

УДК 539.37

## НЕЛИНЕЙНЫЙ ИЗГИБ И УСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЛИпсоИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С ЖИДКОСТЬЮ

М.С. Ганеева, В.Е. Моисеева, З.В. Скворцова

*Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН, Казань, Россия*

Рассматриваются осесимметричный изгиб и устойчивость сплюснутой эллипсоидальной оболочки под действием давления жидкости с выпуклой стороны оболочки, а также при контакте оболочки с несжимаемой жидкостью. Используются геометрически и физически нелинейные соотношения теории оболочек. Давление жидкости изменяется по адиабатическому закону. Полученные результаты свидетельствуют о зависимости нелинейного деформирования от характеристик нагружающей среды. Также показано, что особенности напряженно-деформированного состояния оболочки определяются переменностью кривизны срединной поверхности.

*Ключевые слова:* изгиб, устойчивость, эллипсоидальная оболочка, жидкость, взаимодействие

## NONLINEAR BENDING AND STABILITY OF ELLIPSOIDAL SHELL INTERACTING WITH LIQUID

M.S. Ganeeva, V.E. Moiseeva and Z.V. Skvortsova

*Institute of Mechanics and Engineering of Kazan Science Center RAS, Kazan, Russia*

This paper studies the axisymmetric bending and stability of an oblate ellipsoidal shell under liquid pressure on the convex side of the shell, and in the case when the shell comes into contact with an incompressible liquid. Nonlinear geometrical and physical relations of the theory of shells are applied. The liquid pressure varies according to the adiabatic law. The results indicate that the nonlinear deformation depends on the characteristics of the loading medium. It is shown that the variability of the curvature of the middle surface is responsible for the peculiarities of the stress-strain state of the shell under consideration.

*Key words:* bending, stability, ellipsoidal shell, liquid, interaction

### 1. Введение

Устойчивость и послекритическое поведение тонкостенной оболочки значительно зависят от способа создания давления на неё [1, 2]. По-видимому, впервые четкое разграничение между случаями задания «мертвой» (известной экспериментатору и не зависящей от деформации оболочки) нагрузки и задания перемещения с помощью испытательной машины было отмечено в [3]. В реальных условиях эксперимента эти два крайних случая в чистом виде не реализуются. При теоретическом изучении большее приближение к действительности дает рассмотрение взаимодействия оболочки и нагружающей среды. Однако при решении задач устойчивости при квазистатическом нагружении оболочек давлением традиционно не уделяется внимание способу создания давления на оболочку. Большое число задач устойчивости цилиндрических, конических, сферических оболочек в такой постановке приведено в монографиях [1, 2, 4]. Ряд работ посвящен устойчивости оболочек других форм, в частности, решения для эллипсоидальных оболочек приведены в [4, 5]. В обзоре [6] дан анализ литературы по статике, колебаниям и устойчивости эллипсоидальных оболочек.

В монографии [7] представлены задачи статической гидроупругости, и в том числе методом Бубнова–Галеркина решена задача устойчивости длинной пологой цилиндрической панели под действием давления жидкости. Авторам не известны другие

решения квазистатических задач устойчивости оболочек при подобном нагружении. На основе теоретического исследования вопросов взаимодействия пластин и оболочек со сжимаемой и несжимаемой жидкостью, приведенного в [7], в работе [8] разработана методика численного расчета нелинейного изгиба и устойчивости оболочек вращения под действием давления жидкости. В работах [8–10] представлены результаты деформирования сферических сегментов, нагруженных давлением жидкости.

В данной статье показывается приложение методики из работы [8] к решению нелинейных задач деформирования сплюснутой эллипсоидальной оболочки под воздействием сжимаемой и несжимаемой жидкости.

## 2. Постановка задачи и метод решения

Рассматриваются нелинейный осесимметричный изгиб и устойчивость сплюснутой полуэллипсоидальной оболочки под действием давления жидкости с выпуклой стороны оболочки. Невесомая жидкость находится в герметически закрытой емкости с жесткими стенками (Рис. 1). Давление в емкости создается посредством медленной подачи жидкости. Оболочка имеет характеристики [11]:  $a, b$  — полуоси ( $b$  направлена вдоль оси вращения  $x$ );  $h$  — толщина. Вводятся координатные линии: меридиан с текущей координатой  $s$  ( $0 \leq s \leq s_N$ ); внешняя нормаль к срединной поверхности с текущей координатой  $z$  ( $-h/2 \leq z \leq h/2$ ). Характеристики жидкости следующие:  $M_0, V_0, p_0$  — масса, объем и давление при ненапряженном состоянии оболочки;  $m, V, p$  — масса дополнительно поданной в емкость жидкости, соответствующее изменение объема емкости и установившееся в ней давление.

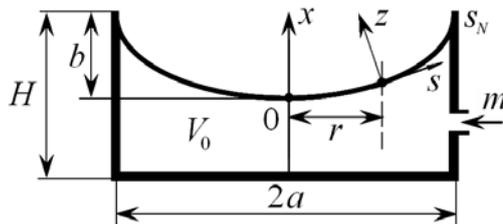


Рис. 1. Эллипсоидальная оболочка под действием давления жидкости

Считается, что в процессе всего нагружения давление в емкости  $p$  изменяется по адиабатическому закону [7]:

$$p = p_0 \left[ \frac{(1 + m/M_0)}{(1 + V/V_0)} \right]^\gamma, \quad (1)$$

где  $\gamma$  — коэффициент адиабаты. Таким образом, в данной задаче параметром нагружения будет служить масса подаваемой в емкость жидкости  $m$ . В случае малых деформаций можно принять:

$$V = 2\pi \int_0^{s_N} w r ds, \quad (2)$$

где  $w(s)$  — функция прогиба оболочки,  $r(s)$  — радиус параллели точки срединной поверхности с координатой  $s$  (Рис. 1).

Используются соотношения теории оболочек Кирхгофа–Лява, описывающие осесимметричное моментное геометрически и физически нелинейное напряженно-деформированное состояние оболочки вращения при умеренных поворотах [5] под действием равномерного нормального давления

$$P = p - p_0, \quad (3)$$

где  $p$  определяется по формулам (1) и (2). Далее  $p_0$  полагается равным атмосферному давлению. Выражения напряжений через деформации представляются в соответствии с теорией малых упругопластических деформаций [12] для сжимаемого материала, обладающего линейным упрочнением с коэффициентом  $\lambda$  и имеющим модуль упругости  $E$ , коэффициент Пуассона  $\nu$ , предел текучести  $\sigma_s$ .

Вводится вектор разрешающих функций:

$$\mathbf{Y} = (T_{11}^*, Q_1^*, M_{11}, P, u, w, \vartheta_1, B)^T, \quad (4)$$

где знак «Т» обозначает транспонирование,  $T_{11}^*$ ,  $Q_1^*$  — меридиональное и перерезывающее усилия,  $M_{11}$  — изгибающий момент,  $u$  — касательное перемещение точки срединной поверхности,  $\vartheta_1$  — поворот нормали.

$$B(s) = 2\pi \int_0^s wr ds, \quad B(0) = 0, \quad B(s_N) = V. \quad (5)$$

Функция  $B(s)$  представляет изменение объема части емкости, ограниченной цилиндром радиуса  $r(s)$ , вследствие прогиба оболочки, а значение  $B(s_N)$  дает изменение объема всей емкости.

Для вектора  $\mathbf{Y}$  записывается разрешающая система уравнений нелинейного осесимметричного изгиба:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{ds} = \mathbf{A}(s)\mathbf{Y} + \mathbf{F}(s, \mathbf{Y}), \quad 0 \leq s \leq s_N. \quad (6)$$

Здесь  $\mathbf{A}(s)$  — матрица коэффициентов размерностью  $8 \times 8$ ,  $\mathbf{F}(s, \mathbf{Y})$  — вектор геометрически и физически нелинейных членов размерностью  $8 \times 1$ .

Для полной постановки краевой задачи также нужно определить граничные условия в полюсе оболочки ( $s=0$ ) и у основания ( $s=s_N$ ). В полюсе используются предельные уравнения [5] и граничные условия:

$$Q_1^* = 0, \quad u = 0, \quad \vartheta_1 = 0, \quad B = 0. \quad (7)$$

У основания оболочки принимаются или условия жесткой заделки

$$u = 0, \quad w = 0, \quad \vartheta_1 = 0, \quad (8)$$

или шарнирного закрепления

$$u = 0, \quad w = 0, \quad M_{11} = 0, \quad (9)$$

или симметрии

$$u = 0, \quad \vartheta_1 = 0, \quad Q_1^* = 0. \quad (10)$$

К условиям при  $s=s_N$  добавляется нелинейная зависимость между неизвестными  $P$  и  $V$ , которая получается из (1) с учетом (3), (5) путем разложения знаменателя в ряд с удержанием первых четырех членов:

$$\begin{aligned} P + p_0 (1 + m/M_0)^\gamma \gamma V/V_0 = \\ = -p_0 + p_0 (1 + m/M_0)^\gamma \left[ 1 + \gamma(\gamma+1)(V/V_0)^2/2 - \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(V/V_0)^3/6 \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

При численном решении вместо (11) могут быть реализованы крайние случаи нагружения, когда в процессе деформации или увеличивается нагрузка

$$P_{k+1} = P_k + \Delta P, \quad k = \overline{1, K}, \quad (12)$$

или изменяется объем оболочки

$$V_{i+1} = V_i + \Delta V, \quad i = \overline{1, J}. \quad (13)$$

Условия (12) и (13), из которых в эксперименте первое соответствует «мертвой» нагрузке, а второе — заданию перемещения с помощью испытательной машины, отвечают наиболее употребительным способам задания нагружения при решении задач теории оболочек.

В работе [8] предложен алгоритм численного решения нелинейной краевой задачи (6)–(11) на основе пошагового процесса по параметру  $m_l/M_0$ , выбранному в качестве ведущего, где  $l = \overline{1, L}$  ( $L$  — число шагов).

### 3. Решение задач и анализ результатов

Результаты численного решения для сплюснутой полуэллипсоидальной оболочки получены при разных видах граничных условий (далее ГУ) и следующих геометрических и механических характеристиках оболочки:  $a = 100$  см;  $b = 50$  см;  $a/h = 100$ ;  $E = 19,62 \cdot 10^4$  МПа;  $\nu = 0,3$ ;  $\lambda = 0,9$ ;  $\sigma_s = 784,8$  МПа, и параметрах нагружающей среды:  $\gamma = 1,4$  (воздух);  $\gamma = 7$  (жидкость);  $p_0 = 0,0981$  МПа.

*Пример А.* Деформирование оболочки под действием давления, создаваемого сжимаемой жидкостью.

На рисунках 2–5 представлены зависимости безразмерных параметров нагрузки  $P/E$ , максимальных прогибов  $w/h$  и интенсивности напряжений  $\sigma_i/E = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2} - \sigma_{11}\sigma_{22}/E$  от различных параметров. Рассмотрены случаи нагружения: (13) — без учета нагружающей среды (Рис. 2–4) и (11) — с учетом взаимодействия с жидкостью (Рис. 5).

Рисунок 2 содержит графики  $P(w)$  при ГУ (8), (9) и (10). При ГУ (10) данные близки к решению с жесткой заделкой (8). Из рисунка видно, что величина верхней предельной нагрузки мало зависит от ГУ. Однако в случае ГУ (8), как показано в задаче неосесимметричной потери устойчивости при осесимметричном нагружении [5], при некоторой, несколько меньшей, чем верхнее предельное значение, нагрузке (отмечена значком «×»), в оболочке наблюдается волнообразование в направлении параллели с числом волн 2. После точки «×» кривая, соответствующая ГУ (8) (Рис. 2), носит условный характер.

На рисунке 3 даны зависимости  $\sigma_i(P)$ . Видно, что граничные условия оказывают на них значительное влияние. В процессе нагружения ещё до достижения верхней предельной нагрузки превышает предел текучести материала  $\sigma_s$ .

На рисунке 4 показаны эпюры прогиба  $w/h$  по меридиану для значений нагрузки  $P/E$ , соответствующих на рисунке 2 восходящей ветви, области верхней предельной нагрузки и нисходящей ветви кривых, отвечающих различным граничным условиям. Для рассматриваемой оболочки переменной кривизны эпюры  $w/h$  имеют сложный характер со сменой знака по меридиану и всплеском в окрестности полюса, особенно при ГУ (8) и (10), что свидетельствует о потере устойчивости оболочки и образовании вмятины.

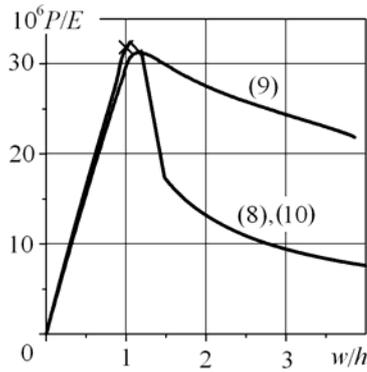


Рис. 2. Зависимость нагрузки от прогиба при нагружении (13)

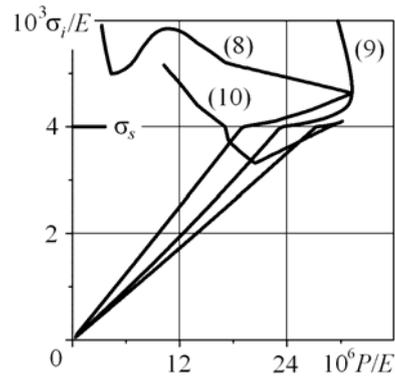


Рис. 3. Зависимость интенсивности напряжений от нагрузки при нагружении (13)

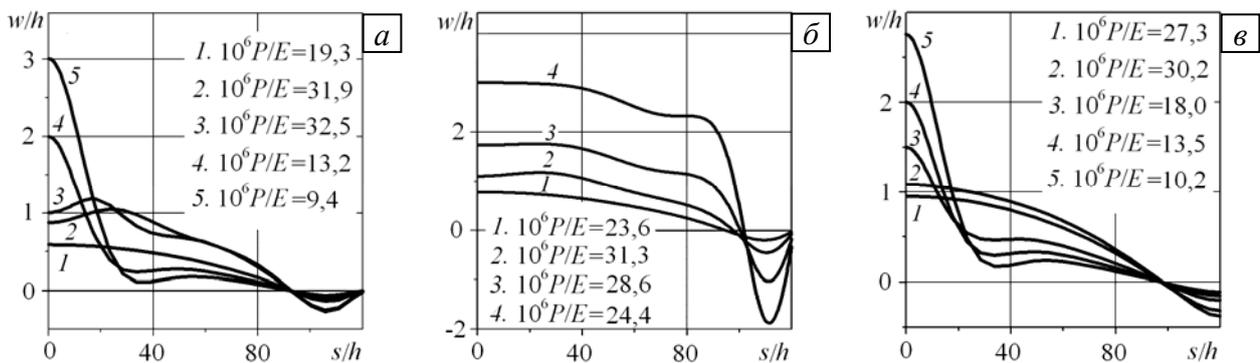


Рис. 4. Эпюры прогиба по меридиану для ряда значений нагрузки  $P/E$  при различных граничных условиях:  $a$  – ГУ (8),  $b$  – ГУ (9),  $v$  – ГУ (10)

Далее в таблицах представлены данные для некоторых характерных этапов деформирования оболочки при учете взаимодействия со сжимаемой жидкостью (11) в случае жесткой заделки основания оболочки (8) (Табл. 1) и в случае его шарнирного закрепления (9) (Табл. 2). Ведущим параметром пошагового процесса является масса подаваемой в емкость жидкости  $m/M_0$ . Видно, что напряженно-деформированное состояние оболочки, вплоть до достижения верхней предельной нагрузки, практически не зависит от способа создания давления на оболочку, то есть от объема и физического состояния нагружающей среды, задаваемых параметрами  $H$  и  $\gamma$ , и совпадает с НДС оболочки, следующим из решения для нагружения (13), когда не учитывается взаимодействие с нагружающей средой. Однако после достижения нагрузкой своего верхнего предельного значения малейшее увеличение подачи жидкости приводит к скачкообразному деформированию оболочки, характеризующемуся снижением давления и увеличением прогиба и напряжений. Приведенные в таблицах результаты, за исключением области скачка, совпадают с данными рисунков 2 и 3.

Анализ содержимого таблиц показывает, что при нагружении оболочки воздухом скачок, испытываемый параметрами, больше, чем при нагружении жидкостью; для большего объема среды скачок больше, чем для меньшего объема, то есть чем больше сжимаемость нагружающей среды, тем больше скачок. При этом следует подчеркнуть, что в данной задаче рассматривается оболочка с большой стрелой подъема ( $b = a/2$ ), и для неё все полученные скачки очень велики. После скачков оболочка, как показывает численное решение, выворачивается, и в ней возникают напряжения, значительно превосходящие предел текучести материала, что означает разрушение оболочки. Исключение, когда скачок отсутствует, составляет случай наименее сжимаемой (из всех рассмотренных) рабочей среды при мягких граничных условиях: малая емкость,

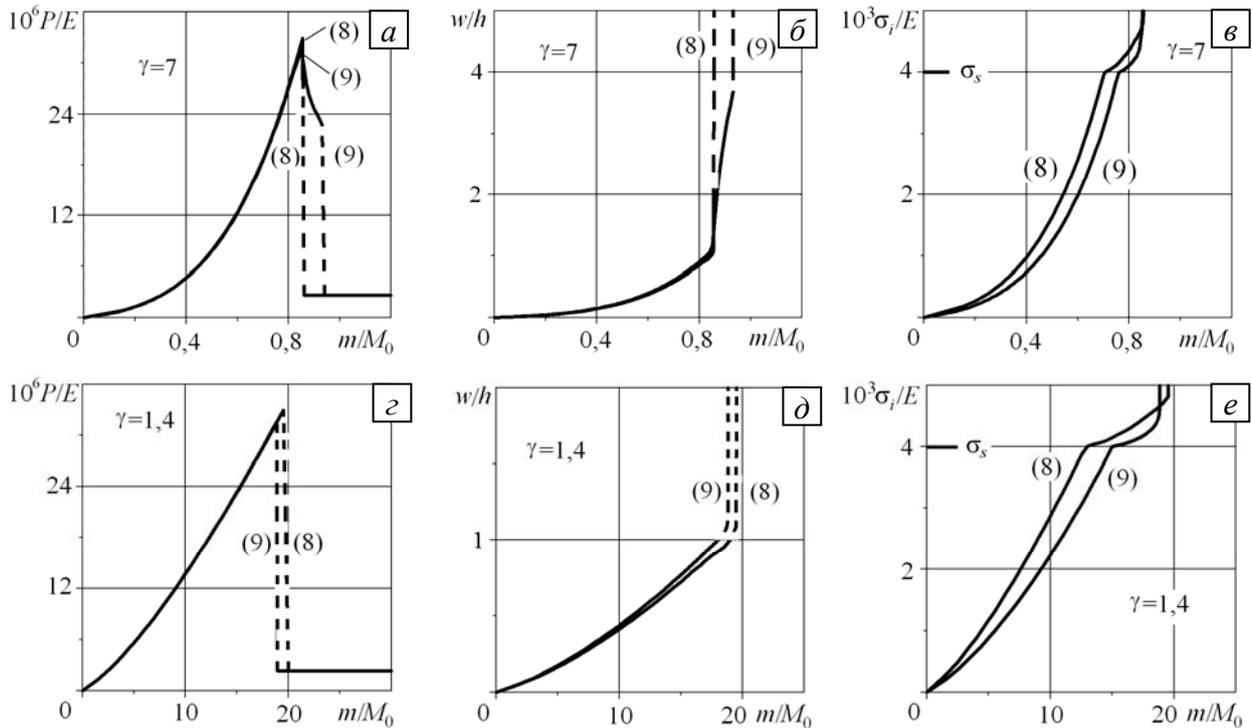
заполненная жидкостью, при шарнирном закреплении оболочки (Табл. 2,  $H/b=1,1$ ;  $\gamma=7$ ). Как показано в [8], для пологих оболочек скачки могут быть не такими большими, и после них при выворачивании оболочки напряжения могут не превышать предела прочности материала. Из таблиц также видно, что влияние граничных условий жесткой заделки или шарнирного закрепления на НДС оболочки в целом мало, что объясняется значительной стрелой подъема оболочки.

Таблица 1. Напряженно-деформированное состояние оболочки в случае ГУ (8), (11)

Этапы деформирования	Величины	$\gamma = 7$			$\gamma = 1,4$		
		$H/b = 1,1$	$H/b = 1,5$	$H/b = 2$	$H/b = 1,1$	$H/b = 1,5$	$H/b = 2$
$\max_{s,z} \sigma_i = \sigma_s$	$10 \cdot m/M_0$	7,100	7,000	7,000	130,0	130,0	130,0
	$10^6 \cdot P/E$	19,48	19,31	19,57	19,35	19,48	19,53
	$w/h$	0,596	0,590	0,599	0,592	0,596	0,598
Нагрузка волнообразования по параллели	$10 \cdot m/M_0$	8,450	8,300	8,250	190,0	187,5	186,5
	$10^6 \cdot P/E$	31,86	31,83	31,94	31,88	31,67	31,59
	$w/h$	0,999	0,997	1,004	1,000	0,989	0,984
	$10^3 \cdot \sigma_i/E$	4,685	4,681	4,694	4,686	4,665	4,657
Верхняя предельная нагрузка	$10 \cdot m/M_0$	8,550	8,400	8,336	195,0	193,0	192,5
	$10^6 \cdot P/E$	32,91	32,97	32,97	32,97	32,91	32,96
	$w/h$	1,077	1,085	1,083	1,085	1,076	1,082
	$10^3 \cdot \sigma_i/E$	4,805	4,813	4,812	4,813	4,805	4,810
Область скачка	$10 \cdot m/M_0$	8,600	8,405		200,0	193,5	193,0
	$10^6 \cdot P/E$	2,647	2,394		2,323	2,545	3,071
	$w/h$	22,41	31,54		46,36	67,56	89,91
	$10^3 \cdot \sigma_i/E$	8,023	9,279		11,14	13,92	17,44

Таблица 2. Напряженно-деформированное состояние оболочки в случае ГУ (9), (11)

Этапы деформирования	Величины	$\gamma = 7$			$\gamma = 1,4$		
		$H/b = 1,1$	$H/b = 1,5$	$H/b = 2$	$H/b = 1,1$	$H/b = 1,5$	$H/b = 2$
$\max_{s,z} \sigma_i = \sigma_s$	$10 \cdot m/M_0$	7,600	7,500	7,500	150,5	150,0	150,0
	$10^6 \cdot P/E$	23,40	23,47	23,89	23,42	23,52	23,61
	$w/h$	0,771	0,773	0,788	0,772	0,775	0,778
Верхняя предельная нагрузка	$10 \cdot m/M_0$	8,500	8,310	8,230	188,5	186,7	185,5
	$10^6 \cdot P/E$	31,37	31,37	31,36	31,35	31,37	31,30
	$w/h$	1,167	1,167	1,154	1,142	1,171	1,124
	$10^3 \cdot \sigma_i/E$	4,699	4,701	4,660	4,624	4,713	4,570
Область скачка	$10 \cdot m/M_0$	8,600	8,330	8,240	189,0	186,8	186,0
	$10^6 \cdot P/E$	29,35	2,395	2,321	2,324	2,525	2,867
	$w/h$	1,655	31,50	40,62	46,26	67,48	90,02
	$10^3 \cdot \sigma_i/E$	6,321	9,275	10,43	11,13	13,87	16,82



**Рис. 5.** Зависимости нагрузки (а, г), максимальных значений прогиба (б, д) и интенсивности напряжений (в, е) от величины параметра подачи в емкость жидкости (а–в) и воздуха (г–е) при нагружении (11) и ГУ (8) и (9)

На рисунке 5 показаны зависимости нагрузки  $P/E$ , максимальных значений прогиба  $w/h$  и интенсивности напряжений от величины ведущего параметра — подачи жидкости в емкость  $m/M_0$ , при  $H/b=1,1$  и двух значениях  $\gamma$ :  $\gamma=7$  и  $\gamma=1,4$ , в случае ГУ (8) и (9). Штриховыми линиями изображены скачки, полученные в решении за один малый шаг по ведущему параметру. Видно, что рассматриваемые зависимости являются существенно нелинейными при нагнетании в емкость жидкости (Рис. 5, а, б, в). Влияние ГУ (8) и (9) на зависимости нагрузки и прогиба проявляется лишь в окрестности верхней предельной нагрузки. Это обстоятельство объясняется малостью величин  $V/V_0$  в формуле (11) по сравнению с остальными на рассматриваемом интервале изменения параметра  $m/M_0$ . В то же время интенсивность напряжений (Рис. 5, в, е) зависит от граничных условий значительно.

**Пример Б.** Деформирование эллипсоидальной оболочки, закрывающей герметичную емкость с несжимаемой жидкостью, при пошаговом изменении прогиба на экваторе.

Пусть емкость заполнена несжимаемой невесомой жидкостью. Дополнительные подачи жидкости в емкость отсутствуют. Условия закрепления допускают малое радиальное проскальзывание края оболочки относительно емкости. Нагружение моделируется пошаговым изменением прогиба на экваторе. Вместо условия сжимаемости (11) ставится условие несжимаемости жидкости, то есть объем емкости остается постоянным. Это единственное в данной задаче условие, обеспечивающее взаимодействие оболочки с жидкостью.

У основания оболочки  $s = s_N$  задаются следующие граничные условия:

$$u = 0, \quad \vartheta_1 = 0, \quad V = 0, \quad w_N^{(k+1)} = w_N^{(k)} + \Delta w, \quad k = \overline{1, K}. \quad (14)$$

Результаты вычислений приведены на рисунках 6–8. На рисунке 6 представлена зависимость нагрузки  $P/E$  от  $w_N/h$  на экваторе оболочки. Из рисунка видно, что она

существенно зависит от знака прогиба. При  $w_N/h > 0$  (прогибы на экваторе направлены к оси вращения  $x$ ) оболочка со стороны выпуклости подвергается давлению, верхнее предельное значение которого равняется  $P^B/E$ . После перехода через предельное значение нагрузка снижается до нуля и переходит в область с противоположным знаком, то есть оболочка начинает испытывать давление со стороны вогнутости. Описанная картина представлена также эпюрами прогиба на рисунке 7, а для ряда значений нагрузки. Необходимо отметить, что выполнение граничных условий (14) на экваторе оболочки приводит к значительному снижению верхнего предельного значения нагрузки  $P^B/E$  по сравнению с результатами Примера А (Рис. 2, Табл. 1, 2). При  $w_N/h < 0$  (прогибы на экваторе направлены от оси  $x$ ) оболочка подвергается давлению со стороны вогнутости со значительным волнообразованием по меридиану (Рис. 7, б). На рисунке 8 показана зависимость интенсивности напряжений  $\sigma_i(P)$  для случаев  $w_N/h > 0$  ( $P > 0$ ) и  $w_N/h < 0$  ( $P < 0$ ). Видно, что возникающие в оболочке напряжения превышают уровень предела текучести материала  $\sigma_s$ .

Пример Б решен также при условии, когда ведущим параметром численного процесса является давление  $P$ . В этом случае решение осуществимо только на восходящей ветви кривой нагрузка–прогиб. Полученные результаты совпали с представленными на рисунке 6 слева от значения верхней предельной нагрузки. Использование прогиба на экваторе в качестве ведущего параметра позволяет получить полную кривую деформирования с включением ниспадающей ветви.

Деформирование эллипсоидальной оболочки с переменными радиусами кривизны, контактирующей с несжимаемой жидкостью при ГУ (14), принципиально отличается от поведения полусферической оболочки [10]. В частности, сферическая оболочка испытывает давление с выпуклой стороны при  $w_N/h < 0$  (Рис. 9).

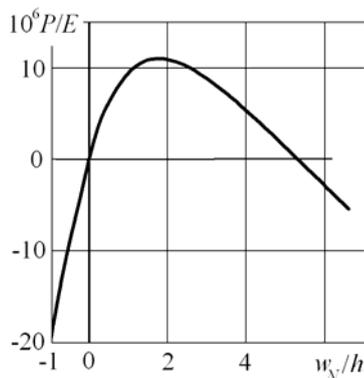


Рис. 6. Зависимость нагрузки от прогиба в случае несжимаемой жидкости

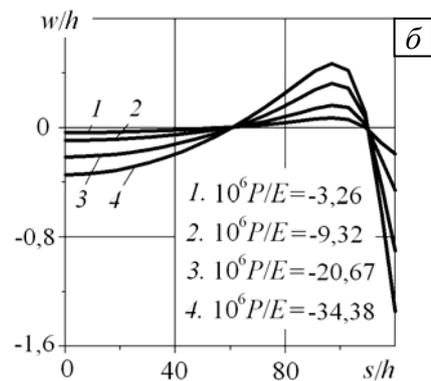
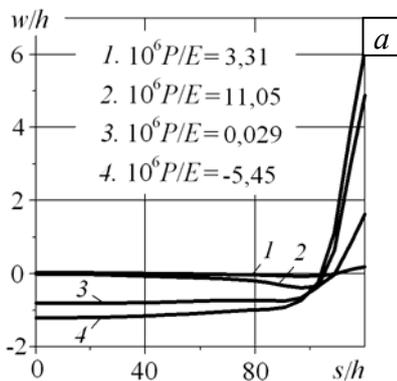
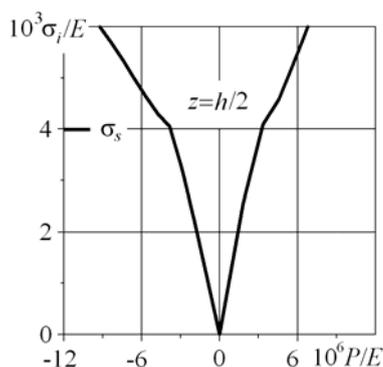
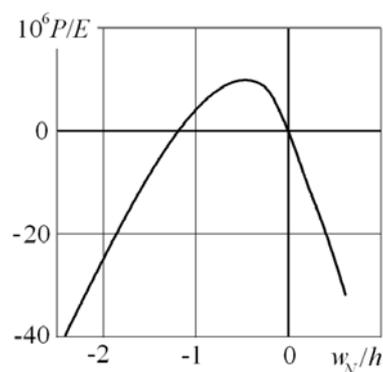


Рис. 7. Эпюры прогиба для ряда значений нагрузки в случае несжимаемой жидкости при  $w_N/h > 0$  (а) и  $w_N/h < 0$  (б)



**Рис. 8.** Зависимость интенсивности напряжений от нагрузки в случае несжимаемой жидкости



**Рис. 9.** Зависимость нагрузки от прогиба для сферической оболочки в случае несжимаемой жидкости

Таким образом, нелинейное деформирование сплюснутой эллипсоидальной оболочки существенно зависит от способа задания нагружения и характеристик нагружающей среды. При этом особенности напряженно-деформированного состояния такой оболочки определяются также переменностью кривизны срединной поверхности.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президиума РАН № 11 «Фундаментальные проблемы механики взаимодействий в технических и природных системах, материалах и средах».

## Литература

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, Физматлит, 1967. – 984 с.
2. Ворович И.И., Минакова Н.И. Проблема устойчивости и численные методы в теории сферических оболочек // Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел. – М.: ВИНТИ, 1973. – Т. 7. – С. 5-86.
3. Цянь Сюе-Сень, Ху Хай-чан. Рецензия на монографию Х.М. Муштари и К.З. Галимова «Нелинейная теория упругих оболочек» // Известия Казанского филиала АН СССР. Серия физ.-мат. и техн. наук, 1958. – № 12. – С. 179-180.
4. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1978. – 360 с.
5. Ганеева М.С. Прочность и устойчивость оболочек вращения. – М.: Наука, 1992. – 161 с.
6. Kryvoshapko S.N. Research on general and axisymmetric ellipsoidal shells used as domes, pressure vessels, and tanks // Appl. Mech. Rev. – 2007. – V. 60, N. 1-6. – P. 336-355.
7. Ильгамов М.А. Статические задачи гидроупругости. – Казань: Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, 1994. – 208 с.
8. Ганеева М.С., Ильгамов М.А., Моисеева В.Е. Устойчивость сферического сегмента, нагруженного давлением сжимаемой жидкости // Проблемы прочности и пластичности: Межвузовский сборник. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2009. – Вып. 71. – С. 71-76.
9. Ганеева М.С., Моисеева В.Е. Нелинейный изгиб и устойчивость сферического сегмента, нагруженного давлением сжимаемой жидкости // Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела. Тр. Второй междунар. конф., 8-11 декабря 2009, Казань. – Казань: Изд-во Казанского гос. ун-та, 2009. – С. 107-110.
10. Ганеева М.С., Моисеева В.Е., Скворцова З.В. Нелинейное деформирование сферической оболочки под действием давления несжимаемой жидкости // Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела. Тр. Второй междунар. конф., 8-11 декабря 2009, Казань. – Казань: Изд-во Казанского гос. ун-та, 2009. – С. 110-113.
11. Новожиллов В.В. Теория тонких оболочек. – Л.: Судпромгиз, 1962. – 432 с.
12. Ильюшин А.А. Пластичность. Ч. I. Упругопластические деформации. – М.-Л.: Гостехтеориздат, 1948. – 376 с.

Поступила в редакцию 27.10.10

### Сведения об авторах

Ганеева Музаина Саитгареевна, дфмн, снс, гнс, Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН (ИММ КазНЦ РАН), 420111, Россия, Казань, ул. Лобачевского, д. 2/31, а/я 99; E-mail: ganeeva@kfti.knc.ru

Моисеева Валерия Евгеньевна, кфмн, снс ИММ КазНЦ РАН; E-mail: moiseeva@kfti.knc.ru

Скворцова Зара Владимировна, кфмн, уч.секр. ИММ КазНЦ РАН; E-mail: zara-skvortsova@yandex.ru