

УДК 539.3

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ СИНГУЛЯРНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В ВЕРШИНЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ТРЕЩИН

Т.О. Корепанова, В.П. Матвеевко, Н.В. Севодина

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

Рассматривается вариант метода построения сингулярных решений для пространственных пересекающихся трещин. Приводятся результаты вычислений показателей сингулярности напряжений в вершине клиновидной трещины при различных граничных условиях на береговых поверхностях и в вершине пересечения клиновидных трещин.

Ключевые слова: сингулярность напряжений, клиновидные трещины, метод конечных элементов

NUMERICAL ANALYSIS OF STRESS SINGULARITIES AT THE TIP OF INTERSECTING 3D WEDGE-SHAPED CRACKS

T.O. Korepanova, V.P. Matveenko and N.V. Sevodina

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

We consider a variant of the method of constructing singular solutions for three-dimensional intersecting cracks. The results of calculation of stress singularity indices at the tip of a wedge-shaped crack obtained at different boundary conditions on the crack faces and at the common tip of intersecting wedge-shaped cracks are presented.

Key words: stress singularity, wedge-shaped cracks, finite-element method

В теории упругости имеют место сингулярные решения, связанные с бесконечными значениями напряжений в отдельных точках (линиях), называемых особыми точками (линиями). Среди многообразия вариантов наибольший интерес, обусловленный практическим значением, представляют те особые точки, которые определяют вершины плоских или пространственных трещин, рассматриваемых, соответственно, в рамках двумерной или трехмерной постановок задач теории упругости. В окрестности особых точек при наличии сингулярных решений важное теоретическое и прикладное значение имеет оценка характера поведения напряжений (характера сингулярности напряжений). Данной проблеме посвящены сотни работ. Общее состояние исследований в этой области достаточно полно отражают обзорные работы [1], [2]. Отмечается, что для трещин в рамках двумерной задачи теории упругости рассмотрены практически все возможные варианты. Иная ситуация имеет место для пространственных трещин, где требуется построение трехмерных решений. Можно отметить лишь задачу исследования сингулярности напряжений в плоской клиновидной трещине, для которой в работах [3–8] получены численные результаты.

Единичная плоская клиновидная трещина не ограничивает всего многообразия пространственных трещин. В частности, для анализа характера сингулярности напряжений в пространственном случае представляет интерес наличие двух и более пересекающихся плоских клиновидных трещин. В литературе имеются лишь отдельные попытки построения решения для подобных задач. Так, в [9] рассмотрено равновесие упругого несжимаемого полупространства, ослабленного двумя приповерхностными

клиновидными трещинами, которые лежат в одной плоскости, перпендикулярной поверхности полупространства, и имеют общую вершину.

В настоящей работе показана возможность численного метода построения сингулярных решений трехмерных задач теории упругости [10–12] для анализа характера сингулярности напряжений в окрестности вершины одной и двух пересекающихся плоских клиновидных трещин при различных граничных условиях на боковых гранях.

1. Метод решения

Рассматривается полубесконечный конус, на боковой поверхности которого имеются образующие, где нарушается гладкость боковой поверхности. Вершина конуса совпадает с центром сферической системы координат (r, θ, φ) , а основание перпендикулярно оси $\theta = 0$.

Для анализа сингулярности напряжений необходимо построить собственные решения задачи, совпадающие с известным в линейной теории упругости асимптотическим представлением решения в окрестности угловых точек [13]:

$$u_k(r, \theta, \varphi) = r^\lambda \xi_k(\theta, \varphi) \quad (k = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Такая форма представления использовалась при построении собственных решений для конусов с гладкой боковой поверхностью [10]. В трехмерной задаче условие $-0,5 \leq \operatorname{Re} \lambda < 1$ определяет область сингулярных решений, которые приводят к бесконечным значениям напряжений в вершине конуса.

Собственные решения должны удовлетворять однородным уравнениям равновесия в рассматриваемой области

$$\frac{1}{1-2\nu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \nabla^2 \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

а на ее боковой поверхности — однородным граничным условиям или в перемещениях

$$\mathbf{u} = 0, \quad (3)$$

или в напряжениях

$$\frac{\nu}{1-2\nu} \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0, \quad (4)$$

или смешанным граничным условиям, соответствующим варианту идеального скольжения. Здесь ∇ — оператор набла; \mathbf{u} — вектор перемещений; \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к образующей конуса; ν — коэффициент Пуассона.

Подстановка собственных решений в уравнения равновесия приводит к системе дифференциальных уравнений в частных производных относительно функций $\xi_k(\theta, \varphi)$ и параметра λ :

$$L_n(\lambda, \xi_k) = 0 \quad (n, k = 1, 2, 3). \quad (5)$$

Граничные условия (4) с учетом представления (1) преобразуются к виду:

$$M_n(\lambda, \xi_k) = 0 \quad (n, k = 1, 2, 3). \quad (6)$$

Полученные дифференциальные уравнения (5) записываются в слабой форме [11]. Для этого они умножаются на соответствующие вариации $\delta \xi_k(\theta, \varphi)$ и интегрируются по области S , вырезаемой конусом на сфере:

$$\int_S \left[\sum_{k=1}^3 L_k(\lambda, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \delta \xi_k(\theta, \varphi) \right] dS = 0. \quad (7)$$

Для решения уравнений (7) предлагается использовать процедуру метода конечных элементов (МКЭ). Эта процедура достаточно сложна, так как в представленной задаче требуется использование двумерных элементов, обеспечивающих наряду с непрерывностью функций ξ_k непрерывность их первых производных.

С целью понижения порядка производных функций ξ_k в уравнении (7) проводятся тождественные преобразования, после которых с учетом граничных условий (6) получается следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & \iint_S \left\{ \left[2(1-\nu)(\lambda^2 + \lambda - 2) \sin \theta \cdot \xi_1 + (\lambda - 3 + 4\nu) \left(\cos \theta \cdot \xi_2 + \sin \theta \frac{\partial \xi_2}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi_3}{\partial \varphi} \right) \right] \delta \xi_1 - \right. \\ & - (1-2\nu) \left(\sin \theta \frac{\partial \xi_1}{\partial \theta} \frac{\partial \delta \xi_1}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \xi_1}{\partial \varphi} \frac{\partial \delta \xi_1}{\partial \varphi} \right) + \left[(1-2\nu)(\lambda+1)\lambda \sin \theta \cdot \xi_2 - \frac{2(1-\nu)}{\sin \theta} \xi_2 + \right. \\ & + (4+\lambda-4\nu) \sin \theta \frac{\partial \xi_1}{\partial \theta} - (3-4\nu) \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \xi_3}{\partial \varphi} \left. \right] \delta \xi_2 - 2(1-\nu) \sin \theta \frac{\partial \xi_2}{\partial \theta} \frac{\partial \delta \xi_2}{\partial \theta} - 2\nu \frac{\partial \xi_3}{\partial \varphi} \frac{\partial \delta \xi_2}{\partial \theta} - \\ & - (1-2\nu) \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \xi_2}{\partial \varphi} \frac{\partial \delta \xi_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial \xi_3}{\partial \theta} \frac{\partial \delta \xi_2}{\partial \varphi} \right) + \left[(1-2\nu)\lambda(\lambda+1) \sin \theta \cdot \xi_3 - \frac{(1-2\nu)}{\sin \theta} \xi_3 + \right. \\ & + (\lambda+4-4\nu) \frac{\partial \xi_1}{\partial \varphi} + (3-4\nu) \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \xi_2}{\partial \varphi} \left. \right] \delta \xi_3 - \frac{2(1-\nu)}{\sin \theta} \frac{\partial \xi_3}{\partial \varphi} \frac{\partial \delta \xi_3}{\partial \varphi} - 2\nu \frac{\partial \xi_2}{\partial \theta} \frac{\partial \delta \xi_3}{\partial \varphi} - \\ & - (1-2\nu) \left(\sin \theta \frac{\partial \xi_3}{\partial \theta} \frac{\partial \delta \xi_3}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi_2}{\partial \varphi} \frac{\partial \delta \xi_3}{\partial \theta} \right) \left. \right\} d\theta d\varphi + \int_{\ell} \left\{ (1-2\nu)(1-\lambda) \sin \theta \xi_2 \cdot \delta \xi_1 - \right. \\ & \left. - 2 \left[(1+\nu\lambda) \sin \theta \xi_1 + \nu \cos \theta \cdot \xi_2 \right] \delta \xi_2 + (1-2\nu) \cos \theta \cdot \xi_3 \delta \xi_3 \right\} d\ell = 0, \end{aligned}$$

где ℓ — часть границы поверхности S , на которой заданы напряжения.

После понижения порядка производных появляется возможность использовать конечные элементы, обеспечивающие непрерывность только функций ξ_k . На конечные элементы разбивается та часть сферической поверхности, которая вырезается конусом с вершиной, располагающейся в центре сферы. Применяются конечные треугольные элементы с лагранжевой аппроксимацией функций ξ_k линейными полиномами. Последующее применение процедуры Галеркина в совокупности с МКЭ сводит решение рассматриваемой задачи к отысканию собственных значений и собственных векторов алгебраической несимметричной матрицы с ленточной структурой.

Получающаяся алгебраическая проблема комплексных собственных значений разрешается с помощью разработанного авторами оригинального алгоритма, основанного на использовании метода Мюллера [14] и принципа аргумента [15], совместное использование которых обеспечивает надежность полученных численных результатов, так как позволяет найти все собственные значения $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 1$ [12].

2. Результаты расчетов

Пример 1. Рассматривается клиновидная трещина (Рис. 1), на поверхностях берегов которой могут иметь место различные варианты граничных условий. Контур сферы служит только для целей визуализации.

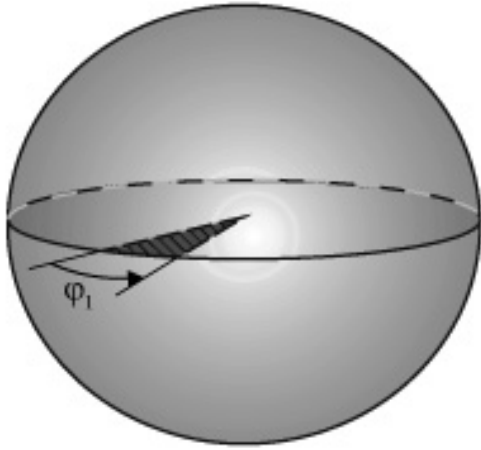


Рис. 1. Клиновидная трещина

Для трещины с граничными условиями в напряжениях на рисунке 2, а показана зависимость собственных значений $\text{Re}\lambda_i \leq 1$ от величины угла φ_1 . Эти результаты совпадают с уже известными [6], но в отличие от этой работы здесь приводятся все значения $\text{Re}\lambda_i \leq 1$ для симметричной и антисимметричной задач.

На рисунке 2, б представлены новые результаты, соответствующие условиям идеального скольжения на поверхностях трещины, которые записываются следующим образом:

$$u_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad \tau_{\varphi\theta} = 0,$$

где u_θ — компонента вектора перемещения; $\tau_{r\theta}, \tau_{\varphi\theta}$ — компоненты тензора напряжений.

Пример 2. Рассматриваются две пересекающиеся под прямым углом трещины. Первая трещина имеет угол раскрытия π , а вторая — φ_1 (Рис. 3, а).

Рисунок 3, б демонстрирует все собственные значения, имеющие $\text{Re}\lambda_i < 1$ в зависимости от угла φ_1 для трещин с боковыми поверхностями, свободными от напряжений, при $\nu = 0,3$. Здесь сплошные линии соответствуют действительным собственным значениям, а пунктирные — комплексным; штрихпунктирная линия

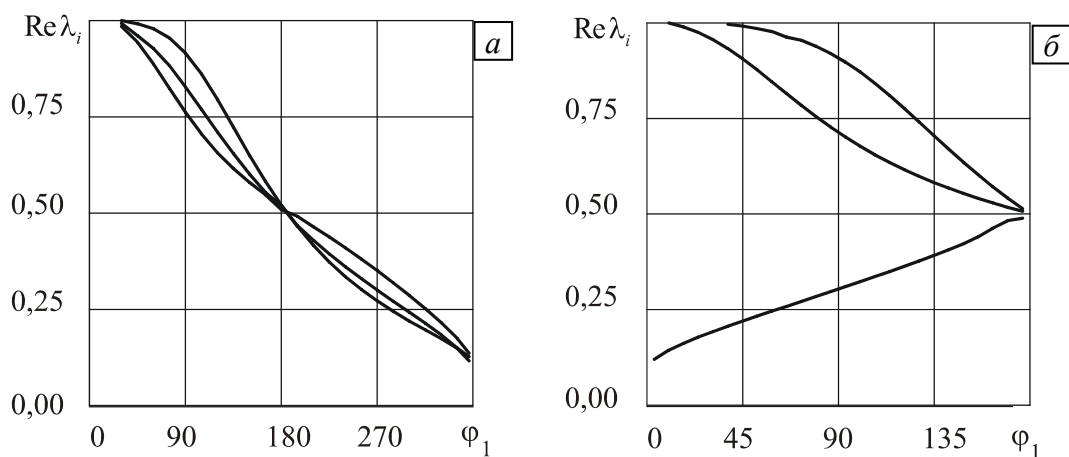


Рис. 2. Собственные значения, имеющие $\text{Re}\lambda_i \leq 1$, для клиновидной трещины с береговыми поверхностями, свободными от напряжений (а) и с идеальным скольжением (б) при $\nu = 0,3$

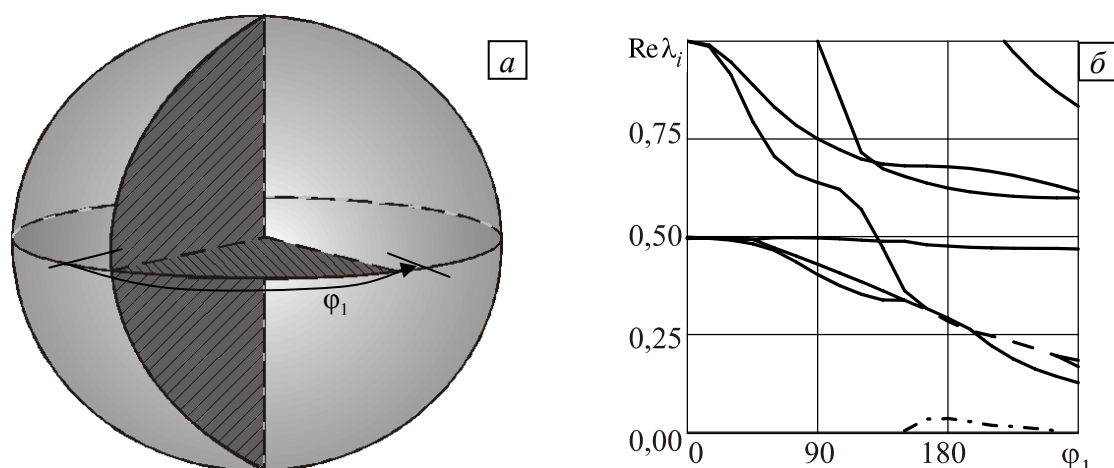


Рис. 3. Пересекающиеся клиновидные трещины (а) и собственные значения, имеющие $\text{Re}\lambda_i \leq 1$, для двух пересекающихся клиновидных трещин со свободными от напряжений береговыми поверхностями при $\nu = 0,3$ (б)

отображает изменение мнимой части собственного значения. Интересно отметить, что при увеличении угла φ_1 собственные значения уменьшаются и некоторые из них становятся комплексными.

3. Заключение

Рассмотрены основные положения численного метода построения сингулярных решений в окрестности особых точек трехмерных тел и его приложения к анализу характера сингулярности напряжений в окрестности вершины одной и двух пересекающихся клиновидных трещин.

Приведены численные результаты, дающие представление о характере сингулярности напряжений в окрестности вершины одной клиновидной трещины для различных вариантов граничных условий. Получено удовлетворительное совпадение с известными результатами для граничных условий в напряжениях.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-01-96017-а) и Совета по грантам Президента РФ для молодых российских ученых (грант МК 5286.2010.1).

Литература

1. Sinclair G.B. Stress singularities in classical elasticity – I: Removal, interpretation, and analysis // Appl. Mech. Rev. – 2004. – V. 57, N. 4. – P. 251-297.
2. Sinclair G.B. Stress singularities in classical elasticity – II: Asymptotic identification // Appl. Mech. Rev. – 2004. – V. 57, N. 4. – P. 385-439.
3. Folias E.S. On the three-dimensional theory of cracked plates // Trans. ASME (Ser. E.) J. Appl. Mech. – 1975. – V. 42, N. 3. – P. 663-674.
4. Benthem J.P. State of stress at the vertex of a quarter-infinite crack in a half-space // Int. J. Solids and Structures. – 1977. – V. 13, N. 5. – P. 479-492.
5. Benthem J.P. The quarter-infinite crack in a half-space: Alternative and additional solutions // Int. J. Solids and Structures. – 1977. – V. 16, N. 2. – P. 119-130.
6. Bazant Z.P., Estenssoro L.F. Surface singularity and crack propagation // Int. J. Solids and Structures. – 1979 – V. 15, N. 5. – P. 405-426.
7. Ghahremani F., Shih C.F. Corner singularities of three-dimensional planar interface crack // ASME (Ser. E.) J. Appl. Mech. – 1992. – V. 59, N. 1. – P. 61-68.

8. Глушков Е.В., Глушкова Н. В., Лапина О.Н. Показатели сингулярности упругих напряжений в точке выхода трещины на поверхность // Изв. РАН. МТТ. – 1998. – N. 5. – P. 146-153.
9. Ловейкин А.В., Улитко А.Ф. Об особенности поля напряжений в несжимаемом полупространстве, ослабленном двумя приповерхностными клиновидными трещинами // Изв. РАН. МТТ. – 2009. – N. 4. – P. 108-120.
10. Матвеевко В.П., Накарякова Т.О., Севодина Н.В., Шардаков И.Н. Сингулярность напряжений в вершине однородных и составных конусов при разных граничных условиях // ПММ. – 2008. – Т. 72, № 3. – С. 487-494.
11. Т.О. Корепанова, В.П. Матвеевко, Н.В. Севодина. Численный анализ сингулярности напряжений в вершине конуса с негладкой боковой поверхностью // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2010. – Т. 3, № 3. – С. 68-76.
12. Матвеевко В.П., Накарякова Т.О., Севодина Н.В., Шардаков И.Н. Исследования сингулярности напряжений в вершине конуса с эллиптическим основанием // Докл. РАН. 2006. – Т. 411, № 3. – С. 326 – 329.
13. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Московск. мат. общ. – 1967. – Т. 16. – С. 209-292.
14. Muller D.E. A method for solving algebraic equation using an automatic computer // Math. Tables and Other Aids to Computation. – 1956. – V. 10. – P. 208-215.
15. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 749 с.

Поступила в редакцию 09.09.11

Сведения об авторах

Корепанова Татьяна Олеговна, кфмн, мнс, Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614013, Пермь, ул. Академика Королёва, д. 1; E-mail: ton@icmm.ru

Матвеевко Валерий Павлович, дтн, акад., директор ИМСС УрО РАН; E-mail: mvp@icmm.ru

Севодина Наталья Витальевна, ктн, нс, ИМСС УрО РАН; E-mail: natsev@icmm.ru