

УДК: 539.375, 539.32, 539.422.52

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ПОДАТЛИВОСТИ ПОДЛОЖКИ НА НАПРЯЖЕНИЯ, ВЫЗЫВАЮЩИЕ ПОТЕРЮ УСТОЙЧИВОСТИ ОТСЛОИВШЕГОСЯ ПОКРЫТИЯ

Р.В. Гольдштейн, К.Б. Устинов, А.В. Ченцов

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Рассмотрена задача потери устойчивости отслоившегося от подложки покрытия вследствие наличия в нем собственных деформаций сжатия, вызванных, например, нагревом. Предложены аналитические и численные (конечно-элементные) варианты решения. Модельное аналитическое решение для деформируемого покрытия получено в рамках классической теории тонких пластин. В двумерной постановке решена задача потери устойчивости сжатой в собственной плоскости пластины, моделирующей покрытие, скрепленной всюду, за исключением некоторой области отслоения, с упругой подложкой, рассматриваемой как бесконечное упругое тело. Получено выражение для критического сжимающего напряжения и показано, что отличие его величины от величины критического напряжения, соответствующего жестко заземленной пластине, определяется единым безразмерным параметром, представляющим собой комбинацию упругих констант покрытия и подложки и отношения длины отслоения к толщине покрытия. Проанализированы альтернативные варианты записи граничных условий и условий контакта покрытия и подложки. Полученные результаты хорошо коррелируют с результатами проведенных конечно-элементных расчетов.

Ключевые слова: покрытие, отслоение, потеря устойчивости, критическое напряжение, пластина, упругая заделка, упругое основание

INFLUENCE OF SUBSTRATE COMPLIANCE ON STRESSES GENERATING STABILITY LOSS OF A DELAMINATED COATING

R.V. Goldstein, K.B. Ustinov and A.V. Chentsov

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

The problem of stability loss of a coating delaminated from the substrate due to the presence of intrinsic compressive deformations caused, for example, by heating is considered. Analytical and numerical (finite-element) solutions are obtained. The analytical solution is found within the framework of a classical thin plate theory. The two-dimensional problem of stability loss of a plate compressed in its own plane, which simulates a covering, is studied. The plate is bonded to an elastic substrate treated as an infinite elastic body almost everywhere except over a certain delaminated zone. An expression for the critical compressive stress is derived. It is shown that the difference between the obtained critical stress and the critical stress of a rigidly clamped plate can be defined by a single nondimensional parameter, which is a combination of the elastic constants of the coating and substrate, and the ratio of delamination length to coating thickness. Alternative boundary conditions and coating-substrate contact conditions are considered. These results correlate well with the results obtained using the FEM model.

Keywords: coating, delamination, buckling, critical stress, plate, elastic clamping, elastic foundation

1. Введение

Интерес к изучению эффектов, связанных с отслоением покрытий, вызывается важностью данной задачи, имеющей приложения в микро- и нанoeлектронике, биологии и других областях. Вопросам отслоения покрытий и потери устойчивости посвящено большое количество работ, например [1–8], обзоры можно найти в [6, 8]. Так, в работе [3], в частности, решена задача потери устойчивости отслоившегося участка покрытия в случае жесткой подложки с прямолинейной поверхностью. Найдено критическое

напряжение потери устойчивости, величина выпучивания, скорости высвобождения энергии вдоль и поперек фронта распространения отслоения, а также коэффициенты интенсивности напряжений K_I и K_{II} на границе отслоения. Отслоившийся участок рассматривался в виде защемленной по краям пластины. Данные граничные условия соответствуют жестким подложкам. Однако детальные исследования показывают, что, с одной стороны, условия жесткой заделки не выполняются точно даже для абсолютно жестких подложек [5], а с другой стороны, на основании результатов численного счета утверждается [6, 8], что даже для подложек, в три раза более мягких по сравнению с покрытием, приближение жесткой заделки дает не слишком заметную ошибку. К последнему утверждению, по нашему мнению, следует относиться с осторожностью, поскольку в [6] не исследовалось влияние длины отслоения, существенность которого подтверждается результатами других работ [5, 9].

Влияние жесткости подложки изучалось в [4–6]. При этом в [4, 6] взаимосвязь относительной жесткости подложки с параметрами отслоения (напряжением потери устойчивости, величиной выпучивания) устанавливалась без учета влияния на эти параметры ширины отслоения. В [5] проводился анализ совместного влияния относительной жесткости подложки и отношения ширины отслоения к ее толщине на величину напряжения потери устойчивости. Отслоение по-прежнему моделировалось участком пластины, для которой граничные условия записывались как условия обобщенной упругой заделки, то есть величины производной прогиба и тангенциального смещения в точке заделки считались пропорциональными продольной силе и изгибающему моменту, действующим в точке заделки. Сами же коэффициенты упругой заделки, зависящие от двух названных параметров, находились путем численного решения системы интегральных уравнений [10].

В настоящей работе рассматриваются модели, описывающие процесс потери устойчивости участком отслоившегося покрытия, предложенные в [9]. В основе моделей, подобно [3, 5], лежит представление отслоившегося участка покрытия как двумерной пластины в рамках классической теории изгиба тонких пластин. Граничные условия записываются не в виде условия жесткого защемления, а в виде либо условий упругой заделки, либо полагается, что пластина покоится на упругом основании. Однако, в отличие от [5], в настоящей работе предпринимается попытка определить коэффициенты заделки аналитически либо полуаналитически на основе модельных представлений. При этом в рамках рассматриваемых моделей, оправданных для широкого диапазона параметров (упругих констант покрытия и подложки и отношения длины отслоения к толщине покрытия), отличие величины критического напряжения от соответствующей величины для жестко защемленной пластины определяется единым безразмерным параметром, представляющим собой комбинацию указанных параметров.

В предлагаемой вниманию работе не рассматриваются вопросы, связанные с процессом дальнейшего отслоения, а также с определением величины выпучивания отслоившейся зоны. Это — предмет последующих самостоятельных исследований. Некоторые оценки величины выпучивания отслоившейся зоны сделаны авторами данной работы в [9].

2. Постановка задачи

Рассмотрим упругую подложку 1, моделируемую полуплоскостью, к границе которой примыкает покрытие 2, представляемое как упругая полоса (пластина) толщиной h с отличающимися от подложки свойствами (Рис. 1, *a*). Модули Юнга и коэффициенты Пуассона покрытия и подложки, соответственно, — E, ν, E_s, ν_s . Полоса и полуплоскость имеют полный контакт всюду, за исключением участка длиной $2b$, вдоль которого произошло отслоение. Система декартовых координат выбрана так, что

ось x параллельна границе полуплоскости, а ось y направлена вдоль ее внешней нормали и совпадает с осью симметрии расчетной области. Начало координат лежит в среднем сечении полосы до деформирования. Таким образом, полуплоскость занимает область ($y < -h/2$), полоса — ($-h/2 < y < h/2$), отслоение — ($-b < x < b$, $y = -h/2$). Нормальные и касательные напряжения на берегах отслоения и на верхней границе полосы $y = h/2$ равны нулю.

Предполагается, что полоса подвергается действию собственных деформаций растяжения, вследствие которых появляются сжимающие напряжения σ_0 , действующие вдоль пластины. Такое напряженно-деформированное состояние может возникнуть, например, при нагреве рассматриваемой конструкции, если коэффициент теплового расширения материала полосы выше, чем коэффициент теплового расширения материала полуплоскости. При достижении напряжениями σ_0 некоторого критического значения σ^{cr} система теряет устойчивость, отслоившаяся часть покрытия изгибается, а центр отслоения смещается в направлении оси y относительно своего первоначального положения на величину δ (Рис. 1, б). Задача состоит в отыскании критического значения напряжения σ_0 , при котором происходит потеря устойчивости.

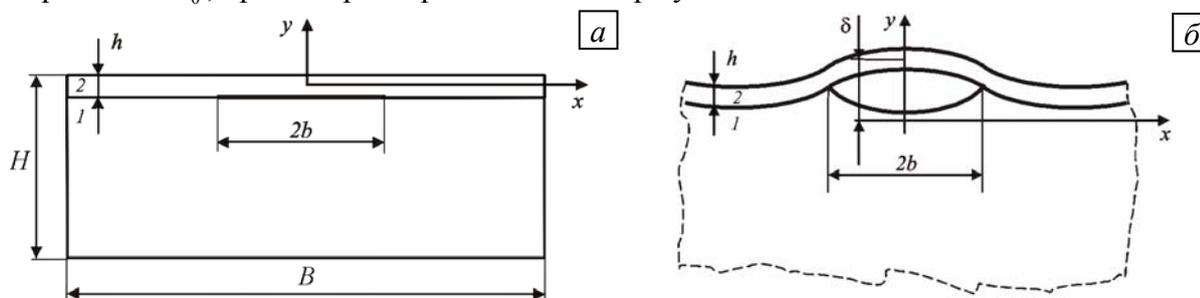


Рис. 1. Геометрия области до (а) и после (б) деформирования; 1 – полуплоскость (подложка); 2 – полоса (покрытие)

Поставленная задача решалась в работе [6] методом конечных элементов (МКЭ). При этом величина критического напряжения σ^{cr} представлялась как произведение величины σ_0^{cr} , рассчитанной для пластины в условиях жесткой заделки, на некоторый коэффициент γ_σ , который и был объектом численного поиска:

$$\sigma^{cr} = \sigma_0^{cr} \gamma_\sigma. \quad (1)$$

Величина σ_0^{cr} для пластины длиной $2b_0$ находится элементарно [11]:

$$\sigma_0^{cr} = \pi^2 h^2 E^* / (12b_0^2), \quad E^* = E / (1 - \nu^2). \quad (2)$$

В настоящей работе поиск коэффициента γ_σ осуществлялся на основе соотношений классической теории пластин; рассмотрены два варианта постановки задачи. В первом варианте участок отслоения рассматривался как пластина с граничными условиями типа упругой заделки, во втором — как пластина, опирающаяся на упругое основание.

3. Модель упругой заделки

Рассмотрим первый вариант задачи, в котором участок отслоения моделируется как пластина с граничными условиями типа упругой заделки (упругого шарнира).

Итак, для участка $|x| < b$ прогиб пластины $u_1(x)$, представляющей покрытие, определяется из уравнения

$$E^* h^3 / 12 u_1^{IV}(x) + \sigma h u_1''(x) = 0. \quad (3)$$

Здесь σ — сжимающее напряжение в сечении пластины, не равное, вообще говоря, σ_0 . Отличие σ от σ_0 есть результат релаксации, обусловленной искривлением участка пластины и, как следствие, изменением его длины.

Общее решение уравнения (3) имеет вид

$$u_1(x) = A_1 \cos kx + A_2, \quad |x| < b, \quad (4)$$

$$k = \sqrt{12\sigma^{cr} / (E^* h^2)}. \quad (5)$$

Константы A_i подлежат определению из граничных условий. В точках $x = \pm b$ запишем условие упругой заделки

$$u_1'(x)|_{x=b} = d h u_1''(x)|_{x=b}. \quad (6)$$

Здесь $(d \cdot h)$ есть коэффициент пропорциональности между углом наклона в заделке и второй производной от смещения пластины, пропорциональной в свою очередь, действующему в данном сечении моменту; d — безразмерный коэффициент. Появление в условии (6) толщины пластины h вызвано необходимостью согласования размерности его левой и правой частей: толщина — единственный параметр задачи соответствующей размерности (жесткость упругой заделки не может зависеть от размера пластины $2b$, поскольку она является внешним параметром). Подробное обоснование моделей упругой заделки можно найти в [12, 16].

Входящий в условие (6) коэффициент d не может быть определен в рамках элементарной теории пластин. Его выражение получено в работе [18] на основе модели, в которой покрытие рассматривалось как двумерная пластина, а подложка — как полубесконечный упругий массив. Решение найдено при помощи преобразования Фурье и последующего использования метода Винера–Хопфа. Выражение для d есть $d = d_0 \sqrt[3]{E^* / E_s^*}$, где $d_0 = 2^{2/3} 3^{-5/6} \approx 0,636$, $E^* = E / (1 - \nu^2)$; $E_s^* = E_s / (1 - \nu_s^2)$. Подстановка значений производных прогиба (4) в граничное условие (6) дает соотношение $\text{tg}(kb) + kb \cdot dh/b = 0$, откуда для условий жесткой заделки следует, что

$$k = k_0 = \pi/b. \quad (7)$$

Учитывая (7), а также выражения (1) и (5), получим уравнение для определения γ_σ :

$$\text{tg}(\pi\sqrt{\gamma_\sigma}) + d_0 \beta \pi \sqrt{\gamma_\sigma} = 0, \quad (8)$$

где

$$\beta = (h/b) \sqrt[3]{E^* / E_s^*}. \quad (9)$$

Отсюда видно, что отличие критического напряжения, возникающего в рассматриваемой модели, от напряжения, вычисленного при условии абсолютно жесткой заделки, определяется не отдельно упругими и геометрическими параметрами модели, а их комбинацией — единым безразмерным параметром, названным β .

В работе [5] (см. выражения (10)–(17)), на основании модельных представлений, близких к используемым здесь, найдено выражение для критического напряжения

потери устойчивости отслоения в неявной форме. Для этого решалась система уравнений, аналогом которых является уравнение (8). Более сложный вид соотношений работы [5] обусловлен использованием ее авторами теории изгиба фон Кармана, по-иному учитывающей вклад продольного сжатия. В указанной работе зависимость коэффициентов системы уравнений (в том числе коэффициента $d_0\beta$ в принятых в данной работе обозначениях) от упругих и геометрических параметров модели определялась путем численного решения системы интегральных уравнений.

Уравнение (8) можно получить из системы уравнений работы [5], если обнулить в них коэффициент обобщенной упругой заделки, отвечающий за связь угла наклона пластины, моделирующей отслоение, с продольной силой. Можно показать, что влияние этого коэффициента, а, следовательно, и разница между полученным решением и решением из работы [5], уменьшается с увеличением значений b/h и E/E^s .

Отметим также, что если исходить из асимптотических решений [12–14], найденных для идентичных материалов пластины и подложки из анализа точного решения [15], в которых отслоившееся покрытие не считалось пластиной и учитывались действия как нормальных, так и касательных напряжений, то получим следующее значение коэффициента: $d = 0,620$. Разница между значением d , вычисленным согласно данной модели, и асимптотически точным решением составляет менее 3%.

Зависимость γ_σ от β для пластины с граничными условиями типа упругой заделки представлена на рисунке 2 (кривая 1). Как и следовало ожидать, в предельных случаях граничных условий — жесткой заделке ($\beta \rightarrow 0$) и опоры ($\beta \rightarrow \infty$), значения γ_σ стремятся к значениям, отвечающим классическим решениям, соответственно, $\gamma_\sigma = 1$ и $\gamma_\sigma = 1/4$.

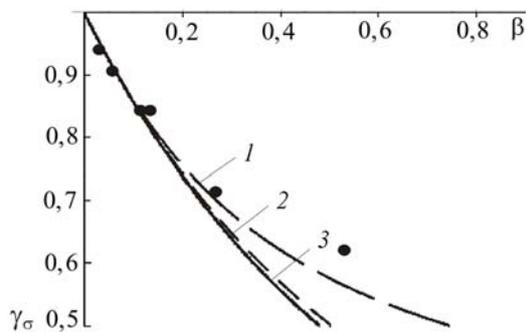


Рис. 2. Зависимость γ_σ от β :

для пластины с граничными условиями типа «упругая заделка» (кривая 1); согласно модели «пластина на упругом основании с учетом влияния сжимающих напряжений» (2); то же, но без учета влияния сжимающих напряжений (3); точками показаны результаты численных расчетов

4. Модель пластины на упругом основании

Аналитическое решение поставленной задачи получено в рамках классической теории тонких пластин, согласно которой прогиб пластины, представляющей покрытие, удовлетворяет уравнению

$$E^* (h^3/12) u^{IV}(x) + \sigma(x) h u''(x) + g u(x) = 0. \quad (10)$$

Здесь $u(x) = u_1(x)$ для $|x| > b$; g — эффективная жесткость упругого основания. На участке $|y| < b$ упругое основание отсутствует ($g = 0$), продольные напряжения постоянны — $\sigma(x) = \sigma^{cr} = \text{const}$, и общее решение уравнения (10) имеет вид (4), в котором константы A_i подлежат определению из граничных условий.

Для участков, где контакт покрытия с подложкой не нарушен, прогиб находим из решения задачи деформирования полуплоскости с заданным распределением нормальных смещений. При этом величина g оказывается существенно зависящей от характерных расстояний, на которых происходит изменение граничных условий.

Так, для синусоидальных смещений с длиной волны λ согласно [7] имеем

$$g = \pi E_s^* / \lambda. \quad (11)$$

Здесь величина E_s^* обуславливается типом граничного условия вдоль линии контакта покрытия с подложкой. Поскольку в строгой постановке задачи граничное условие терпит разрыв (в месте отслоения отсутствуют касательные напряжения, а в месте контакта — скачки горизонтальных смещений) и получение точного аналитического решения едва ли возможно, то для оценок можно использовать крайние случаи: отсутствие либо горизонтальных смещений $u(x) = 0$, либо касательных напряжений вдоль всей нижней границы покрытия. В первом случае значение входящего в (11) приведенного модуля Юнга E_s^* определяется как $E_s^* = E_s(1 - \nu_s) / [(1 + \nu_s)(3/4 - \nu_s)]$. Аналогичное выражение во втором случае отличается от приведенного лишь коэффициентом, зависящим от коэффициента Пуассона материала полуплоскости, и вычисляемым по второй из формул (2). Это выражение и будем использовать в дальнейшем.

Заметим, что задача потери устойчивости системы покрытие–подложка представляет наибольший интерес при напряжениях, не превышающих напряжения глобальной потери устойчивости подобной же системы в отсутствие отслоений. Поэтому в первом приближении для участков $|x| > b$ пренебрегаем вторым членом в уравнении (10), связанным с действием продольных напряжений (влияние соответствующих поправок будет рассмотрено ниже). В силу симметрии задачи относительно оси ординат рассматриваем только область $x > b$. Общее решение уравнения (10), не возрастающее на бесконечности, будет иметь вид:

$$u_2(x) = A_3 e^{-\alpha(x-b)} \cos \alpha(x-b) + A_4 e^{-\alpha(x-b)} \sin \alpha(x-b), \quad x > b, \quad (12)$$

$$4\alpha^4 = 12g / (E^* h^3). \quad (13)$$

Константы A_i в выражениях (4) и (12) находим из условий сопряжения смещения и его производных в точке $x = b$:

$$\begin{aligned} u_1(b) &= u_2(b), \\ u_1'(x)|_{x=b} &= u_2'(x)|_{x=b}, \quad u_1''(x)|_{x=b} = u_2''(x)|_{x=b}, \quad u_1'''(x)|_{x=b} = u_2'''(x)|_{x=b}. \end{aligned} \quad (14)$$

Подстановка значений прогиба и его производных, полученных из общих решений (4) и (12), в граничные условия (14) дает систему четырех однородных линейных алгебраических уравнений относительно четырех неизвестных A_i . Нетривиальное решение данной системы существует при равенстве нулю ее определителя. После некоторого упрощения условие равенства нулю определителя системы (14) принимает вид:

$$\operatorname{tg} kb + 2\alpha k / (2\alpha^2 - k^2) = 0. \quad (15)$$

Поскольку критическое напряжение соответствует началу процесса потери устойчивости, то есть началу искривления пластины в месте отслоения, текущее напряжение σ равно начальному напряжению σ_0 . С учетом (1), (5) и (7) перепишем уравнение для определения критического напряжения потери устойчивости (15) как

$$\operatorname{tg}(\pi\sqrt{\gamma_\sigma}) + \pi\sqrt{\gamma_\sigma} 2\alpha b / [2(\alpha b)^2 - \pi^2\gamma_\sigma] = 0. \quad (16)$$

Формула для эффективной жесткости подложки (11) найдена в предположении периодичности нагрузки. Однако выражение для смещения (12) содержит как периодический, так и непериодический множители. Из соображений размерности длина волны $2\pi/\alpha$ периодического множителя и длина волны λ связаны между собой. Положив длину волны в (11) равной длине волны периодического множителя (12)

$$\lambda = 2\pi/\sqrt[4]{3g/(E^*h^3)}, \quad (17)$$

получим из (13) следующее уравнение: $4\alpha^4 = 12E_s^*/(E^*h^3) \cdot \pi/\lambda = 12E_s^*/(E^*h^3) \cdot \alpha/2$, откуда $\alpha = (1/h)\sqrt[3]{3E_s^*/(2E^*)}$. С учетом этого выражения величина $1/(\alpha b)$, являющаяся единственным параметром в формуле (16), представляется в виде: $1/(\alpha b) = d_1(h/b)\sqrt[3]{E^*/E_s^*} = d_1\beta$, где $d_1 = \sqrt[3]{2/3} \approx 0,874$.

Сопоставление решения (16) с решением (8) при стремлении β к нулю (что соответствует увеличению жесткости подложки) показывает, что вычисленное в рамках рассматриваемой модели значение параметра $1/(\alpha b)$ несколько завышено (совпадение решений наблюдалось бы при $d_1 = d_0$). Сравнение с результатами численных расчетов работы [5] свидетельствуют о том же (см. далее).

Для приближения значений коэффициентов d_1 и d_0 друг к другу введем в выражение для эффективной длины упругой волны поправочный коэффициент k_λ и заменим формулу (17) соотношением $\lambda = 2\pi k_\lambda/\sqrt[4]{3g/(E^*h^3)}$, после учета которого и выкладок, аналогичных описанным выше, получим:

$$1/(\alpha b) = d_2(h/b)\sqrt[3]{E^*/E_s^*} = d_2\beta; \quad d_2 = \sqrt[3]{2/3} k_\lambda^{1/3}. \quad (18)$$

Предположение равенства пространственной частоты абсолютной величине комплексного показателя в (12), то есть корню квадратному из суммы квадратов показателя экспоненты и частоты: $2\pi/\lambda = \sqrt{2(\alpha^2 + \alpha^2)}$, приводит к значению $k_\lambda = 1/\sqrt{2}$ и дает $d_2 \approx 0,778$, по-прежнему существенно (на 22%) отличающееся от более точного значения $d_0 \approx 0,636$.

Для совпадения параметров $d_2 = d_0$ необходимо положить $k_\lambda = 2/3^{3/2} \approx 0,385$. Подстановка (18) в (16) дает $\text{tg}(\pi\sqrt{\gamma_\sigma}) + \pi\sqrt{\gamma_\sigma} d_2\beta/[1 - \pi^2\gamma_\sigma(d_2\beta)^2/2]$.

Зависимость γ_σ от β при условии $d_2 = d_0$ представлена на рисунке 2 (кривая 3).

5. Модифицированная модель пластины на упругом основании с учетом сжимающих напряжений

Решение (12) может быть модифицировано с учетом влияния сжимающих напряжений на прогиб пластины в областях ее контакта с подложкой. Так, положив для областей контакта $|x| > b$ в уравнении (10) $\sigma = \sigma_0$, получим вместо (12) решение вида $u_2(x) = A_3 e^{-\sqrt{4\alpha^2 - k^2}(x-b)/2} \cos[\sqrt{4\alpha^2 - k^2}(x-b)/2] + A_4 e^{-\sqrt{4\alpha^2 - k^2}(x-b)/2} \sin[\sqrt{4\alpha^2 - k^2}(x-b)/2]$, $x > b$. Подставив его в граничные условия (14), после упрощения вместо (16) найдем следующее условие существования нетривиального решения:

$$\operatorname{tg}\left(\pi\sqrt{\gamma_\sigma}\right) + \pi\sqrt{\gamma_\sigma} \cdot \sqrt{4(\alpha b)^2 - \pi^2\gamma_\sigma} / \left(2(\alpha b)^2 - \pi^2\gamma_\sigma\right) = 0. \quad (19)$$

Данное решение не отличается качественно от решения (16). Подстановка (18) в (19) дает $\operatorname{tg}\left(\pi\sqrt{\gamma_\sigma}\right) + \pi\sqrt{\gamma_\sigma}d_2\beta \cdot \sqrt{4 - \pi^2\gamma_\sigma(d_2\beta)^2} / \left(2 - \pi^2\gamma_\sigma(d_2\beta)^2\right) = 0$.

Зависимость γ_σ от β при условии $d_2 = d_0$ для данной модели представлена на рисунке 2 (кривая 2).

6. Асимптотические оценки для критического напряжения

Для случая малого отличия γ_σ от единицы, что соответствует малым β , асимптотическое решение уравнения (8) можно получить, осуществив подстановку $\sqrt{\gamma_\sigma} = 1 + a_1x^m + a_2x^n + \dots$, где $x = d_0\beta$. Теперь, приравняв нулю коэффициенты при одинаковых степенях x , найдем коэффициенты a_1, a_2 , а также степени m, n , при которых решение существует. Соответствующее решение имеет вид: $\gamma_\sigma = 1 - 2x + 3x^2 + O(x^3)$, и тогда окончательное выражение для критического напряжения становится следующим:

$$\sigma^{cr} = \pi^2 h^2 E^* \left(1 - 2d_0\beta + 3(d_0\beta)^2 + \dots\right) / (12b^2). \quad (20)$$

Рассмотрим другой крайний случай — малое отличие γ_σ от $1/4$, что соответствует большим β . Для этого осуществим подстановку $\sqrt{\gamma_\sigma} = 1/2 + a_1y^m + a_2y^n + a_3y^p + \dots$, где $y = 1/(d_0\beta)$. Приравняв нулю коэффициенты при одинаковых степенях y , найдем коэффициенты a_i , а также степени m, n, \dots , при которых решение существует, и получим соответствующее решение: $\gamma_\sigma = 1/4 + 2/(\pi^2 d_0\beta) - 4/\left[\pi^4 (d_0\beta)^2\right] + (32/\pi^6 - 8/(3\pi^4))/\left(d_0\beta\right)^3 + \dots$. С учетом последнего окончательное выражение для критического напряжения приобретает вид:

$$\sigma^{cr} = \left[\pi^2 h^2 E^* / (12b^2)\right] \gamma_\sigma. \quad (21)$$

Разложение (20) формально справедливо для $\beta \ll 1$, то есть, согласно (9), для $E^*/E_s^* \ll (b/h)^3$ (соответствует не слишком мягкой подложке). Разложение (21) формально справедливо для $\beta \gg 1$, то есть для $E^*/E_s^* \gg (b/h)^3$ (мягкая подложка). Однако следует помнить, что применение теории пластин оправдано только в случае $b/h \gg 1$. Следовательно, для справедливости разложения (21) должно выполняться условие $E^*/E_s^* \gg (b/h)^3 \gg 1$, указывающее на то, что подложка должна быть чрезвычайно мягкой.

7. Численное моделирование

Задача для системы покрытие–подложка решалась также методом конечных элементов (МКЭ) в геометрически нелинейной постановке. Геометрия области соответствовала рисунку 1. Расчеты проводились на регулярных сетках. Расчетная область разбивалась на 19600 8-узловых прямоугольных элементов (всего 59401 узлов) со сгущением сетки вблизи точки отслоения. Жесткий слой покрытия моделировался

20 рядами элементов. Ширина расчетной области B полагалась превосходящей длину отслоения $2b$ в 20 раз, высота H — в 100-400 раз превышающей толщину покрытия: $H \sim (100 \div 400)h$. Граничные условия были следующими: отсутствовали смещения на границе $x = B/2$, $y = H - h/2$ и касательные напряжения и горизонтальные смещения на оси симметрии ($x = 0$), а также нормальные и касательные напряжения на верхней границе $y = h/2$ и на берегах отслоения. Считалось, что материал покрытия имел ненулевой коэффициент теплового расширения, а материал подложки — нулевой. Таким образом, изменение температуры однозначно связывалось с напряжениями в покрытии. Для каждого отношения толщины покрытия к длине отслоения $h/2b$ из ряда значений (1/20, 1/40, 1/80) и каждого отношения модуля подложки к модулю покрытия (1/1, 1/100) проводился пошаговый расчет зависимости величины выпучивания от температуры.

На первом шаге расчета, для выведения системы из положения равновесия, к отслоившемуся участку покрытия прикладывалось нормальное напряжение, играющее роль возмущения. На втором шаге задавалась температура, создающая внутреннее напряжение, заведомо превосходящее критическое, и система, благодаря возмущению, переходила в положение, соответствующее потере устойчивости. На третьем шаге

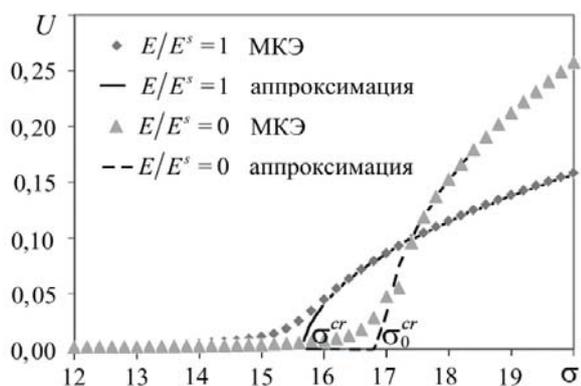


Рис. 3. Зависимость прогиба от напряжения

возмущающее напряжение снималось, но, поскольку система уже перешла в новое устойчивое состояние, снятие возмущающих напряжений не возвращало ее в исходное невозмущенное состояние. Наконец, на четвертом шаге осуществлялось пошаговое охлаждение, при котором, собственно, и вычислялась зависимость величины выпучивания от температуры. Для напряжений (температур) выше критической величины σ^{cr} прогиб аппроксимировался корневой функцией [3] посредством метода наименьших квадратов. Точка пересечения полученной параболы с осью абсцисс

принималась за критическое напряжение σ^{cr} . Далее величина γ_c рассчитывалась как отношение полученного напряжения к критическому напряжению, установленному для случая абсолютно жесткой подложки. Пример данной зависимости для $b/h = 80$, $E/E^s = 1$ и $E/E^s = 1/100$ представлен на рисунке 3.

8. Выводы

Исследована задача потери устойчивости отслоившегося от подложки покрытия вследствие собственных деформаций сжатия, вызванных, например, нагревом. Предложены аналитические и численные (МКЭ) варианты решения. Модельное аналитическое решение для пластины, которая играла роль покрытия, получено в рамках классической теории тонких пластин. Рассмотрена двумерная задача потери устойчивости сжатой в собственной плоскости пластины, скрепленной с упругой подложкой, которая считалась бесконечным упругим телом всюду, за исключением некоторой области отслоения.

Получено выражение для критического сжимающего напряжения для системы покрытие–подложка. Показано, что оно отличается от критического напряжения, соответствующего жестко защемленной пластине, и определяется единым безразмерным

параметром, представляющим собой комбинацию упругих констант покрытия и подложки и отношения длины отслоения к толщине покрытия. Рассмотрены альтернативные варианты записи граничных условий и условий контакта покрытия и подложки. Найденные зависимости оказались близкими друг другу. Результаты аналитических вычислений коррелируют с результатами проведенных конечно-элементных расчетов.

Работа выполнена при финансовой поддержке программ фундаментальных исследований Президиума РАН № 21, 23 и РФФИ (проект № 11-01-00801а).

Литература

1. *Obreimoff J.W.* Splitting strength of mica // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1930. – V. 127. – P. 290-297.
2. *Kachanov L.M.* Delamination buckling of composite materials. – Boston: Kluwer, 1988. – 95 p.
3. *Hutchinson J.W., Suo Z.* Mixed mode cracking in layered materials // Advances in Applied Mechanics. – 1992. – V. 29. – P. 63-191.
4. *Cotterell B., Chen Z.* Buckling and cracking of thin film on compliant substrates under compression // Int. J. of Fract. – 2000. – V. 104. – P. 169-179.
5. *Yu H.H., Hutchinson J.W.* Influence of substrate compliance on buckling delamination of thin films // Int. J. Fract. – 2002. – V. 113. – P. 39-55.
6. *Parry G., Colin J., Coupeau C., Foucher F., Cimetiere A., Grilhe J.* Effect of substrate compliance on the global unilateral post-buckling of coatings: AFM observation and finite element calculations // Acta mater. – 2005. – V. 53. – P. 441-447.
7. *Audoly B., Boudaoud A.* Buckling of a stiff film bound to a compliant substrate (part I). Formulation, linear stability of cylindrical patterns, secondary bifurcations // J. Mech. Phys. Solids. – 2008. – V. 56, N. 7. – P. 2401–2421.
8. *Faulhaber S., Mercera C., Moon M.-W., Hutchinson J.W., Evans A.G.* Buckling delamination in compressed multilayers on curved substrates with accompanying ridge cracks // J. Mech. Phys. Solids. – 2006. – V. 54. – P. 1004-1028.
9. *Goldstein R.V., Ustinov K.B., Chentsov A.V.* Buckling of delaminated coatings: effects of substrate compliance and coating thickness // 2nd Int. Conf. «From Nanoparticles & Nanomaterials to Nanodevices & Nanosystems»: Abstracts book, June 28 – July 03, 2009, Rhodes, Greece. – P. 192.
10. *Yu H.H., He M.Y., Hutchinson J.W.* Edge effects in thin film delamination // Acta Mater. – 2001. – V. 49. – P. 93-107.
11. *Тимошенко С.П.* Соппротивление материалов. – М.: Наука, 1965. – Т. 2. – 480с.
12. *Ustinov K.B., Dyskin A.V., Germanovich L.N.* Asymptotic analysis of extensive crack growth parallel to free boundary // 3rd Int. Conf. «Localized Damage». Southampton: Comput. mech. Publ. – 1994. – P. 623-630.
13. *Dyskin A.V., Germanovich L.N., Ustinov K.B.* Asymptotic analysis of crack interaction with free boundary // Int. J. Solids Struct. – 2000. – V. 37. – P. 857-886.
14. *Гольдштейн Р.В., Коновалов А.Б.* Асимптотический анализ пространственной задачи о трещине-расслоении в двухслойной пластине: Препр. / ИПМех РАН. – М., 1996. – № 565. – 39 с.
15. *Златин А.Н., Храпков А.А.* Полубесконечная трещина, параллельная границе упругой полуплоскости // Докл. АН СССР. – 1986. – Т. 291, № 4. – С. 810-813.
16. *Устинов К.Б.* Об уточнении граничных условий для балочной модели кантилевера атомно-силового микроскопа и их влиянии на интерпретацию результатов измерений // Изв. РАН. МТТ. – 2008. – N. 3. – P. 182-188.
17. *Устинов К.Б., Ченцов А.В.* Аналитическое и численное моделирование потери устойчивости отслоившегося от подложки покрытия: Препр. / ИПМех РАН. – М., 2010. – № 926. – 16 с.
18. *Устинов К.Б., Салганик Р.Л.* Задача об упруго заделанной пластине, моделирующей частично отслоившееся от подложки покрытие (плоская деформация): Препр. / ИПМех РАН. – М., 2010. – № 948. – 20 с.

Поступила в редакцию 25.11.10

Сведения об авторах

Гольдштейн Роберт Вениаминович, член-корр. РАН, проф., дфмн, зав.лаб., Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (ИПМех РАН), 119526, Россия, Москва, просп. Вернадского 101-1; E-mail: goldst@ipmnet.ru

Устинов Константин Борисович, кфмн, снс ИПМех РАН; E-mail: ustinov@ipmnet.ru

Ченцов Александр Викторович, кфмн, нс, ИПМех РАН; E-mail: chentsov@ipmnet.ru