

УДК 681.5.015:534.015

## ЧИСЛЕННАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В.Н. Иванов<sup>1</sup>, И.В. Домбровский<sup>2</sup>, Н.А. Шевелев<sup>2</sup><sup>1</sup>Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия<sup>2</sup>Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

Предлагается численный метод идентификации во временной области применительно к решению задач оценки динамических характеристик элементов машиностроительных конструкций на стадии их опытной отработки. Метод позволяет по дискретным выборкам, содержащим данные наблюдений за поведением отдельных узлов конструкции, определять параметры колебаний – число и значения собственных частот, логарифмических декрементов колебаний, а также параметры математических моделей – приведенные коэффициенты жесткости и демпфирования силовых элементов. Используется один из вариантов метода Прони в сочетании с алгоритмом сингулярного разложения матрицы наблюдений. Метод основывается на предположении адекватности решения системы линейных однородных дифференциальных уравнений и эквивалентной системы конечно-разностных уравнений того же порядка. Выполнено сравнение результатов натурных испытаний и математического моделирования конкретной механической системы.

*Ключевые слова:* динамика систем твердых тел, численные методы идентификации во временной области, свободные колебания

## NUMERICAL IDENTIFICATION OF THE DYNAMIC CHARACTERISTICS OF STRUCTURAL UNITS OF DESIGNED MACHINES

V.N. Ivanov<sup>1</sup>, I.V. Dombrovskij<sup>2</sup> and N.A. Shevelev<sup>2</sup><sup>1</sup>Perm State National Research University, Perm, Russia<sup>2</sup>Perm State National Research Polytechnical University, Perm, Russia

A time-domain numerical method is proposed to identify the dynamic characteristics of structural units of designed machines at the stage of their testing. The method provides procedures for determining such vibration parameters as the number and values of natural frequencies and vibration logarithmic decrements, and such mathematical model parameters as the reduced rigidity and damping coefficients for force elements. The approach exploits the discrete samples of observations of the behavior of separate structural units. A variant of Prony's method is used in combination with the algorithm of singular value decomposition of the observation matrix. The method is based on the assumption of the adequacy of solutions of linear homogeneous differential equations and the equivalent system of finite-difference equations of the same order. The results of field tests are compared with the predictions of the mathematical model of a certain mechanical system.

*Key words:* multibody system dynamics, time-domain identification method, free vibrations

Для многих сложных механических систем, в частности изделий тяжелого машиностроения, представляют интерес способы идентификации динамических характеристик колебаний на основании данных наблюдений во временной области (записям перемещений, скоростей, ускорений отдельных узлов конструкции или усилий в силовых элементах), полученным в режимах нормальной эксплуатации или из специально поставленных экспериментов, в которых воспроизводятся реальные условия функционирования.

К основным динамическим характеристикам, которые требуется определять на стадии опытной отработки вновь создаваемых инженерных конструкций, обычно

относят собственные частоты, формы и декременты колебаний, параметры силового воздействия с заданной структурой, а также параметры математической модели (число степеней свободы, коэффициенты дифференциальных уравнений и начальные состояния элементов механической системы). Во многих случаях представление об этих характеристиках позволяет оценивать динамические свойства исследуемой конструкции при действии на нее реальных переменных нагрузок, проводить оптимизацию адаптивных систем управления и стабилизации, анализировать динамическую прочность изделия.

Основная особенность рассматриваемой здесь задачи заключается в том, что в процессе испытаний изделий в реальных условиях эксплуатации наблюдение ведется обычно не за всеми переменными состояниями (координатами, скоростями и ускорениями), а только за их частью (например, за перемещениями). Кроме того, регистрируются колебания отдельных узлов конструкции, чаще всего тех, которые реализуют конечные цели работы изделия (исполнительных элементов). Данные наблюдений собираются последовательно с устройств со встроенными микропроцессорами в виде конечных дискретных выборок.

Другая особенность состоит в том, что большинство технических конструкций являются системами с распределенными параметрами и обладают бесконечным числом степеней свободы. Измерительная аппаратура фиксирует достаточно широкий спектр колебаний их упругих элементов. Однако с инженерной точки зрения интерес представляет лишь ограниченное количество собственных динамических характеристик изделия. Для идентификации обычно выбираются низшие собственные формы колебаний, поскольку для них характерны большие амплитуды и они вносят в движение конструкции больший вклад, чем высшие.

В целом рассматриваемую задачу можно характеризовать как задачу параметрической идентификации непрерывных усеченных математических моделей сложных динамических систем на основе конечных неполных выборок экспериментальных данных, содержащих избыточную информацию. К ее решению могут быть применены различные известные методы оценивания параметров механических систем: опирающиеся на данные о поведении конструкции во временной области [2, 4–7, 9, 12, 14, 16–17], основывающиеся на измеренных частотных характеристиках [1, 4–5, 10, 16] и использующие оценки собственных частот, коэффициентов демпфирования и модальных форм колебаний [10–11].

Методам анализа в частотной области и модальным методам присущ ряд недостатков: искажение спектров в случаях близких частот, больших коэффициентов демпфирования и исследования переходных процессов; необходимость использования реализаций большой длительности; увеличение погрешностей из-за преобразований данных наблюдения в частотную область; необходимость аппроксимации частотных кривых аналитическими зависимостями в целях нахождения оценок параметров собственных форм колебаний. Поэтому в настоящее время широко используются методы идентификации во временной области: метод Ибрагима [11–12], метод Прони (алгоритм оценки параметров комплексных экспонент методом наименьших квадратов) [5, 10, 17], метод специальных весовых функций [10], метод сглаживающего оператора [10, 16]. Однако эти методы имеют недостатки: отсутствует надежный механизм определения порядка модели; при их использовании приходится работать с переопределенными системами уравнений; возникают значительные погрешности в оценках параметров из-за избыточности информации в экспериментальных данных.

В данной статье предлагается развитие метода идентификации во временной области — метода Прони, применительно к решению обозначенной выше задачи.

Как подчеркивалось, большинство технических конструкций является системами с распределенными параметрами. Но для таких задач, как разработка устройств гашения

колебаний, отладка блоков управления и стабилизации, возникающих на стадии опытного проектирования изделий машиностроения, допустимо использование моделей с сосредоточенными параметрами.

Будем считать, что наблюдаемое в экспериментах поведение механической конструкции может быть описано математической моделью в виде системы связанных абсолютно твердых тел, имеющей  $n$  степеней свободы

$$M\ddot{\mathbf{q}}(t) + D\dot{\mathbf{q}}(t) + C\mathbf{q}(t) = U\mathbf{r}(t), \quad \mathbf{y}(t) = H\mathbf{q}(t), \quad (1)$$

где  $\mathbf{q}(t)$  и  $\mathbf{r}(t)$  —  $n$ -мерные векторы обобщенных координат и внешнего силового воздействия;  $\mathbf{y}(t)$  —  $m$ -мерный вектор наблюдаемых переменных ( $m < n$ );  $M, D, C, U$  — матрицы размерностью  $(n \times n)$  масс-инерционных коэффициентов, коэффициентов демпфирования, жесткости и внешнего силового возмущения соответственно;  $H$  — известная матрица  $(m \times n)$ , связывающая обобщенные координаты и наблюдаемые переменные. Число наблюдаемых переменных меньше числа обобщенных координат (например, измеряются только абсолютные линейные или угловые координаты исполнительного элемента). Для простоты изложения положим, что  $p = 2n/m$  — четное число. В силу того, что колебания механической системы считаются малыми, уравнения движения (1) полагаются линейными относительно основных конструктивных параметров: масс-инерционных коэффициентов, функций жесткости и диссипации. Особенность задачи заключается в том, что в качестве возмущений  $\mathbf{r}(t)$  используются кратковременные (импульсные или квазигармонические) периодические воздействия, наблюдаемая механическая система совершает свободные затухающие колебания в окрестности положения статического равновесия. На этих этапах уравнения (1) являются однородными.

Заметим, что с учетом сделанных предположений систему уравнений (1) можно спроектировать на пространство наблюдаемых переменных. В результате на промежутке свободных затухающих колебаний получим математическую модель механической конструкции в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений  $p$ -го порядка:

$$\mathbf{y}^{(p)} + A_1\mathbf{y}^{(p-1)} + \dots + A_{p-1}\dot{\mathbf{y}} + A_p\mathbf{y} = 0, \quad (2)$$

где верхний индекс обозначает порядок производной по времени; матрицы  $A_1, \dots, A_p$  размерностью  $(m \times m)$  однозначно определяются через матрицы  $M, D, C$  и  $H$ . Обратное преобразование, однако, не является однозначным.

Пусть в результате испытаний получена последовательность экспериментальных точек:  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(0)$ ,  $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}(\tau)$ , ...,  $\mathbf{y}_j = \mathbf{y}(j\tau)$ , ...,  $\mathbf{y}_s = \mathbf{y}(s\tau)$ , где  $\tau$  — шаг дискретизации (шаг квантования); таблица наблюдений содержит  $(s+1)$  точку.

Выделим следующие подзадачи идентификации, которые требуют решения на стадии опытной отработки вновь создаваемого изделия:

- идентификация параметров колебаний изделия — частот, логарифмических декрементов затухания, амплитуд, фаз, форм колебаний, а также параметров задаваемого силового воздействия;
- оценивание параметров математической модели — коэффициентов дифференциальных уравнений (1) или (2) и начальных условий;
- определение законов изменения жесткостных и демпфирующих свойств конструкции в зависимости от условий функционирования, параметров загрузки и внешнего возмущения;
- структурная идентификация — установление числа степеней свободы математической модели, выделение в ней подвижных массивных твердых элементов.

Для решения первых двух подзадач применялся один из вариантов метода Прони [17] в сочетании с алгоритмом сингулярного разложения матрицы наблюдений [3, 8, 13]. Метод основывается на адекватности решения системы линейных однородных дифференциальных уравнений и эквивалентной системы конечно-разностных уравнений того же порядка.

Согласно методу Прони данные наблюдений за процессом затухающих колебаний аппроксимировались конечно-разностными уравнениями, коэффициенты которых отыскивались методом наименьших квадратов с использованием сингулярного разложения матрицы системы. Тем самым автоматически формировался порядок дифференциальных уравнений (то есть количество значимых частот, присутствующих в исходных данных). Далее, для системы конечно-разностных уравнений находились комплексно-сопряженные собственные значения, по которым вычислялись значения частот и декрементов затухания исследуемых узлов создаваемой механической конструкции по всем выбранным в модели степеням свободы. В заключение по найденным параметрам определялись коэффициенты и порядок дифференциального уравнения (2).

Подзадача нахождения законов изменения жесткостных и демпфирующих характеристик математической модели (1) решалась в два этапа. На первом этапе осуществлялась разбивка расчетной схемы изделия на составляющие твердые тела и создавалась его усеченная модель вида (1) по выбранным обобщенным координатам. Уравнения проектировались на подпространство наблюдаемых координат. На втором этапе построенные дифференциальные уравнения вида (2) использовались для идентификации параметров математической модели (1). Получаемая система нелинейных алгебраических уравнений решалась относительно неизвестных коэффициентов жесткости и демпфирования. Масс-инерционные характеристики изделия брались в соответствии с конструкторской документацией.

Опишем кратко алгоритм определения числа степеней свободы и параметров колебаний механической конструкции при отсутствии кратных частот. Алгоритм включал в себя следующую последовательность шагов:

1. Для каждой измеряемой компоненты вектора  $\mathbf{y}(t)$  методом быстрого преобразования Фурье строилась амплитудно-частотная характеристика переходного процесса свободных затухающих колебаний и оценивалось приблизительное число значимых частот колебаний.

2. Дискретная модель конструкции формально представлялась в виде линейного авторегрессионного фильтра

$$\mathbf{y}_{j+p} + B_1 \mathbf{y}_{j+p-1} + \dots + B_{p-1} \mathbf{y}_{j+1} + B_p \mathbf{y}_j + B_0 = 0, \quad j = \overline{0, s-p}, \quad (3)$$

где  $B_1, \dots, B_p$  — неизвестные матрицы ( $m \times m$ ). Порядок системы уравнений выбирался с запасом, так, чтобы число собственных частот уравнения (3) оказалось не меньше числа значимых частот в известном из эксперимента дискретном спектре наблюдаемого процесса.

3. По данным наблюдений построчно решались  $m$  прямоугольных систем линейных уравнений (3) относительно неизвестных элементов матриц  $B_k$ . Заметим, что все они имеют одинаковую матрицу. Отыскивалось нормальное псевдорешение указанных систем уравнений (то есть вектор-решение, который может быть получен методом наименьших квадратов и имеет минимальную длину) методом сингулярного разложения [3, 13, 15]. При этом определялся эффективный ранг матрицы наблюдений и число значимых степеней свободы механической конструкции (эффективный порядок динамической модели).

Напомним, что сингулярным разложением любой прямоугольной матрицы  $X = X_{m \times n}$ , где  $m \geq n$ , называется представление ее в виде произведения трех матриц  $X = U \Sigma V^T$ . Здесь  $V = V_{n \times n}$  — ортогональная матрица ортонормированных собственных векторов  $v_i$  матрицы  $(X^T X)$ ;  $\Sigma = \Sigma_{n \times n} = \text{diag}(\sigma_i)_{n \times n}$  — диагональная матрица сингулярных чисел  $\sigma_i$ ;  $U = U_{m \times n}$  — левая ортогональная матрица, столбцы которой для каждого из ненулевых сингулярных чисел вычисляются по формулам  $u_i = X v_i / \sigma_i$ ,  $i = \overline{1, r}$ .

Сингулярное разложение несет информацию о структуре матрицы  $X$ . Так, если оно известно, то число участвующих в нем ненулевых сингулярных чисел задает ранг и число линейно независимых столбцов или строк матриц  $(X^T X)$  и  $X$ ; векторная норма матрицы  $X$  совпадает с наибольшим из сингулярных чисел [3]. Кроме того, малые возмущения (например, ошибки округления) в элементах матрицы  $X$  неполного ранга могут сделать все ее сингулярные числа ненулевыми и, следовательно, породить возмущенную матрицу, формально имеющую полный ранг. Поэтому на практике используется эффективный ранг, то есть количество сингулярных чисел, больших некоторой предписанной границы, отражающей точность данных. При выборе эффективного ранга отбрасываются малые сингулярные числа. Если ввести эффективный ранг матрицы  $X$  как  $k = \min_{\|X-Y\| < \varepsilon} (\text{rank}(Y)) < n$ , то матрица  $X_k = U_{m \times k} \Sigma_{k \times k} V_{k \times n}^T$

будет эффективным приближением матрицы  $X$ , а матрица  $X_k^+ = V_{n \times k} \Sigma_{k \times k}^{-1} U_{k \times m}^T$  — эффективной псевдообратной матрицей, обуславливающей нормальное псевдорешение системы линейных уравнений с прямоугольной матрицей [3, 15]. Введение эффективного ранга позволяет установить число линейно независимых столбцов в матрице наблюдений с учетом уровня погрешностей в исходных данных, за счет увеличения невязки уменьшить имеющуюся погрешность и повысить устойчивость процесса отыскания параметров математической модели. При идентификации механических конструкций сингулярное разложение позволяет оценить порядок усеченной математической модели, достаточной для описания объекта наблюдения с заданной точностью.

4. Определялись корни  $\mu_k = u_k \pm i v_k$  характеристического уравнения

$$\det(E\mu^p + B_1\mu^{p-1} + \dots + B_{p-1}\mu + B_p) = 0.$$

Известно, что комплексно-сопряженные корни характеристических уравнений эквивалентных между собой непрерывных дифференциальных и конечно-разностных моделей связываются соотношением [10, 17]:

$$e^{(\beta_k + i\omega_k)\tau} = u_k \pm i v_k. \quad (4)$$

Здесь  $\lambda_k = \beta_k \pm i \omega_k$  — корни характеристического уравнения системы дифференциальных уравнений (2).

5. С использованием формулы (4) вычислялись логарифмические декременты  $\beta_k$  и круговые частоты  $\omega_k$  собственных колебаний механической конструкции. После этого отбрасывались корни, которые содержали не учитываемые в модели параметры колебаний. Для этого устанавливались пороговые значения для абсолютных величин логарифмических декрементов  $\beta_k$  и собственных частот  $\omega_k$  и отсекались все корни  $\lambda_k$ , действительные и мнимые части которых оказывались больше заданных порогов, то есть отсекались высокочастотные и быстро затухающие формы колебаний объекта наблюдений. Количество оставшихся корней соответствовало числу значимых степеней свободы  $n$ . Это означало, что математическая модель наблюдаемого переходного

процесса колебаний описывалась системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида (2)  $p$ -го порядка, где  $p = 2n/m$ .

6. Далее из системы уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\left[\left(E\lambda_k^p + A_1\lambda_k^{p-1} + \dots + A_{p-1}\lambda_k + A_p\right)\mathbf{w}_k\right] = 0, \\ \operatorname{Im}\left[\left(E\lambda_k^p + A_1\lambda_k^{p-1} + \dots + A_{p-1}\lambda_k + A_p\right)\mathbf{w}_k\right] = 0, \end{cases} \quad k = \overline{1, n} \quad (5)$$

определялись коэффициенты динамической модели (2), записанной в наблюдаемых переменных. В уравнениях (5) приняты обозначения:  $\mathbf{w}_k$  — собственные векторы уравнений (3), соответствующие собственным значениям  $\mu_k$  и удовлетворяющие векторному уравнению  $(E\mu_k^p + B_1\mu_k^{p-1} + \dots + B_{p-1}\mu_k + B_p)\mathbf{w}_k = 0$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

Опишем теперь порядок определения коэффициентов жесткости и демпфирования математической модели (1) по данным измерений переходных процессов свободных затухающих колебаний механической конструкции.

Будем считать, что коэффициенты матрицы инерции  $M$  можно определить исходя из конструкторской документации на изделие. Пусть модель механической конструкции состоит из набора тел, связанных между собой линейными упруго-демпфирующими элементами. Тогда неизвестными параметрами математической модели, записанной в обобщенных координатах, являются  $2n$  приведенных коэффициентов  $\{c_k\}_n$  и  $\{d_k\}_n$  диагональных матриц жесткости  $C$  и демпфирования  $D$ .

Заметим, что если бы вектор наблюдаемых переменных совпадал со всем вектором обобщенных координат, то элементы матриц жесткости и демпфирования однозначно определялись бы из линейных уравнений

$$(M\lambda_k^2 + D\lambda_k + C)\mathbf{w}_k = 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (6)$$

В решаемой здесь задаче идентификации число наблюдаемых переменных меньше числа обобщенных координат, учитываемых в модели (1). Поэтому, исходя из условия существования нетривиального решения уравнений (6), можно утверждать только то, что матрицы демпфирования  $D$  и жесткости  $C$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\left[\det(M\lambda_k^2 + D\lambda_k + C)\right] = 0, \\ \operatorname{Im}\left[\det(M\lambda_k^2 + D\lambda_k + C)\right] = 0, \end{cases} \quad (7)$$

которая уже является нелинейной относительно неизвестных коэффициентов.

К системе уравнений (7) можно применить любой известный итерационный метод, предназначенный для решения нелинейных алгебраических уравнений, например, метод Ньютона. В результате получим  $n$  наборов приведенных коэффициентов жесткости  $\{c_k\}_n$  и демпфирования  $\{d_k\}_n$ . Заметим, что решение системы уравнений (7) не является однозначным. Для выделения нужного набора необходимо привлечь дополнительную информацию об идентифицируемой механической конструкции. Во-первых, сразу можно исключить наборы, содержащие комплексные и отрицательные коэффициенты демпфирования и жесткости. Во-вторых, можно исключить лишние наборы коэффициентов за счет привлечения результатов статических и динамических испытаний. При этом в процессе испытаний должны оцениваться либо начальные условия по линейно независимым переменным состояния механической конструкции, либо характеристики внешнего силового воздействия.

Алгоритм идентификации упруго-демпфирующих параметров модели включал следующие шаги:

1. Для каждого набора элементов матриц  $D$  и  $C$  из системы однородных линейных уравнений (6) находились комплексно-сопряженные собственные векторы  $\mathbf{w}_k$ ,  $\mathbf{w}_k^*$ . Заметим, что при этом можно использовать любое получаемое нетривиальное частное решение.

2. Из уравнений

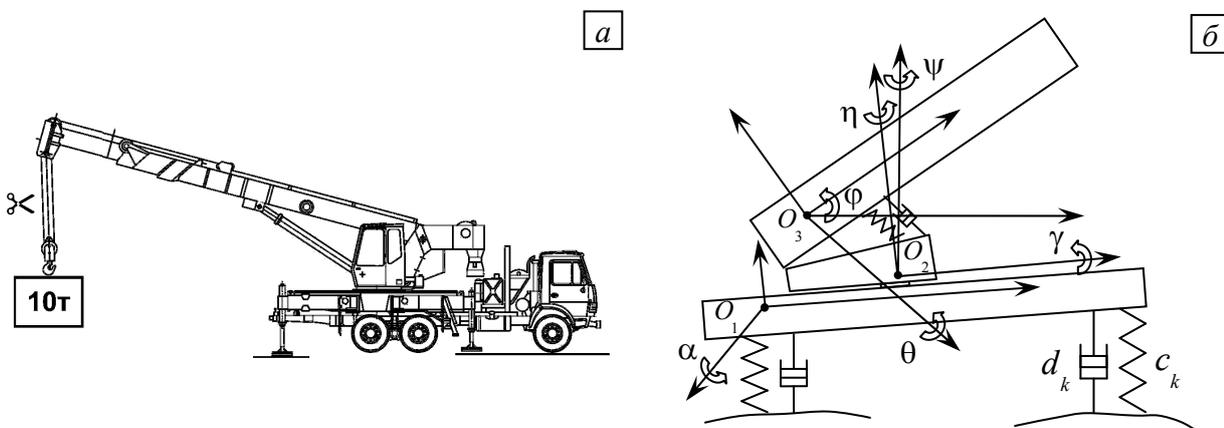
$$HW(\tau_j)\mathbf{c} = H \left\{ \mathbf{w}_k e^{\lambda_k \tau_j} \mid \mathbf{w}_k^* e^{\lambda_k^* \tau_j} \right\} \mathbf{c} = H \left\{ \mathbf{w}_k \mu_k^j \mid \mathbf{w}_k^* \mu_k^{*j} \right\} \mathbf{c} = \mathbf{y}_j, \quad (8)$$

записываемых для всех моментов времени  $j\tau$ , где  $j = \overline{0, m}$ , методом наименьших квадратов определялись комплексные амплитуды свободных затухающих колебаний  $\mathbf{c} \in R^{2n}$ .

Зная комплексные амплитуды, можно легко восстановить амплитуды и фазы всех форм свободных затухающих колебаний механической конструкции и начальные условия  $\mathbf{q}^{(k)}(0) = W^{(k)}(0)\mathbf{c}$  (где  $k = 0, 1$  — порядок производной) для интегрирования уравнений (1). Анализируя начальные значения компонент фазового вектора  $\mathbf{q}^{(k)}(0)$  и сравнивая их с результатами статических или динамических испытаний, а также используя известные исходные параметры расчетной схемы механической конструкции, в большинстве случаев можно однозначно выделить тот набор коэффициентов жесткости  $c_k$  и демпфирования  $d_k$ , при котором реализуется наблюдаемое в эксперименте поведение создаваемого изделия.

В заключение приведем результаты решения задачи идентификации динамических параметров колебаний некоторого транспортно-погрузочного устройства (крана), размещенного на автомобиле (Рис. 1, а). Изучалось динамическое поведение крана после мгновенного снятия нагрузки (в эксперименте эта ситуация моделировалась обрывом переносимого груза). В качестве данных наблюдений выступали записи абсолютных угловых колебаний стрелы крана в двух плоскостях.

На основе анализа результатов испытаний сначала определялись параметры колебаний: амплитудно-частотная характеристика (АЧХ); количество и значения собственных частот; значения логарифмических декрементов колебаний, амплитуд, средних амплитуд и фаз в горизонтальной (угол  $\psi$ ) и вертикальной (угол  $\varphi$ ) плоскостях колебаний стрелы крана (Рис. 1, б). Примеры АЧХ представлены на рисунке 2.



**Рис. 1.** Кран КС-5579-22 «Мотовилиха» (а) и его расчетная схема после идентификации параметров модели (б):  $\alpha$ ,  $\theta$  – углы тангажа автомобильной базы и стрелы;  $\eta$ ,  $\gamma$  – углы рыскания и крана поворотного механизма;  $c_k$  и  $d_k$  – коэффициенты жесткости и демпфирования элементов связи

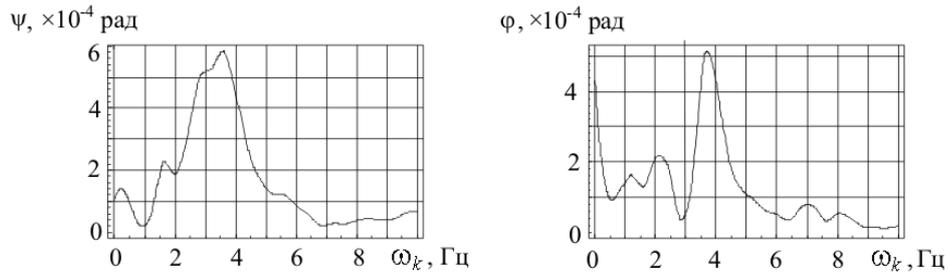


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики стрелы крана

Затем из сравнения АЧХ и найденных параметров колебаний определялись основные частоты и декременты колебаний, вносящие наибольший вклад в переходный колебательный процесс.

Результаты выбора представлены в таблице 1, где для параметров колебаний приняты обозначения:  $\omega_k$  — частота,  $\beta_k$  — логарифмический декремент,  $-\ln 2/\beta_k$  — период полузатухания,  $A_\psi$ ,  $A_\phi$  — амплитуды по углам  $\psi$  и  $\phi$ ,  $A_\psi^{cp}$ ,  $A_\phi^{cp}$  — средние амплитуды по углам  $\psi$  и  $\phi$  на отрезке идентификации,  $K_{\psi\bar{\psi}}$ ,  $K_{\phi\bar{\phi}}$  — коэффициенты корреляции линейной связи между данными наблюдений и результатами идентификации.

Таблица 1. Основные параметры колебаний стрелы крана

| $k$ | $\omega_k$ ,<br>Гц | $\beta_k$ ,<br>1/с | $-\ln 2/\beta_k$ ,<br>с | $A_\psi$ ,<br>рад | $A_\phi$ ,<br>рад | $A_\psi^{cp}$ ,<br>рад | $A_\phi^{cp}$ ,<br>рад | $K_{\psi\bar{\psi}}$ | $K_{\phi\bar{\phi}}$ |
|-----|--------------------|--------------------|-------------------------|-------------------|-------------------|------------------------|------------------------|----------------------|----------------------|
| 1   | 1,155              | -6,77              | 0,102                   | 0,0112            | 0,0055            | 0,0006                 | 0,0003                 | 0,883                | 0,895                |
| 2   | 2,169              | -1,52              | 0,455                   | 0,0046            | 0,0008            | 0,0012                 | 0,0002                 |                      |                      |
| 3   | 3,179              | -3,67              | 0,189                   | 0,0010            | 0,0062            | 0,0011                 | 0,0008                 |                      |                      |
| 4   | 3,766              | -1,98              | 0,349                   | 0,0035            | 0,0069            | 0,0007                 | 0,0015                 |                      |                      |

На рисунке 3 для сравнения приведены зависимости от времени исходных данных наблюдений (сплошная линия) и гармонического разложения, полученного по результатам идентификации, с представленными в таблице 1 параметрами колебаний (пунктирная линия). Графики подтверждают эффективность использования метода Прони для решения поставленной задачи идентификации.

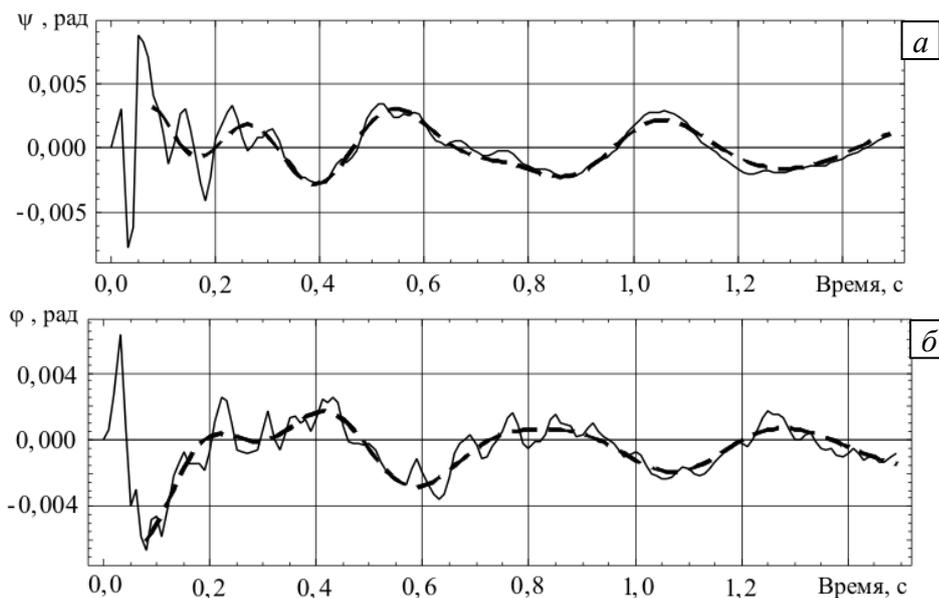


Рис.3. Сравнительные графики колебаний

Анализ результатов идентификации показал, что после снятия динамического нагружения свободные колебания элементов механической системы приближенно можно описать суммой четырех гармоник. При этом коэффициент корреляции между данными наблюдений и результатами идентификации оказался не ниже 0,88. Таким образом, после определения параметров колебаний удалось установить, что динамику свободных затухающих колебаний крана можно приближенно описать системой из четырех линейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка.

Из таблицы 1 видно, что частотам  $\omega_k$  ( $k = 1, 2$ ) отвечают максимальные амплитуды колебаний стрелы крана в горизонтальной плоскости, а частотам  $\omega_k$  ( $k = 3, 4$ ) — максимальные амплитуды в вертикальной плоскости. Также частота  $\omega_4$  влияет на горизонтальные колебания — ей соответствует следующее по величине значение амплитуды  $A_\psi$ ,  $\omega_1$  — влияет на вертикальные колебания — ей соответствует следующее по величине значение амплитуды  $A_\varphi$ . Таким образом, данные свидетельствуют, что в вертикальной и горизонтальной плоскостях можно выделить по две основные степени свободы. При этом проявляется взаимосвязь колебаний стрелы крана в двух плоскостях, что может быть объяснено влиянием его подвижности в плоскости крана. Выделенные обобщенные координаты показаны на рисунке 1, б.

Проведенные исследования и анализ конструкторской документации позволили построить расчетную схему в виде обладающей четырьмя степенями свободы системы трех абсолютно твердых тел (автомобильной базы, поворотного механизма крана и стрелы), связанных линейными упруго-демпфирующими элементами, а также получить линеаризованные уравнения движения в виде (1). Далее определялись наборы коэффициентов жесткости и демпфирования математической модели (1), при которых результаты численного интегрирования уравнений движения соответствовали наблюдаемым выборкам. По известным начальным условиям (углам отклонения элементов конструкции и нулевым начальным скоростям) выбирались значения коэффициентов жесткости и демпфирования, которые представлены в таблице 2. Приведены значения параметров жесткости и демпфирования, полученные в результате обработки данных двух испытаний.

Таблица 2. Значения коэффициентов жесткости и демпфирования

| № испытания  | $c_\alpha$ ,<br>Нм/рад | $d_\alpha$ ,<br>Нмс/рад | $c_\theta$ ,<br>Нм/рад | $d_\theta$ ,<br>Нмс/рад | $c_\gamma$ ,<br>Нм/рад | $d_\gamma$ ,<br>Нмс/рад | $c_\eta$ ,<br>Нм/рад | $d_\eta$ ,<br>Нмс/рад |
|--|------------------------|-------------------------|------------------------|-------------------------|------------------------|-------------------------|----------------------|-----------------------|
| $\varphi(0) = 16^\circ$ , $\psi(0) = -30^\circ$        |                        |                         |                        |                         |                        |                         |                      |                       |
| 1  | $4,9 \cdot 10^7$       | 520000                  | $9,4 \cdot 10^6$       | 116000                  | $1,1 \cdot 10^6$       | 178000                  | $5,5 \cdot 10^6$     | 44000                 |
| 2  | $4,3 \cdot 10^7$       | 669000                  | $1,0 \cdot 10^7$       | 75000                   | 754000                 | 110000                  | $3,7 \cdot 10^6$     | 35000                 |
| Относительные отклонения результатов двух испытаний, % |                        |                         |                        |                         |                        |                         |                      |                       |
|  | 12                     | 22                      | 6                      | 35                      | 31                     | 38                      | 33                   | 20                    |

Данные из таблицы 2 показывают, что коэффициенты жесткости и демпфирования, полученные в разных испытаниях, согласуются друг с другом. Видно, что коэффициенты жесткости имеют меньший разброс, чем коэффициенты демпфирования. Кроме того, значение коэффициента жесткости по углу тангажа автомобиля ( $c_\alpha = 4,5 \cdot 10^7$  Н·м/рад), вычисленное с использованием конструкторской документации, оказалось близким к значениям, оцененным по результатам испытаний.

Из приведенного примера следует, что описанные в статье методы структурной и параметрической идентификации позволяют с достаточной для инженерных расчетов степенью точности оценивать структуру расчетной схемы и численные значения параметров математической модели проектируемой механической конструкции на этапе отработки опытных образцов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-01-96024-р\_Урал\_а).

## Литература

1. *Берестов Л.М., Поплавский Б.К., Мирошниченко Л.Я.* Частотные методы идентификации летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1985. – 184 с.
2. *Волков И.К.* К задаче параметрической идентификации непрерывных моделей управляемых систем // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1989. – № 1. – С. 101-104.
3. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. – М.: Мир, 1999. – 548 с.
4. *Гроп Д.* Методы идентификации систем. – М.: Мир, 1979. – 304 с.
5. *Девис П., Хэммонд Дж. К.* Сравнение метода преобразования Фурье и параметрических методов идентификации конструкций // Труды амер. об-ва инж.-мех. Серия В. – 1984. – № 1. – С. 38-48.
6. *Иванов В.Н., Пигилев О.А., Суслонов В.М.* Алгоритм определения параметров колебаний механических систем на основе экспериментальных данных // Проблемы механики управляемого движения. Нелинейные динамические системы. – Пермь: Изд. ПГУ, 1990. – С. 41-44.
7. *Икердт Р., Модель Н., Хайманн Т.* Некоторые проблемы идентификации динамических систем посредством линейных моделей // Успехи механики (ПНР). – 1980. – Т. 3, № 4. – С. 91-112.
8. *Лоусон Ч., Хенсон Р.* Численное решение задач метода наименьших квадратов. – М.: Наука, 1986. – 232 с.
9. *Рёттер Ф.* Усовершенствованный метод идентификации механических систем многих тел по дискретным данным. Дифференциальная идентификация линейных механических систем // Труды амер. об-ва инж.-мех. Серия В. – 1988. – № 1. – С. 229-237.
10. *Редько С.Ф., Ушкалов В.Ф., Яковлев В.П.* Идентификация механических систем. – Киев: Наукова думка, 1985. – 314 с.
11. *Силверберг Л., Канн С.* Вариационный метод модальной идентификации консервативных негироскопических систем // Современное машиностроение. Серия Б. – 1990. – № 1. – С. 21-31.
12. *Фассуа С., Эман К., Ву С.* Метод линейной идентификации динамических характеристик конструкций во временной области // Современное машиностроение. Серия Б. – 1990. – № 6. – С. 128-137.
13. *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980. – 282 с.
14. *Чжо Д., Имэн К., Ву С.* Новый метод анализа форм колебаний во временной области у систем с несколькими входами // Труды амер. об-ва инж.-мех. Серия В. – 1988. – № 3. – С. 75-86.
15. *Шевцов Г.С., Крюкова О.Г., Мызникова Б.И.* Численные методы линейной алгебры. – М.: Финансы и статистика, ИНФРА-М, 2008. – 480 с.
16. *Эйкхофф П.* Основы идентификации систем управления. – М.: Мир, 1975. – 687 с.
17. *Ян Е.* Метод идентификации во временной области с использованием матриц собственных векторов избыточной размерности // Труды амер. об-ва инж.-мех. Серия В. – 1980. – № 1. – С. 3-7.

Поступила в редакцию 25.05.11

---

### Сведения об авторах

*Иванов Владимир Николаевич*, ктн, доц., Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15; E-mail: pocol@psu.ru

*Домбровский Игорь Викторович*, ктн, доц., Пермский национальный исследовательский политехнический университет (ПНИПУ), 614990, г. Пермь, Комсомольский пр., д. 29; E-mail: dombrovski\_iv@mz.perm.ru

*Шевелев Николай Алексеевич*, дтн, проректор, ПНИПУ; E-mail: n.shevelev@pstu.ru