

УДК 532.51

## ТЕЧЕНИЯ, ИНДУЦИРУЕМЫЕ КОЛЕБАНИЯМИ НАГРЕТОЙ СФЕРЫ

Т.П. Любимова, А.А. Черепанова

*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия*

Исследованы течения, индуцируемые линейно-поляризованными поступательными вибрациями нагретой сферы в несжимаемой жидкости, плотность которой не зависит от давления и меняется с температурой по линейному закону. Жидкость ограничена неподвижной сферической оболочкой, система находится в поле силы тяжести. Аналитически найдены поля функции тока и температуры в режиме ползущего течения. Численно, методом конечных разностей определены зависимости характеристик нелинейных режимов конвекции от параметров задачи.

*Ключевые слова:* вибрации, конвекция, нелинейные режимы течения, сферическая полость

## FLOWS INDUCED BY OSCILLATIONS OF A HEATED SPHERE

T.P. Lyubimova and A.A. Cherepanova

*Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia*

The flows induced by the translational linearly polarized vibrations of a heated sphere immersed in an incompressible fluid are studied. The fluid density does not depend on pressure and changes with temperature according to the linear law. The fluid is bounded by an immovable spherical envelope, and the system is subjected to the gravity field. The stream-function and temperature fields for creeping flow regimes are found analytically. The dependences of the characteristics of the non-linear convective regimes on the parameter values are obtained numerically using a finite difference method.

*Key words:* vibrations, convection, non-linear flow regimes, spherical cavity

### 1. Введение

Настоящая работа посвящена численному исследованию течений, индуцируемых линейно-поляризованными поступательными колебаниями нагретой сферы в вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной сферической оболочкой. В большинстве подобных работ изучались течения около колеблющихся тел в изотермической жидкости. Так, в [1] рассматривалось течение, индуцируемое малоамплитудными поступательными колебаниями сферы, в [2] — течение, генерируемое малоамплитудными поступательными и торсионными колебаниями сферы, в [3] — течения, возбуждаемые низкочастотными конечно-амплитудными колебаниями цилиндра или сферы, в [4] — течение, вызванное высокочастотными малоамплитудными поступательными вибрациями нагретой сферы в условиях невесомости. В настоящей работе исследуются течения, индуцируемые высокочастотными малоамплитудными поступательными колебаниями нагретой сферы, помещенной в вязкую несжимаемую жидкость, в поле силы тяжести.

### 2. Постановка задачи. Определяющие уравнения и граничные условия

Пусть твердая сфера радиуса  $R_s$  совершает поступательные линейно-поляризованные колебания с частотой  $\omega$  и амплитудой  $a$  в вязкой несжимаемой жидкости. Вся система ограничена неподвижной сферической оболочкой радиуса  $R_e$ .

Радиус-вектор произвольной точки колеблющейся сферы  $\vec{r} = R_i \vec{k} + a \cos \omega t \vec{j}$ , где  $\vec{k}$  — единичный вектор, направленный из центра неподвижной сферы к произвольной точке сферы,  $\vec{j}$  — направление вибраций. Тогда для скорости любой точки колеблющейся сферы справедливо выражение:  $\vec{v} = -a \omega \sin \omega t \vec{j}$ .

Рассматривается изотермически несжимаемая жидкость, плотность которой меняется с температурой по линейному закону:  $\rho = \rho_0 (1 - \beta T)$ , где  $\beta$  — температурный коэффициент объемного расширения жидкости,  $T$  — абсолютная температура. Исследуется воздействие вибраций с амплитудой, много меньшей радиуса сферы. Период вибраций считается малым по сравнению с характерными гидродинамическими временами. Предполагается, что плотность материала тела равна плотности жидкости на горизонте нейтральной плавучести, поэтому гравитационное осаждение сферы в поле силы тяжести не учитывается.

Поскольку колеблется лишь внутренняя сфера, а внешняя сфера остается в покое, индуцируемое вибрациями пульсационное поле скорости жидкости не является пространственно однородным даже в изотермическом случае; в неизотермической задаче течения и теплоперенос в жидкости описываются уравнениями тепловой вибрационной конвекции при вибрациях общего вида, полученными в [5]:

$$\rho_0 \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) + a^2 \omega^2 \bar{W}^2 \nabla \rho / 4 = \nabla p + \eta \Delta \vec{v} + \rho \vec{g}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \nabla T = \chi \Delta T, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \operatorname{div} \bar{W} = 0, \quad \operatorname{rot} \bar{W} = 0, \quad (3)$$

где  $\eta$  — динамическая вязкость,  $\chi$  — коэффициент температуропроводности,  $\bar{W}$  — векторная амплитуда пульсационной скорости в лабораторной системе отсчета,  $\vec{g}$  — вектор ускорения свободного падения.

На твердых границах обращаются в нуль нормальные компоненты пульсационной и средней скорости:

$$v_n = 0, \quad U_n = 0 \quad \text{при } r = R_i, \quad (4)$$

$$v_n = 0, \quad W_n = 0 \quad \text{при } r = R_e. \quad (5)$$

Здесь  $\bar{U} = \bar{W} - \vec{j}$  — векторная амплитуда пульсационной скорости в системе отсчета колеблющейся сферы.

Для вектора касательной компоненты средней скорости ставятся эффективные граничные условия, описывающие генерацию средней завихренности в тонких вязких пограничных слоях около твердых поверхностей (шлихтинговскую генерацию) [5, 7]:

$$\bar{v}_\tau = -(a^2 \omega / 4) \left( 2 (\bar{U}_\tau \nabla) \bar{U}_\tau + \nabla_\tau (\bar{U}_\tau^2) / 2 \right) \quad \text{при } r = R_i, \quad (6)$$

$$\bar{v}_\tau = -(a^2 \omega / 4) \left( 2 (\bar{W}_\tau \nabla) \bar{W}_\tau + \nabla_\tau (\bar{W}_\tau^2) / 2 \right) \quad \text{при } r = R_e. \quad (7)$$

Внутренняя и внешняя сферы считаются идеально теплопроводными, на них поддерживаются постоянные разные температуры:  $T(R_i) = \theta$ ,  $T(R_e) = 0$ , то есть внутренняя сфера нагрета.

Для приведения уравнений к безразмерному виду в качестве единиц длины, скорости, температуры и времени выбираются, соответственно, следующие величины: радиус внутренней сферы  $[r] = R_i$ ,  $[v] = v / R_i$ ,  $[T] = \theta$ ,  $[t] = R_i^2 / v$ , где  $v = \eta / \rho_0$  —

кинематическая вязкость жидкости. Радиус внешней сферы в новых обозначениях равняется  $R = R_e/R_i$ .

С учетом введенных переменных уравнения и граничные условия (1)–(7) принимают следующий безразмерный вид:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} - Gv \vec{W}^2 \nabla T = -\nabla p + \Delta \vec{v} + Gr T \vec{\gamma}; \quad (8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) T = \frac{1}{Pr} \Delta T; \quad (9)$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{W} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{W} = 0; \quad (10)$$

$$\vec{v}_\tau = -\operatorname{Re}_p \left( 2(\vec{U}_\tau \nabla) \vec{U}_\tau + \nabla_\tau (\vec{U}_\tau^2) / 2 \right), \quad v_n = 0, \quad U_n = 0, \quad T = 1 \quad \text{на внутренней сфере } (r = 1), \quad (11)$$

$$\vec{v}_\tau = -\operatorname{Re}_p \left( 2(\vec{W}_\tau \nabla) \vec{W}_\tau + \nabla_\tau (\vec{W}_\tau^2) / 2 \right), \quad v_n = 0, \quad W_n = 0, \quad T = 0 \quad \text{на внешней сфере } (r = R). \quad (12)$$

Задача (8)–(12) содержит безразмерные параметры: число Грасгофа  $Gr = g\beta\theta R_i^3/v^2$ , вибрационное число Грасгофа  $Gv = a^2\omega^2\beta\theta R_i^2/(4v^2)$ , пульсационное число Рейнольдса  $\operatorname{Re}_p = a^2\omega/(4v)$  и число Прандтля  $Pr = \nu/\chi$ . В дальнейшем предполагается, что ось вибраций вертикальна;  $\vec{\gamma}$  — единичный вектор в вертикальном направлении.

### 3. Аналитическое решение задачи для средних полей в приближении ползущего течения

При малых значениях определяющих параметров, когда нелинейными слагаемыми в уравнениях движения и теплопроводности можно пренебречь, удастся получить точное решение стационарной задачи для средних полей. Точное решение для поля температуры совпадает с решением в отсутствие силы тяжести, найденным в [4]:

$$T = (R/r - 1)/(R - 1). \quad (13)$$

Точное решение задачи для пульсаций в терминах потенциала пульсационной скорости  $\vec{W} = \nabla\Phi$  имеет вид [4]:

$$\Phi = \cos \vartheta \left( R^3 / (2r^2) + r \right) / (1 - R^3), \quad (14)$$

где  $\vartheta$  — полярный угол сферической системы координат, отсчитываемый от оси вибраций. Подстановка (13) и (14) в линеаризованное стационарное уравнение движения приводит к уравнениям  $\Delta \vec{v} - \nabla p = Gv W^2 (R/(R-1)) \vec{e}_r / r^2 - (R/(R-1)) Gr \vec{\gamma} / r$ ,  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$  с граничными условиями на внутренней сфере ( $r = 1$ ):  $v_\vartheta = -45 \operatorname{Re}_p R^6 \sin 2\vartheta / (8(1 - R^3)^2)$ , и на внешней сфере ( $r = R$ ):  $v_\vartheta = -45 \operatorname{Re}_p \sin 2\vartheta / (8R(1 - R^3)^2)$ .

Задача о ползущем течении линейна и инвариантна относительно поворотов вокруг вертикальной оси, поэтому решение обязано быть также осесимметричным. В этом случае задачу удобно решать в терминах функции тока  $\psi$  и завихренности  $\Omega$ , которые определяются соотношениями  $\vec{v} = \operatorname{rot} \psi \vec{e}_\varphi$ ,  $\Omega = \operatorname{rot}_\varphi \vec{v}$  или  $v_r = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\psi \sin \vartheta)$ ,

$v_\vartheta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi)$  и  $\Omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta^2} - \frac{1}{r^2} \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \psi$ . В этих терминах уравнение движения (8) приобретает вид:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Omega}{\partial \vartheta} \operatorname{ctg} \vartheta - \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \Omega =$$

$$\operatorname{Gv} \left[ 3R^4 (R^3 - 4r^3) \right] / \left[ 4r^9 (R-1)(1-R^3)^2 \right] \sin 2\vartheta - \operatorname{Gr} R / ((R-1)r^2) \cdot \sin \vartheta.$$

Поскольку в правой части уравнения содержатся два слагаемых, по-разному зависящих от угла  $\vartheta$ , можно искать завихренность, а следовательно, и функцию тока в виде  $\Omega = \Omega_1 \sin \vartheta + \Omega_2 \sin 2\vartheta$ ,  $\psi = \psi_1 \sin \vartheta + \psi_2 \sin 2\vartheta$ , где  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  — функции только модуля радиус-вектора.

Для  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  получается система уравнений:

$$\Omega_1'' + 2\Omega_1'/r - 2\Omega_1/r^2 = -\operatorname{Gr} R / ((R-1)r^2), \quad (15)$$

$$\Omega_2'' + 2\Omega_2'/r - 6\Omega_2/r^2 = \operatorname{Gv} \left[ 3R^4 (R^3 - 4r^3) \right] / \left[ 4r^9 (R-1)(1-R^3)^2 \right], \quad (16)$$

$$\Omega_1 = -\psi_1'' - 2\psi_1'/r + 2\psi_1/r^2, \quad (17)$$

$$\Omega_2 = -\psi_2'' - 2\psi_2'/r + 6\psi_2/r^2 \quad (18)$$

с граничными условиями на внутренней границе, при  $r = 1$ :

$$\psi_1 = 0, \quad \psi_2 = 0, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial r} = 45 \operatorname{Re}_p R^6 / \left[ 8(1-R^3)^2 \right]; \quad (19)$$

и на внешней границе, при  $r = R$ :

$$\psi_1 = 0, \quad \psi_2 = 0, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial r} = 45 \operatorname{Re}_p / \left[ 8R(1-R^3)^2 \right]. \quad (20)$$

Решение задачи (15)–(20) имеет вид:

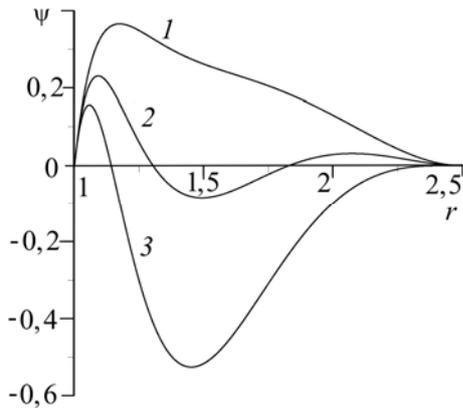
$$\psi_1 = -\operatorname{Gr} \cdot R \cdot r^2 / \left[ 8(R-1) \right] + c_1 r + c_2 / r^2 + c_3 r^3 + c_4,$$

$$\psi_2 = -\operatorname{Gv} R^4 \left[ 1 + R^3 / (84r^3) \right] / \left[ 8r^2 (R-1)(1-R^3)^2 \right] + d_1 r^2 + d_2 / r^3 + d_3 r^4 + d_4 / r,$$

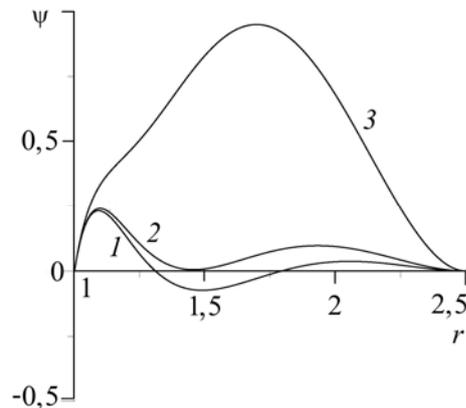
где константы  $c_1, \dots, c_4$  и  $d_1, \dots, d_4$  определяются из граничных условий. Получающиеся для них выражения здесь не приводятся в силу их громоздкости, однако следует отметить, что все  $c_i$  вычисляются по формулам  $c_i = \operatorname{Gr} \cdot f_{1i}(R)$ , а все  $d_i$  — по формулам  $d_i = \operatorname{Gv} \cdot f_{2i}(R) + \operatorname{Re}_p \cdot f_{3i}(R)$ . Отсюда следует, что при малых значениях определяющих параметров вид течения зависит не от значений вибрационного числа Грасгофа, пульсационного числа Рейнольдса и обычного числа Грасгофа по отдельности, а от их отношений  $k_v = \operatorname{Gv} / \operatorname{Re}_p$  и  $k_g = \operatorname{Gr} / \operatorname{Gv}$ .

На рисунке 1 приведены распределения функции тока  $\psi$  по радиусу при  $\vartheta = \pi/4$  для  $k_g = 0$  (в отсутствие силы тяжести) и различных значений  $k_v$ . Как видно из графиков, при  $k_v = 6000$  доминирующим является шлихтинговский механизм генерации среднего течения. В результате в четвертинке зазора между сферами формируется один вихрь, в котором жидкость движется вблизи внутренней сферы от экватора к полюсу, и вблизи внешней сферы — в обратном направлении; функция тока при всех значениях  $r$  положительна. При  $k_v = 10000$ , вследствие конкуренции шлихтинговского и термовибрационного механизмов генерации течения, возникает трехуровневая структура течения по радиусу: вблизи внутренней и внешней сфер имеют место шлихтинговские вихри с циркуляцией жидкости по часовой стрелке, а между ними — вихрь

термовибрационного происхождения с циркуляцией против часовой стрелки. При  $k_v = 15000$  шлихтинговский механизм оказывает определяющее действие лишь вблизи внутренней сферы, а в остальной части зазора, в том числе и вблизи внешней сферы доминирующим является термовибрационный механизм; в итоге образуется двухуровневая структура течения по радиусу. Таким образом, в отсутствие силы тяжести ( $k_g = 0$ ) при  $k_v \leq 7000$  структура ползущего течения определяется шлихтинговским механизмом, при  $k_v \geq 7000$  — термовибрационным механизмом.



**Рис. 1.** Зависимости функции тока от радиуса при  $k_g = 0$  для различных значений  $k_v$ : 6000 (кривая 1), 10000 (2), 15000 (3)



**Рис. 2.** Зависимости функции тока от радиуса при  $k_v = 10000$  для различных значений  $k_g$ : 1/5000 (кривая 1), 1/500 (2), 1/50 (3)

Рисунок 2 содержит распределения функции тока  $\psi$  по радиусу при  $\vartheta = \pi/4$  для  $k_v = 10000$  и различных значений  $k_g$ . В отсутствие силы тяжести при этом значении  $k_v$  реализуется трехуровневая структура по радиусу. Как видно из рисунка, такая структура течения, то есть с доминирующей ролью вибрационных механизмов генерации средних течений, сохраняется лишь при достаточно малых значениях (кривая 1,  $k_g = 1/5000$ ). При увеличении этого отношения (с уменьшением вклада гравитационного механизма) структура течения упрощается (кривая 2,  $k_g = 1/500$ ) и уже при  $k_g = 1/50$  становится близкой к структуре чисто термогравитационного течения (кривая 3).

#### 4. Нелинейные режимы конвекции при произвольных значениях параметров

При произвольных значениях определяющих параметров с учетом нелинейных слагаемых задача в терминах завихренности–функции тока имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \vec{v} \nabla \Omega + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial r} \operatorname{ctg} \vartheta - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} \right] \Omega = \\ = \hat{L} \varphi - \left( \operatorname{Gr} \sin \vartheta + \frac{1}{r} \operatorname{Gv} \frac{\partial W^2}{\partial \vartheta} \right) \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{r} \left( \operatorname{Gr} \cos \vartheta - \operatorname{Gv} \frac{\partial W^2}{\partial r} \right) \frac{\partial T}{\partial \vartheta}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \nabla T = \frac{1}{\operatorname{Pr}} \Delta T, \quad (22)$$

$$\Omega = -\frac{1}{r \sin \vartheta} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \vartheta^2} - \frac{\operatorname{ctg} \vartheta}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} \right). \quad (23)$$

Здесь используются обозначения:

$$\hat{L} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\text{ctg} \vartheta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} = \Delta - \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta}, \quad \vec{\nabla} = u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} v \frac{\partial}{\partial \vartheta}.$$

Функция тока в этом случае вводится иначе, чем при исследовании ползущего течения, а именно:

$$u = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta}, \quad v = -\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Psi}{\partial r}. \quad (24)$$

Соответственно граничные условия записываются следующим образом:

$$\Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 45 \text{Re}_p R^6 / \left[ 8(1 - R^3)^2 \right], \quad T = 1 \text{ на внутренней сфере } (r = 1), \quad (25)$$

$$\Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 45 \text{Re}_p / \left[ 8(1 - R^3)^2 \right], \quad T = 0 \text{ на внешней сфере } (r = R). \quad (26)$$

Задача (21)–(26) решалась методом конечных разностей с использованием явной схемы. Уравнение Пуассона на каждом шаге по времени итерировалось методом последовательной верхней релаксации. Для вычисления завихренности на твердых границах использовалась формула второго порядка точности. Расчеты проводились на сетке  $60 \times 60$  при фиксированных значениях относительного радиуса оболочки ( $R = 2,5$ ) и числа Прандтля ( $\text{Pr} = 1$ ).

Как отмечалось в предыдущем разделе, в режиме ползущего течения в результате действия шлихтинговского механизма генерации среднего течения в каждой четвертинке зазора формируется один вихрь, в котором жидкость движется от экватора к полюсу вблизи внутренней сферы, и в обратном направлении вблизи внешней сферы. При увеличении пульсационного числа Рейнольдса в широком диапазоне его значений структура течения, генерируемого данным механизмом, практически не меняется, а закон изменения интенсивности с ростом  $\text{Re}_p$  близок к линейному.

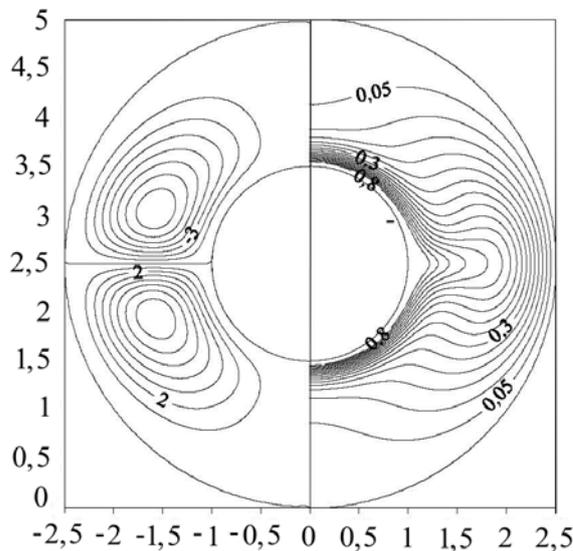


Рис. 3. Изолинии функции тока и изотермы чисто термовибрационного течения при  $Gv = 10000$

Течение, индуцируемое термовибрационным механизмом, при малых значениях вибрационного числа Грасгофа внешне выглядит так же, как и шлихтинговское течение, но имеет противоположное ему направление. При увеличении вибрационного числа Грасгофа центры вихрей сдвигаются ближе к экватору, поле температуры значительно деформируется за счет течения (Рис. 3). В отличие от шлихтинговского течения, зависимость интенсивности термовибрационного течения от определяющего параметра (вибрационного числа Грасгофа) остается линейной лишь при малых его значениях.

Рисунок 4 иллюстрирует перестройку структуры комбинированного течения, генерируемого совместным действием

шлихтинговского и термовибрационного механизмов в невесомости при увеличении значений параметров  $Gv$  и  $\text{Re}_p$ , но сохранении постоянным их отношения  $Gv/\text{Re}_p = k_v = 10000$ , что соответствует эксперименту при варьировании амплитуды

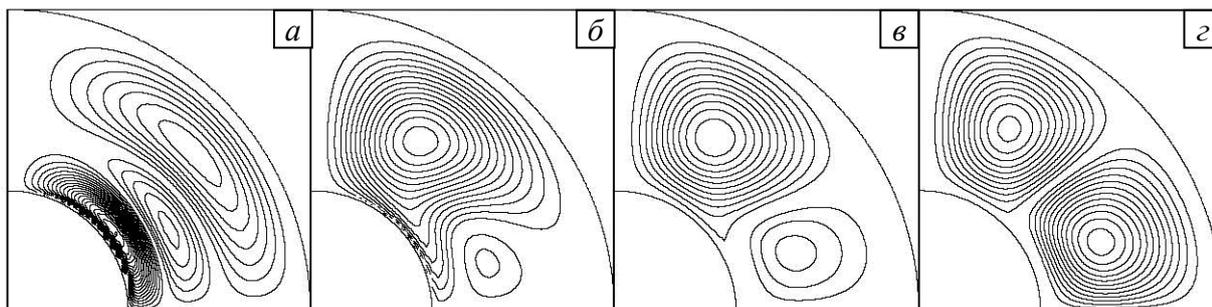


Рис. 4. Изолинии функции тока стационарных течений при  $Gr = 0$  и  $Gv/Re_p = 10000$  и различных значениях  $Gv$ : 2000 (а), 2600 (б), 3000 (в), 4000 (г)

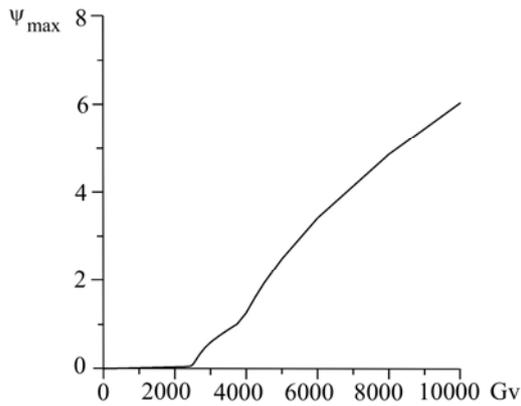
вибраций и фиксированной частоте. В режиме ползущего течения при этом значении отношения  $Gv/Re_p$  движение имеет трехуровневую структуру по радиусу. Как видно из рисунка 4, такая структура существует лишь при достаточно малых значениях параметров, затем происходит качественная перестройка течения, в результате которой разбиение течения по радиусу исчезает, но возникает разбиение по углу.

На рисунке 5 представлена зависимость максимального по модулю значения функции тока  $\psi_{\max}$  от вибрационного числа Грасгофа при  $Gr = 0$  и  $Gv/Re_p = 10000$ . Как видно, значение  $\psi_{\max}$  монотонно увеличивается с ростом  $Gv$ , однако есть два значения  $Gv$ , при которых происходит резкое изменение характера зависимости  $\psi_{\max}(Gv)$ :  $Gv_1 \approx 2400$  и  $Gv_2 \approx 4000$ . Из сопоставления рисунков 4 и 5 видно, что при  $Gv \approx Gv_1$  начинается перестройка структуры течения, которая продолжается приблизительно до  $Gv \approx Gv_2$ .

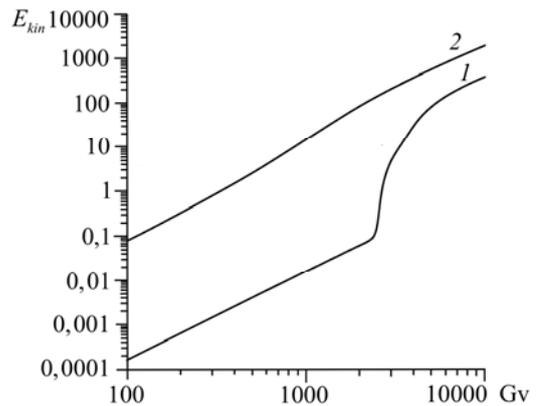
На рисунке 6 приведена зависимость кинетической энергии среднего течения  $E_{kin}$  от вибрационного числа Грасгофа при  $Gr = 0$  и двух значениях  $Gv/Re_p$ . Как видно, в случае  $Gv/Re_p = 10000$  при  $Gv < Gv_1$  зависимость  $E_{kin}(Gv)$  практически линейна, при  $Gv = Gv_1$  наблюдается резкий излом кривой, связанный с качественной перестройкой структуры течения (Рис. 4). В случае  $Gv/Re_p = 1000$  излом отсутствует, и это можно объяснить тем, что при таком значении отношения параметров структура течения с ростом  $Gv$  не изменяется; в широком диапазоне значений  $Gv$  и  $Re_p$  течение является одноуровневым по радиусу.

Имеет место еще один механизм, вызывающий течение в рассматриваемой ситуации — термогравитационный. Он реализуется при ненулевых значениях числа Грасгофа. Структура термогравитационного течения заметно отличается от шлихтинговского и термовибрационного. В режиме ползущего течения термогравитационное течение представляет собой два вихря; при увеличении числа  $Gr$  течение теряет симметрию относительно экватора, над нагретой сферой образуется конвективный факел.

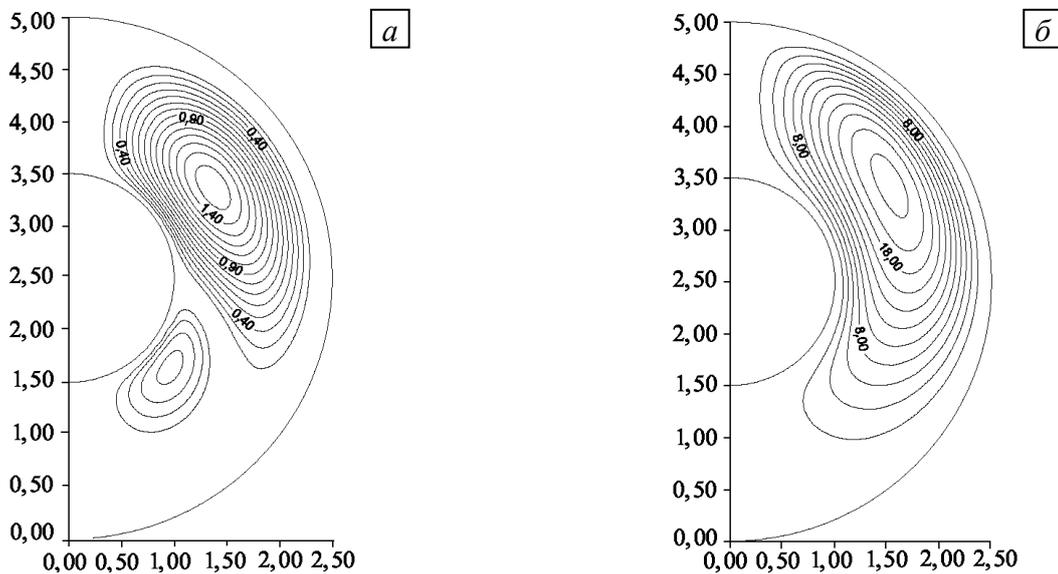
В том случае, когда действуют все три механизма, генерирующие течение (термогравитационный, термовибрационный и шлихтинговский), структура нелинейных режимов течения жидкости определяется не только соотношениями между параметрами  $Gr$ ,  $Gv$ ,  $Re_p$  как в режиме ползущего течения, но и самими значениями этих параметров. Для примера на рисунке 7 показана структура комбинированного течения для двух



**Рис. 5.** Зависимость максимального по модулю значения функции тока от вибрационного числа Грасгофа при  $Gr = 0$ ,  $Gv/Re_p = 10000$



**Рис. 6.** Зависимости кинетической энергии движения от вибрационного числа Грасгофа при  $Gr = 0$  и значениях отношения  $Gv/Re_p$ : 10000 (кривая 1), 1000 (2)



**Рис. 7.** Изолинии функции тока стационарного течения:  $Gv = 81$ ,  $Re_p = 0,0081$ ,  $Gr = 81$  (а);  $Gv = 6561$ ,  $Re_p = 0,6561$ ,  $Gr = 6561$  (б)

наборов значений параметров при условии постоянства значений отношений  $Gv/Re_p = 10000$  и  $Gr/Gv = 1$ . Как видно (Рис. 7, а), в первом случае проявляется действие всех трех механизмов, а во втором (Рис. 7, б) — вид течения определяется термогравитационным механизмом.

## 5. Заключение

Изучены течения, индуцируемые поступательными линейно-поляризованными колебаниями нагретой сферы. Получены аналитические выражения для полей функции тока и температуры в случае ползущего течения и численные данные о нелинейных режимах. Исследована перестройка структуры течения с изменением параметров при сохранении постоянных значений их отношений. Найдено, что в режиме ползущего течения в отсутствие силы тяжести и при достаточно больших значениях отношения вибрационного числа Грасгофа  $Gv$  к пульсационному числу Рейнольдса  $Re_p$  структура

течения является трехуровневой по радиусу, что обусловлено конкуренцией шлихтинговского и термовибрационного механизмов генерации течения. С увеличением вибрационного числа Грасгофа в интервале значений  $Gv$  приблизительно от 2400 до 4000 происходит перестройка структуры течения, а при больших значениях параметров в четверти сферы генерируются два вихря, разделенные по углу. При наличии силы тяжести, когда действуют три механизма, генерирующих течение (термогравитационный, термовибрационный и шлихтинговский), структура нелинейных режимов течения жидкости определяется не только значениями отношений параметров  $Gr$ ,  $Gv$ ,  $Re_p$ , как в режиме ползущего течения, но и самими значениями этих параметров. В целом, при малых числах Грасгофа проявляется действие всех трех механизмов, а при умеренных и высоких числах Грасгофа вид течения определяется в основном термогравитационным механизмом.

### Литература

1. Riley N. On a sphere oscillating in a viscous fluid // Q. J. Mech. Appl. Math. – 1966. – V. 19, N. 4. – P. 461-472.
2. Gopinath A. Steady streaming due to small-amplitude torsional oscillations of a sphere in a viscous fluid // Q. J. Mech. Appl. Math. – 1993. – V. 46, N. 3. – P. 501-520.
3. Watson E. J. Slow oscillations of a circular cylinder or sphere in a viscous fluid // Q. J. Mech. Appl. Math. – 1992. – V. 45, N. 2. – P. 263-275.
4. Любимов Д.В., Любимова Т.П., Ру Б., Черепанов А. Течение, индуцированное колеблющейся нагретой сферой // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 1996. – N. 1. – С. 31-39.
5. Lyubimov D.V. Convective flows under the influence of high frequency vibrations // Eur. J. Mech. B/Fluids. – 1995. – V. 14, N. 4. – P. 439-458.
6. Schlichting H. Boundary-layer theory. – Pergamon, 1955. – 535 p.
7. Gershuni G.Z., Lyubimov D.V. Thermal Vibrational Convection. – Wiley, 1998. – 358 p.

Поступила в редакцию 10.06.11

---

#### Сведения об авторах

Любимова Татьяна Петровна, дфмн., проф., зав. лаб., Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), Россия, 614013, Пермь, ул. Академика Королева, д.1; E-mail: lyubimovat@mail.ru  
Черепанова Александра Анатольевна, инж., ИМСС УрО РАН; E-mail: acherepanova@list.ru