{1 \leq i \leq N_w} T_i$  — общее время исследований;  $\beta_l^* = \beta_{ckl} + m_l \beta_{жк}$  — коэффициент упругоёмкости ( $\beta_{ckl}$ ,  $m_l$ ,  $\beta_{жк}$  — коэффициенты сжимаемости скелета, пористости, сжимаемости жидкости соответственно);  $p_l$  — давление жидкости;  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости жидкости;  $\alpha$  — параметр перетока жидкости между трещинами и блоками;  $\mathbf{k}_l$  — тензор коэффициента проницаемости. Индекс  $l=1, 2$ , при этом 1 относится к трещинам, 2 — к блокам.

Областью фильтрации  $D$  является многосвязная область, внутренние поверхности которой образуют скважины, представляющие собой цилиндрическую полость с определенными радиусом и траекторией ствола. Рассматриваются скважины с вертикальной, наклонной, горизонтальной и другой траекторией.

На забоях скважин могут задаваться граничные условия первого или второго рода:

$$p_1(x, y, z, t) = p_2(x, y, z, t) = p_{wi}(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (x, y, z) \in \partial S_i^p \quad (i=1, 2, \dots, N_w^p), \quad (3)$$

$$\left( \frac{\mathbf{k}_1}{\mu} \nabla p_1, \mathbf{n}_j \right) + \left( \frac{\mathbf{k}_2}{\mu} \nabla p_2, \mathbf{n}_j \right) = q_j(x, y, z, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (x, y, z) \in \partial S_j^q \quad (j=1, 2, \dots, N_w^q), \quad (4)$$

где  $p_{wi}(t)$  — давление на поверхности скважины  $\partial S_i^p$ ;  $N_w^p$  — количество скважин;  $q_j$  — объемный расход жидкости, приходящийся на единицу поверхности скважины  $\partial S_j^q$ ;  $N_w^q$  — количество скважин;  $\mathbf{n}_j$  — вектор внешней нормали. Символ  $(\bullet, \bullet)$  обозначает скалярное произведение векторов. Граничные условия на внешней поверхности пласта также могут быть условиями первого или второго рода:

$$p_1(x, y, z, t) = p_2(x, y, z, t) = p_{npj}(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in \partial D_j^p \quad (j=1, 2, \dots, N^p), \quad (5)$$

$$\left( \frac{\mathbf{k}_1}{\mu} \nabla p_1, \mathbf{n}_j \right) + \left( \frac{\mathbf{k}_2}{\mu} \nabla p_2, \mathbf{n}_j \right) = q_j^*(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in \partial D_j^q \quad (j=1, 2, \dots, N^q), \quad (6)$$

где  $p_{npj}$  — давление жидкости на части внешней поверхности пласта  $\partial D_j^p$ ;  $q_j^*$  — объемный расход жидкости, приходящийся на единицу внешней поверхности пласта  $\partial D_j^q$ ;  $N^p$  и  $N^q$  — количество частей внешней поверхности пласта, на которых задано граничное условие 1-го и 2-го рода соответственно;  $\partial D = \partial D^p \cup \partial D^q$  — внешняя

поверхность пласта;  $\partial D^p = \bigcup_{j=1}^{N^p} \partial D_j^p$ ;  $\partial D^q = \bigcup_{j=1}^{N^q} \partial D_j^q$ .

Начальные условия имеют вид:

$$p_1(x, y, z, 0) = p_1(x, y, z), \quad p_2(x, y, z, 0) = p_2(x, y, z), \quad (x, y, z) \in D. \quad (7)$$

Объемный дебит (производительность) скважины вычисляется по формуле:

$$\int_{\partial S_j^q} q_j(x, y, z, t) ds = Q_j(t) \quad (j=1, 2, \dots, N_w^q). \quad (8)$$

Для получения значения забойного давления в скважине используются дополнительные условия: равенство давления в трещинах и блоках породы на поверхности скважины

$$p_1(x, y, z, t) = p_2(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in \partial S_j^q \quad (j=1, 2, \dots, N_w^q) \quad (9)$$

и постоянство давления на поверхности скважины. Эти два условия в сочетании с формулой (8) позволяют записать для скважины, у которой задан объемный расход, дополнительное уравнение для определения забойного давления. Следует отметить, что при условии постоянства забойного давления на поверхности скважины движение жидкости в стволе скважины не принимается во внимание.

Уравнения (2) составляют основную систему уравнений, описывающую фильтрацию слабосжимаемой жидкости в упругом трещиновато-пористом пласте с развитой трещиноватостью. Из этой системы можно получить уравнения с учетом других упрощающих предположений. Например, авторами работы [6] построены уравнения при пренебрежении фильтрационным потоком жидкости в блоках вследствие их малой проницаемости. Для среды с пренебрежимо малой проницаемостью блоков и пористостью трещин (когда жидкость поступает в пласт главным образом из блоков, а перемещается по трещинам) система (2) сведена к одному уравнению [5].

Искомые коэффициентами, от которых зависит решение обратной задачи, являются компоненты тензоров коэффициентов проницаемости трещин (индекс 1) и блоков (индекс 2), то есть вектор искомых параметров имеет вид:

$$\mathbf{b} = \{\mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2\} = \{k_{1xx}, k_{1xy}, \dots, k_{1zz}; k_{2xx}, k_{2xy}, \dots, k_{2zz}\}.$$

Постановка и решение обратной задачи идентификации фильтрационных параметров в круговом трещиновато-пористом пласте с одиночной скважиной рассматривались в [7], но без учета анизотропии.

### 3. Решение обратной задачи

Решение обратной задачи осуществляется методом Левенберга–Марквардта, который является модификацией метода Гаусса–Ньютона [3]. В используемом методе итерационная последовательность для уточнения вектора искомых переменных строится в виде:

$$\mathbf{b}_{n+1} = \mathbf{b}_n - (\mathbf{A}_n^T \mathbf{T} \mathbf{A}_n + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}_n^T \mathbf{T} \mathbf{F}_n, \quad (10)$$

где  $\lambda$  — некоторый параметр метода,  $\mathbf{A}$  — матрица коэффициентов чувствительности

$$\partial \mathbf{f}_i / \partial b_j : \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \partial \mathbf{f}_1 / \partial b_1 & \partial \mathbf{f}_1 / \partial b_2 & \dots & \partial \mathbf{f}_1 / \partial b_N \\ \partial \mathbf{f}_2 / \partial b_1 & \partial \mathbf{f}_2 / \partial b_2 & \dots & \partial \mathbf{f}_2 / \partial b_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial \mathbf{f}_{N_w} / \partial b_1 & \partial \mathbf{f}_{N_w} / \partial b_2 & \dots & \partial \mathbf{f}_{N_w} / \partial b_N \end{bmatrix}. \quad \text{Для вычисления коэффициентов}$$

чувствительности применяется метод непосредственного дифференцирования по искомым переменным уравнений прямой задачи (2)–(7). В результате задача определения коэффициентов чувствительности сводится к следующим соотношениям (при этом  $0 < t \leq T$ ,  $(x, y, z) \in D$ ):

$$\begin{aligned} \beta_1^* \frac{\partial u_{1k}}{\partial t} &= \nabla \left( \frac{\mathbf{k}_1}{\mu} \nabla u_{1k} \right) + \frac{\alpha}{\mu} (u_{2k} - u_{1k}) - \frac{\partial \beta_1^*}{\partial b_k} \frac{\partial p_1}{\partial t} + \nabla \left( \frac{\partial \mathbf{k}_1}{\partial b_k} \frac{\nabla p_1}{\mu} \right) + \frac{\partial \alpha}{\partial b_k} \frac{(p_2 - p_1)}{\mu}, \\ \beta_2^* \frac{\partial u_{2k}}{\partial t} &= \nabla \left( \frac{\mathbf{k}_2}{\mu} \nabla u_{2k} \right) - \frac{\alpha}{\mu} (u_{2k} - u_{1k}) - \frac{\partial \beta_2^*}{\partial b_k} \frac{\partial p_2}{\partial t} + \nabla \left( \frac{\partial \mathbf{k}_2}{\partial b_k} \frac{\nabla p_2}{\mu} \right) - \frac{\partial \alpha}{\partial b_k} \frac{(p_2 - p_1)}{\mu} \end{aligned} \quad (11)$$

с начальными

$$u_{1k}(x, y, z, 0) = u_{1k}(x, y, z), \quad u_{2k}(x, y, z, 0) = u_{2k}(x, y, z), \quad 0 < t \leq T, \quad (x, y, z) \in D \quad (12)$$

и граничными условиями

$$u_{1k}(x, y, z, t) = u_{2k}(x, y, z, t) = 0, \quad (x, y, z) \in \partial S_i^p, \quad i = 1, 2, \dots, N_w^p, \quad (13)$$

$$\left( \frac{\mathbf{k}_1}{\mu} \nabla u_{1k}, \mathbf{n}_j \right) + \left( \frac{\mathbf{k}_2}{\mu} \nabla u_{2k}, \mathbf{n}_j \right) = - \left( \frac{\partial \mathbf{k}_1}{\partial b_k} \frac{\nabla p_1}{\mu}, \mathbf{n}_j \right) - \left( \frac{\partial \mathbf{k}_2}{\partial b_k} \frac{\nabla p_2}{\mu}, \mathbf{n}_j \right), \quad (14)$$

$$(x, y, z) \in \partial S_j^q, \quad j = 1, 2, \dots, N_w^q,$$

$$u_{1k}(x, y, z, t) = u_{2k}(x, y, z, t) = 0, \quad (x, y, z) \in \partial D_j^p, \quad j = 1, 2, \dots, N^p, \quad (15)$$

$$\left( \frac{\mathbf{k}_1}{\mu} \nabla u_{1k}, \mathbf{n}_j \right) + \left( \frac{\mathbf{k}_2}{\mu} \nabla u_{2k}, \mathbf{n}_j \right) = - \left( \frac{\partial \mathbf{k}_1}{\partial b_k} \frac{\nabla p_1}{\mu}, \mathbf{n}_j \right) - \left( \frac{\partial \mathbf{k}_2}{\partial b_k} \frac{\nabla p_2}{\mu}, \mathbf{n}_j \right), \quad (16)$$

$$(x, y, z) \in \partial D_j^q, \quad j = 1, 2, \dots, N^q.$$

Решая задачу (11)–(16) численным методом, можно получить все коэффициенты чувствительности и сформировать из них матрицу  $\mathbf{A}$ . Поскольку уравнения (11)–(16) и (2)–(7) идентичны, то для их решения можно применить один тот же численный метод.

#### 4. Решение прямой задачи

Для решения задач (2)–(7), (11)–(16) используется метод конечных элементов на неструктурированной сетке, состоящей из тетраэдров, удовлетворяющих критерию Делоне, и сгущающейся к скважинам. Поскольку в каждой точке пласта присутствуют два давления, то каждый узел расчетной области имеет две степени свободы. Аппроксимация уравнений строится методом взвешенных невязок в сочетании с методом Галеркина, а для аппроксимации производной по времени применяется неявная схема [8]. В результате ассемблирования по всем элементам результирующая матрица системы уравнений принимает следующий вид:

$$(2\mathbf{C}/\Delta t_n + \mathbf{K} + \mathbf{A})\mathbf{P}^{n+1} = (2\mathbf{C}/\Delta t_n - \mathbf{K} - \mathbf{A})\mathbf{P}^n - \mathbf{R}^*. \quad (17)$$

Здесь  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$  — шаг времени;  $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix}$  — матрица сжимаемостей,  $\mathbf{C}_i = \sum_{e=1}^E \mathbf{c}_i$ ,

$\mathbf{c}_i = \int_{V^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \beta_i d\tau$ ,  $V^{(e)}$  — объем конечного элемента,  $E$  — количество элементов,  $i=1,2$ ;

$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix}$  — матрица проводимостей,  $\mathbf{K}_i = \sum_{e=1}^E \boldsymbol{\sigma}_i$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_i = \int_{V^{(e)}} \nabla \mathbf{N}^T (\mathbf{k}_i/\mu) \nabla \mathbf{N} d\tau$ ,  $i=1,2$ ;

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\alpha & -\mathbf{A}_\alpha \\ -\mathbf{A}_\alpha & \mathbf{A}_\alpha \end{bmatrix}$  — матрица перетоков,  $\mathbf{A}_\alpha = \sum_{e=1}^E \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{a} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \alpha/\mu d\tau$ ,  $\mathbf{N}$  — линейные

функции формы элемента;  $\mathbf{P} = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\}^T$  — вектор давлений,  $\mathbf{R}^* = \{\mathbf{r}_1^*, \mathbf{r}_2^*\}^T$  — вектор правой части,  $\mathbf{r}_i^* = 0,5(\mathbf{r}_i^{n+1} + \mathbf{r}_i^n)$ ,  $i=1,2$ .

После учета граничных условий матрица результирующей системы уравнений получается несимметричной и имеет разреженную структуру. Вместо хранения всех  $2 \times n$  элементов матрицы ( $n$  — количество узлов расчетной сетки) учитываются только ненулевые элементы. Однако при большом числе узлов сетки требующиеся ресурсы памяти и процессорного времени могут быть критичными для расчетов на одном процессоре. Поэтому для проведения расчетов за приемлемое время возникает необходимость в применении параллельных вычислений на многопроцессорных вычислительных системах.

Аппроксимация задачи для коэффициентов чувствительности (11)–(16) строится аналогично, и результирующая матрица системы обладает такой же структурой.

## 5. Применение параллельных вычислений

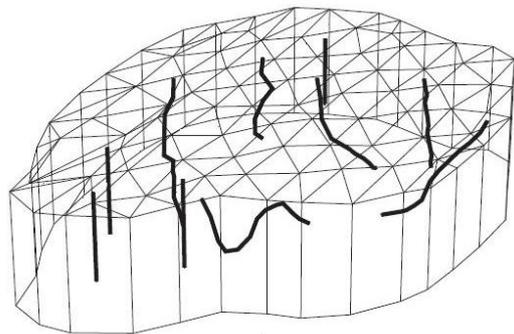
Сложность реализации решения обратной задачи идентификации заключается в том, что на каждом шаге итерационной последовательности (10) для вычисления матрицы коэффициентов чувствительности требуется решить задачу (11)–(16) для каждого из  $N$  идентифицируемых параметров и один раз решить прямую задачу (2)–(7), чтобы получить новое значение функционала (1). Таким образом, на каждом шаге итерационного метода необходимо решить  $N+1$  задачу. В более общей формулировке обратной задачи, то есть при условии, что значения тензоров непрерывно изменяются по пласту (в каждой точке пласта существует свое значение тензоров коэффициента проницаемости трещин и блоков), количество решаемых на каждой итерации задач еще увеличивается и требует использования все более высокопроизводительных многопроцессорных систем. Однако в этих задачах возможна параметризация, которая уменьшает количество оцениваемых параметров и позволяет учитывать зональную неоднородность тензоров коэффициентов проницаемости.

Для решения подобных задач за приемлемое время невозможно обойтись без методов параллельного программирования, основанных на геометрической декомпозиции расчетной области на подобласти, число которых равняется числу доступных процессоров. В ранее опубликованной работе авторов [9] подробно обсуждаются вопросы применения параллельных вычислений в решении задачи фильтрации жидкости к скважинам со сложной траекторией ствола (вертикальным, наклонным, горизонтальным и другим) в трещиновато-пористом пласте произвольной конфигурации с «вложенной анизотропией» коэффициентов проницаемости. Там рассматриваются этапы получения численного решения задачи на многопроцессорной вычислительной системе и способ аппроксимации скважин. Исследуется производительность параллельных вычислений в зависимости от количества процессоров.

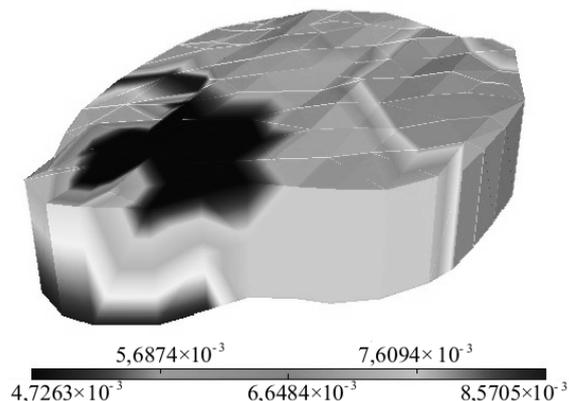
## 6. Численные результаты

Расчеты проводились на вычислительном кластере с параллельной архитектурой МКВС-E112, установленном в Институте механики и машиностроения КазНЦ РАН. Кластер состоит из 4 модулей. Каждый модуль оснащен двумя процессорами AMD Opteron 246 2.0 ГГц и 2 Гб оперативной памяти. На модулях и основной управляющей ЭВМ, которая одновременно выполняет функции сервера доступа, установлена свободно распространяемая операционная система Linux Fedore Core 2.0. Выполнение параллельных задач обеспечивает система управления прохождением задач MBS-1000/7.

Схема исследуемого пласта и расположение 10 скважин представлены на рисунке 1. В расчетах использовались следующие данные: параллелепипед, описанный вокруг пласта, имел размеры  $2000 \times 1566 \times 500$  м; на боковой поверхности пласта задавалось давление  $p_{nl} = 10,0$  МПа; вязкость нефти  $\mu = 25$  МПа·с; кровля и подошва пласта считались непроницаемыми. Траектория каждой из скважин описывалась координатами точек ее оси. Радиусы всех скважин были одинаковыми — 0,1 м.



**Рис. 1.** Схема пласта и расположение скважин



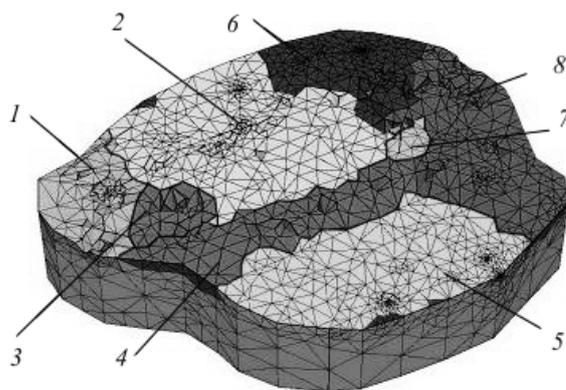
**Рис. 2.** Зоны однородности тензора коэффициентов проницаемости в пласте

Время работы скважин до остановки составляло  $T = 8,64 \cdot 10^5$  с. Объемные дебиты скважин были следующими:  $Q_1 = 2,479 \cdot 10^{-4}$  м<sup>3</sup>/с,  $Q_2 = 3,380 \cdot 10^{-4}$  м<sup>3</sup>/с,  $Q_3 = 2,720 \cdot 10^{-4}$  м<sup>3</sup>/с,  $Q_4 = 3,993 \cdot 10^{-4}$  м<sup>3</sup>/с,  $Q_5 = 5,122 \cdot 10^{-4}$  м<sup>3</sup>/с,  $Q_6 = 6,216 \cdot 10^{-4}$  м<sup>3</sup>/с,  $Q_7 = 4,653 \cdot 10^{-4}$  м<sup>3</sup>/с,  $Q_8 = 3,970 \cdot 10^{-4}$  м<sup>3</sup>/с,  $Q_9 = 4,074 \cdot 10^{-4}$  м<sup>3</sup>/с,  $Q_{10} = 3,681 \cdot 10^{-4}$  м<sup>3</sup>/с.

Пласт разбивался на восемь зон однородности, в каждой из которых задавались параметры: коэффициент перетока  $\alpha = 10^{-18}$ ; коэффициенты сжимаемости, соответственно, жидкости  $\beta_{жс} = 10^{-7}$  МПа<sup>-1</sup>, трещин  $\beta_{ск1} = 10^{-4}$  МПа<sup>-1</sup> и блоков  $\beta_{ск2} = 10^{-6}$  МПа<sup>-1</sup>; коэффициенты пористости  $m_1 = 0,01$ ,  $m_2 = 0,2$ . Компоненты тензоров коэффициентов проницаемости системы трещин и блоков задавались в каждой из зон (расположение зон представлено на рисунке 2). Общее количество идентифицируемых компонентов тензоров во всех восьми зонах равнялось 144.

### 6.1. Результаты решения прямой задачи

Система алгебраических уравнений (17) на каждом временном слое решалась методами подпространств Крылова, реализованными в библиотеке Aztec [10] с полиномиальным предобуславливанием согласно методу наименьших квадратов и методу Неймана, а также масштабированием матрицы исходной системы уравнений. Все применяемые итерационные процедуры прерывались по достижении невязки заданного уровня точности  $10^{-6}$ . Общее время решения задачи складывалось из временных затрат на решение системы уравнений (17) на каждом шаге по времени.



**Рис. 3.** Сетка расчетной области и ее разделение на подобласти

Расчеты проводились на сетке с 761730 узлами. Количество тетраэдров сетки составляло 4263344 элементов, количество ненулевых элементов матрицы системы — 46340996. Поскольку каждый узел имеет две степени свободы (в каждом узле два давления жидкости), то количество неизвестных равнялось 1523460. На рисунке 3 представлена сетка, которой покрывалась расчетная область, разделенная на 8 подобластей.

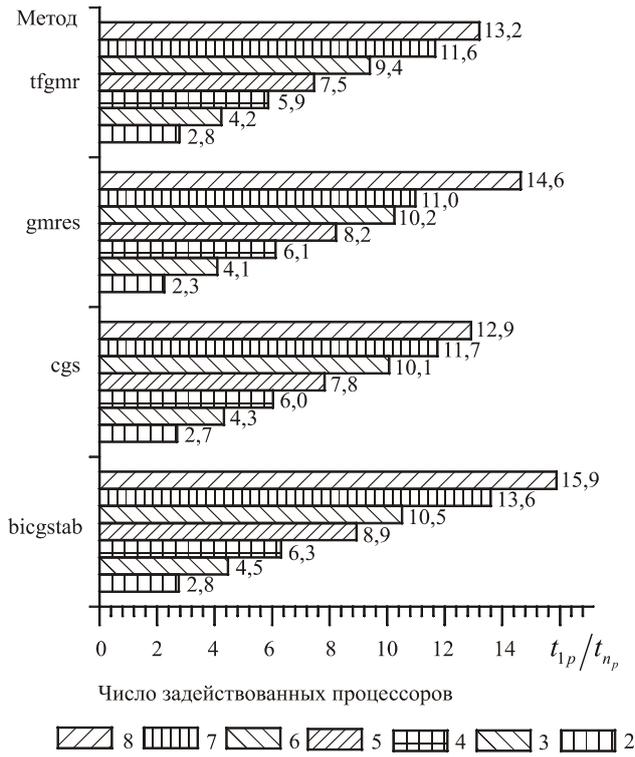


Рис. 4. Ускорение вычислений

На рисунке 4 приведены графики ускорений параллельных вычислений при использовании четырех итерационных методов с полиномиальным предобуславливанием рядами Неймана. Ускорение рассчитывалось делением времени решения на одном процессоре  $t_1$  на время решения на  $n_p$  процессорах  $t_{n_p} : t_1/t_{n_p}$ . Из представленных на рисунке результатов видно, что вычисления на восьми процессорах позволяют сократить время почти в 13–16 раз (в зависимости от выбранного итерационного метода) по сравнению со временем вычислений на одном процессоре [9]. При этом время решения прямой задачи, например, методом bicgstab с полиномиальным предобуславливанием рядами Неймана сокращается с 4,4 часов

(при одном задействованном процессоре) до 16,6 минут (при восьми процессорах). Более подробно этот вопрос исследовался в работе [9].

6.2. Результаты решения обратной задачи

Для тестирования описанного в разделе 3 алгоритма решения обратной задачи проводились численные эксперименты на модельных задачах. Для получения

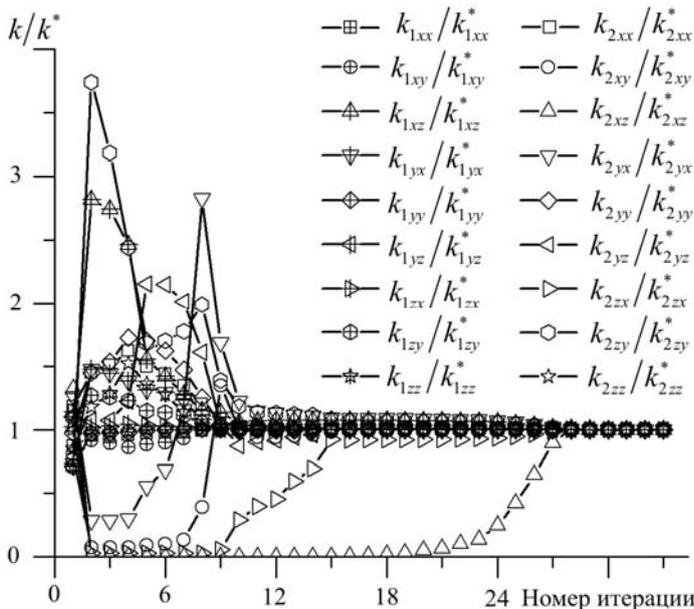


Рис. 5. Сходимость метода Левенберга–Марквардта при начальной погрешности в параметрах  $1 \div 35\%$  ( $k^*$  – истинное значение проницаемости)

наблюдаемых значений давлений на забоях скважин (кривых восстановления/падения давления после пуска или остановки скважин или изменения давления при работе скважин с заданным расходом) задавались истинные значения тензоров коэффициентов проницаемости трещин и блоков в каждой из зон однородности, и решалась прямая задача (2)–(7). Затем истинные значения тензоров «забывались», то есть брались произвольные начальные значения тензоров (с помощью датчика случайных чисел) и решалась обратная задача. Результаты оценки значений тензоров коэффициентов проницаемости трещин и блоков

для одной из зон однородности приведены на рисунке 5. Как видно, вычисленные значения параметров хорошо соотносятся с истинными значениями.

## 7. Заключение

В данной работе представлены результаты решения обратной задачи идентификации значений тензоров коэффициентов проницаемости трещин и блоков породы неоднородного анизотропного трещиновато-пористого пласта. Рассмотрены этапы численного решения задачи идентификации фильтрационных параметров пласта на многопроцессорной вычислительной системе. Исследована производительность параллельных вычислений в зависимости от количества процессоров. На модельных задачах изучено влияние начального отклонения искомых параметров на решение задачи идентификации.

Применение данного подхода к идентификации тензоров коэффициентов проницаемости на основе фактических данных эксплуатации системы скважин может служить основой для определения главных значений и направлений главных осей тензоров коэффициентов проницаемости трещин и блоков в продуктивных нефтяных и газовых пластах.

Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН №14 «Интеллектуальные информационные технологии, математическое моделирование, системный анализ и автоматизация».

## Литература

1. *Дмитриев Н.М., Максимов В.М.* Модели фильтрации в трещиновато-пористых анизотропных средах // Изв. РАН. МЖГ. – 2007. – № 6. – С. 78-84.
2. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 285 с.
3. *Sun N. Z.* Inverse problems in groundwater modeling. – Norvell: Kluwer Acad., 1994. – 337 p.
4. *Закиров Э.С.* Трехмерные многофазные задачи прогнозирования, анализа и регулирования разработки месторождений нефти и газа. – М.: Грааль, 2001. – 302 с.
5. *Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.М.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // ПММ. – 1960. – Т. 123, № 3. – С. 852-864.
6. *Warren J.E., Root P.J.* The behavior of naturally fractured reservoirs // Society of Petroleum Engineers Journal – 1963. – V. 3, N. 3. – P. 245-255.
7. *Садовников Р.В.* Идентификация фильтрационных и ёмкостных параметров трещиновато-пористого пласта // Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 15-летию ИММ КазНЦ РАН. Казань: КГУ, 2006. – С.179-188.
8. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The finite element method. Volume 1: The basis. – Butterworth–Heinemann, 2000. – 708 p.
9. *Губайдуллин Д.А., Садовников Р.В.* Применение параллельных алгоритмов для решения задачи фильтрации жидкости в трещиновато-пористом пласте к скважинам со сложной траекторией // Вычислительные методы и программирование. – 2007. – Т. 8, № 2. – С. 244-251.
10. *Aztec.* A massively parallel iterative solver library for solving sparse linear systems. – <http://www.cs.sandia.gov/CRF/aztec1.html> (дата обращения: 30.03.2006).

Поступила в редакцию 22.12.10

---

### Сведения об авторах

*Губайдуллин Дамир Анварович*, дфмн, член-корр. РАН, дир., Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН (ИММ КазНЦ РАН), Россия, 420111, г. Казань, ул. Лобачевского, д. 2/31; E-mail: [gubajdullin@mail.knc.ru](mailto:gubajdullin@mail.knc.ru)

*Никифоров Анатолий Иванович*, дфмн, зав.лаб., ИММ КазНЦ РАН; E-mail: [nikiforov@mail.knc.ru](mailto:nikiforov@mail.knc.ru)

*Садовников Роман Валерьевич*, ктн, снс, ИММ КазНЦ РАН; E-mail: [sadovnikov@mail.knc.ru](mailto:sadovnikov@mail.knc.ru)