

УДК 532.23

## СПЕКТР ВОЗМУЩЕНИЙ ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ В ПОЛЕ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ КАСАТЕЛЬНЫХ ВИБРАЦИЙ В УСЛОВИЯХ НЕВЕСОМОСТИ

А.В. Бурнышева<sup>1</sup>, Д.В. Любимов<sup>2</sup>, Т.П. Любимова<sup>1</sup><sup>1</sup>*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия*<sup>2</sup>*Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия*

Исследованы спектры зависящих от времени возмущений равновесного состояния и устойчивость плоской поверхности раздела двух слоев жидкостей, имеющих разные, но соизмеримые плотности и находящиеся в поле высокочастотных касательных вибраций, в условиях невесомости. Рассмотрены плоские, спиральные и пространственные возмущения. Проанализированы случаи, когда слои имеют одинаковую и разную (один из слоев в десять раз толще другого) толщину. Установлено, что самыми опасными являются монотонные плоские возмущения. Обнаружено, что при больших значениях вибрационного параметра появляются нарастающие спиральные колебательные возмущения (бегущие волны). С усилением вибраций колебательные возмущения исчезают из спектра. В случае слоев разной толщины установлено, что длина волны наиболее опасных возмущений имеет порядок толщины более тонкого слоя. Предложено объяснение наблюдавшемуся в эксперименте возникновению в двухслойной системе чередующихся страт в поле высокочастотных вибраций в условиях невесомости, связанное с нарастанием возмущений, имеющих максимальный инкремент. Выполнено количественное сравнение с экспериментом.

*Ключевые слова:* поверхность раздела, вибрации, невесомость, плоские, пространственные и спиральные возмущения, волновой рельеф

## PERTURBATION SPECTRUM OF A PLANE LIQUID-LIQUID INTERFACE IN THE PRESENCE OF HIGH-FREQUENCY TANGENTIAL VIBRATIONS IN WEIGHTLESSNESS

A.V. Burnysheva<sup>1</sup>, D.V. Lyubimov<sup>2</sup> and T.P. Lyubimova<sup>1</sup>,<sup>1</sup>*Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia*<sup>2</sup>*Perm State National Research University, Perm, Russia*

We study the spectra of time-dependent equilibrium perturbations and stability of a plane interface between two layers of liquids with different but commensurable densities under high-frequency tangential vibrations in weightlessness. Plane, spiral and spatial perturbations are considered. The layers of equal and different (one of the layers is ten times thicker than the other) thickness are analyzed. The monotonous plane perturbations are found to be most dangerous. At sufficiently large values of the vibration parameter, the growing spiral oscillatory perturbations (traveling waves) appear. With increasing vibrations, these oscillatory perturbations disappear. For the layers of unequal thickness, the wavelength of most dangerous perturbations is of order of the layer that is thinner. We attribute the appearance of alternating strata experimentally observed in the two-layer system under high-frequency vibrations in weightlessness to the growth of perturbations with maximum increment. Quantitative comparison between theoretical predictions and experimental results is made.

*Keywords:* liquid-liquid interface, vibrations, weightlessness, plane, spatial and spiral perturbations, wave relief

### 1. Введение

Модуляция параметров механической системы может приводить к стабилизации её неустойчивых состояний или, наоборот, вызывать параметрическую неустойчивость. Одним из примеров модуляции являются высокочастотные вибрации. Однородная

жидкость в поле поступательных вибраций сохраняет равновесие. В случае неоднородной жидкости, например при наличии границы раздела, равновесие может нарушиться или оказаться неустойчивым.

В случае касательных вибраций системы из двух плоских слоев жидкостей различных, но сравнимых плотностей, экспериментами в поле силы тяжести установлено [1, 2], что на границе раздела возникает неподвижный волновой рельеф. Жидкость со свободной поверхностью в этих условиях собирается вблизи одной из стенок, причем свободная поверхность является плоской и неподвижной относительно сосуда. В работе [3] исследовано поведение двухфазной системы, состоящей из жидкого и газообразного ( $\text{CO}_2$ ) компонентов, вблизи критической точки в условиях невесомости в присутствии вибраций. Обнаружено, что двухфазная система структурируется, образуя чередующиеся страты, перпендикулярные направлению вибраций.

Поведение жидкости со свободной границей объясняется в [4]. Качественная теория появления волнового рельефа на поверхности раздела жидкостей при горизонтальных вибрациях в присутствии силы тяжести дается в [5], где изучение влияния вибраций на жидкости со свободными границами или границами раздела проводится в рамках изотермического подхода. В [5] показано, что имеется решение с плоской поверхностью раздела. С помощью линейного анализа устойчивости получена нейтральная кривая, свидетельствующая, что при превышении амплитудой скорости вибраций некоторого порогового значения образуется волновой рельеф. Вид этой кривой позволяет сделать ряд выводов. Во-первых, горизонтальные вибрации не предотвращают развитие неустойчивости Рэлея–Тейлора в отличие от вертикальных вибраций, которые в определенных условиях подавляют ее. Во-вторых, волновой рельеф возникает только при условии соизмеримости плотностей жидкостей, то есть на свободной поверхности его не может быть. Этот факт отмечен и в экспериментальных работах. В-третьих, волновой рельеф с конечной длиной волны возможен только в достаточно толстых слоях. В-четвертых, в невесомости волновой рельеф с конечной длиной волны появиться не может, так как в этих условиях имеет место длинноволновая неустойчивость (при нулевом волновом числе возмущений критическое значение скорости вибраций принимает нулевое значение). В то же время в эксперименте наблюдалась структура с конечной длиной волны [3]. Можно предположить, что образование подобной структуры происходит благодаря конкуренции возмущений с разными волновыми числами. Чтобы опровергнуть или доказать это, необходимо провести анализ скорости роста возмущений.

В настоящей работе изучается спектр возмущений плоской поверхности раздела жидкостей в поле высокочастотных касательных вибраций в условиях невесомости в изотермических условиях. Рассматриваются как системы со слоями равной толщины, так и системы, в которых один слой в 10 раз толще другого. Исследуются разные типы возмущений — плоские, спиральные, пространственные.

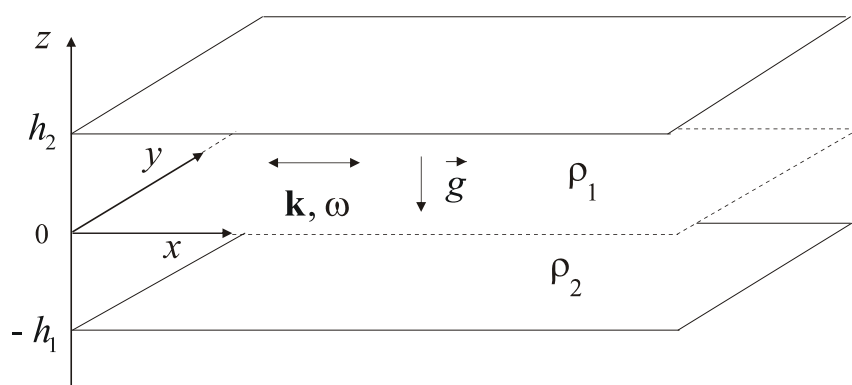


Рис. 1. Геометрия задачи

## 2. Уравнения и граничные условия

Исследуется система, состоящая из двух плоских слоев жидкости, ограниченная твердыми плоскостями. Плотность нижнего (более плотного) слоя  $\rho_1$ ; слой занимает область  $-h_1 < z < 0$ . Плотность верхнего (менее плотного) слоя равна  $\rho_2 < \rho_1$ ; слой занимает область  $0 < z < h_2$ . Жидкости имеют давление  $p_\beta$ , где индекс  $\beta$  нумерует слои. Геометрия задачи показана на рисунке 1.

Сосуд, в котором находятся жидкости, совершает касательные вибрации (на рисунке 1 показаны стрелками «туда-сюда») по закону  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + a_0 \mathbf{k} \sin \omega t$ . Здесь  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор произвольной точки сосуда,  $\mathbf{r}_0$  — его среднее значение;  $a_0$  — амплитуда вибраций,  $\omega$  — их частота;  $\mathbf{k}$  — единичный вектор, направленный вдоль оси вибраций (оси  $x$ );  $t$  — время. Сила тяжести во внимание не принимается.

Для вибраций с высокой частотой  $\omega \gg \nu / L^2$  и малой амплитудой  $a_0 \ll L$ , где  $L$  — характерный размер гидродинамических структур, а  $\nu$  — кинематическая вязкость, все процессы в жидкости можно разделить на быстрые и медленные и произвести расщепление задачи на быструю (пульсационную) и усредненную части [4]. Тогда скорости жидкостей представляются в виде:  $\mathbf{v}_\beta = b_0 \mathbf{V}_\beta \cos \omega t + \mathbf{u}_\beta$ . Здесь  $b_0 = a_0 \omega$  — амплитуда скорости вибраций;  $\mathbf{V}_\beta$  — безразмерные (в качестве единицы измерения выступает амплитуда скорости вибраций  $b_0$ ) векторные амплитуды пульсационных скоростей (в системе отсчета, связанной с сосудом);  $\mathbf{u}_\beta$  — средние скорости движения жидкости. В дальнейшем также будут использоваться безразмерные векторные амплитуды пульсационных скоростей, относящиеся к лабораторной системе отсчета (далее просто пульсационные скорости):  $\mathbf{W}_\beta = \mathbf{V}_\beta + \mathbf{k}$ .

Система уравнений для средних и пульсационных скоростей имеет вид [5]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_\beta}{\partial t} + (\mathbf{u}_\beta \nabla) \mathbf{u}_\beta = -\nabla \left( \frac{p_\beta}{\rho_\beta} + \frac{b_0^2 V_\beta^2}{4} \right) + \nu_\beta \Delta \mathbf{u}_\beta, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_\beta = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{W}_\beta = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{W}_\beta = 0.$$

На твердых стенках ставятся граничные условия прилипания для средней скорости движения жидкости и непроницаемости для пульсационной компоненты:  $\mathbf{u}_\beta = 0$ ,  $W_{\beta n} = 0$ . На поверхности раздела выполняются условия непрерывности для пульсационного давления, нормальной компоненты пульсационной скорости и средней скорости, а также кинематическое условие и условие баланса напряжений:

$$\rho_1 W_{1\tau} = \rho_2 W_{2\tau}, \quad W_{1n} = W_{2n}, \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2, \quad \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla F = 0, \quad (1)$$

$$\frac{b_0^2}{2} V_n [\rho W_i] = -[p] n_i + [\sigma_{ij}] n_j + \alpha (\operatorname{div} \mathbf{n}) n_i.$$

Здесь  $F(\mathbf{r}, t) = z - \xi(x, y) = 0$  — функция, описывающая форму поверхности раздела, где  $\xi(x, y)$  — значение  $z$ -координаты поверхности раздела;  $\mathbf{n}$  — вектор нормали к поверхности раздела;  $\alpha$  — коэффициент поверхностного натяжения;  $\sigma_{ij}$  — тензор вязких напряжений, определенный на поле средних скоростей  $\mathbf{u}_\beta$ ; скобками обозначается скачок величины  $[f] = f_1 - f_2$ ; индекс  $i = 1, 2, 3$  нумерует компоненты векторов.

В жидкости, при выполнении условия замкнутости потока, возможно состояние квазиравновесия, характеризующееся нулевыми средними скоростями ( $\mathbf{u}_\beta = 0$ ) и плоской поверхностью раздела ( $\xi = 0$ ):

$$\mathbf{W}_1 = \left( \frac{h+1}{\rho h+1}; 0; 0 \right), \quad \mathbf{W}_2 = \left( \frac{\rho(h+1)}{\rho h+1}; 0; 0 \right), \quad (2)$$

$$\mathbf{V}_1 = \left( h \frac{1-\rho}{\rho h+1}; 0; 0 \right), \quad \mathbf{V}_2 = \left( \frac{\rho-1}{\rho h+1}; 0; 0 \right), \quad \int_{-h_1}^0 V_{1x} dz + \int_0^{h_2} V_{2x} dz = 0.$$

Здесь  $h = h_2/h_1$  — отношение толщины верхнего слоя к толщине нижнего,  $\rho = \rho_1/\rho_2$  — отношение плотностей. Вместо давления  $p_\beta$  вводится функция  $\pi_\beta = p_\beta + \rho_\beta b_0^2 V_\beta^2/4$ .

Рассматриваются малые возмущения квазиравновесия, пропорциональные  $e^{\lambda t}$ , где  $\lambda$  — инкремент возмущения. Уравнения для возмущений средней скорости имеют вид:  $\partial \mathbf{u}_\beta / \partial t = -\nabla(\pi_\beta/\rho_\beta) + \nu_\beta \Delta \mathbf{u}_\beta$ . Здесь и далее под  $\mathbf{u}_\beta$  и  $\pi_\beta$  понимаются малые возмущения равновесных значений;  $\nabla$  и  $\Delta$  — градиент и лапласиан функции соответственно. Уравнения для возмущений пульсационных скоростей  $w_\beta$  записываются следующим образом:

$$\frac{\partial w_{\beta x}}{\partial x} + \frac{\partial w_{\beta y}}{\partial y} + \frac{\partial w_{\beta z}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial w_{\beta y}}{\partial x} - \frac{\partial w_{\beta x}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w_{\beta z}}{\partial y} - \frac{\partial w_{\beta y}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial w_{\beta x}}{\partial z} - \frac{\partial w_{\beta z}}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

После обезразмеривания с использованием капиллярных единиц (то есть единиц, построенных на основе толщины нижнего слоя, разности плотностей жидкостей и коэффициента поверхностного натяжения) уравнения для возмущений средних скоростей принимают вид:

$$\lambda \mathbf{u}_1 = (1-\rho)/\rho \nabla \pi_1 + \nu_1 \Delta \mathbf{u}_1, \quad \lambda \mathbf{u}_2 = (1-\rho) \nabla \pi_2 + \nu_2 \Delta \mathbf{u}_2. \quad (4)$$

Уравнения для возмущений пульсационных скоростей сохраняют прежний вид. Граничные условия также не меняются за исключением условия баланса напряжений на границе раздела:

$$2BV_n[\rho W_i] = -[\pi]n_i + [\sigma_{ij}]n_j + B[\rho V^2]n_i + (\text{div } \mathbf{n})n_i. \quad (5)$$

Здесь появляется безразмерный параметр  $B$ , характеризующий интенсивность вибраций:  $B = b_0^2 h(\rho_1 - \rho_2)/(4\alpha)$ .

### 3. Слой равной толщины

Рассматривается случай равных толщин слоев:  $h_1 = h_2$ . Тогда пульсационные скорости в квазиравновесии имеют вид:  $\mathbf{W}_1 = (2/(\rho+1); 0; 0)$ ,  $\mathbf{W}_2 = (2\rho/(\rho+1); 0; 0)$ .

#### 3.1. Идеальные жидкости. Плоские возмущения

Исследуется равновесие плоской границы раздела жидкостей по отношению к плоским периодическим возмущениям  $\sim e^{ikx}$ , то есть таким, у которых нет зависимости от координаты  $y$  и отсутствуют  $y$ -компоненты скоростей. Выражение для нейтральной кривой, связывающее волновое число возмущений  $k$  и значение вибрационного параметра  $B$ , при котором равновесие становится неустойчивым по отношению

к возмущениям с данным волновым числом, в размерном виде получено в [4]. После обезразмеривания с использованием капиллярных единиц и без учета силы тяжести оно принимает вид:

$$B = (\rho + 1)^3 k \operatorname{th} k / (8\rho(\rho - 1)). \quad (6)$$

Несмотря на то, что нейтральная кривая получена для общего случая вязких жидкостей, она, как видно, не зависит от вязкости.

Для нахождения инкрементов возмущений необходимо рассмотреть систему уравнений (3), (4) и граничных условий (1), (5) в невязком случае, то есть с отброшенными вязкими членами в уравнениях для возмущений средних скоростей и без учета тензора вязких напряжений в уравнении баланса нормальных напряжений. Процедура решения получающейся задачи подробно описана в следующем разделе, где рассматриваются вязкие жидкости.

Для идеальных жидкостей удается найти решение для инкремента возмущений в явном виде:  $\lambda^2 = 8B\rho k^2 (\rho - 1)^2 / (\rho + 1)^4 - (\rho - 1)k^3 \operatorname{th} k / (\rho + 1)$ . Отсюда при  $\lambda = 0$  следует нейтральная кривая (6). После дифференцирования  $\lambda$  по  $k$  и приравнивания полученного выражения к нулю устанавливается связь вибрационного параметра и соответствующего ему волнового числа наиболее опасных возмущений:

$$B = (\rho + 1)^3 (3k \operatorname{th} k + k^2 / \operatorname{ch}^2 k) / (16\rho(\rho - 1)). \quad (7)$$

### 3.2. Вязкие жидкости. Плоские возмущения

Здесь и далее рассматривается общий случай вязких жидкостей. При исследовании плоских возмущений вводятся функции тока  $\zeta_0, \theta_0, \psi_0, \phi_0$  для возмущений средних и пульсационных скоростей:  $u_{1x} = \partial\zeta_0/\partial z$ ,  $u_{1z} = -\partial\zeta_0/\partial x$ ,  $u_{2x} = \partial\theta_0/\partial z$ ,  $u_{2z} = -\partial\theta_0/\partial x$ ,  $w_{1x} = \partial\psi_0/\partial z$ ,  $w_{1z} = -\partial\psi_0/\partial x$ ,  $w_{2x} = \partial\phi_0/\partial z$ ,  $w_{2z} = -\partial\phi_0/\partial x$ . Вновь все возмущения являются периодическими функциями  $x$ :  $\zeta_0(x, z) = \zeta(z)e^{ikx}$ ,  $\theta_0(x, z) = \theta(z)e^{ikx}$ ,  $\psi_0(x, z) = \psi(z)e^{ikx}$ ,  $\phi_0(x, z) = \phi(z)e^{ikx}$ . Буквами  $\zeta, \theta, \psi, \phi$ , обозначаются амплитуды соответствующих функций, зависящие от  $z$ . Уравнения и граничные условия принимают вид:

$$\lambda\zeta' = (1 - \rho)ik\pi_1/\rho + v_1(\zeta''' - k^2\zeta'), \quad ik\lambda\zeta = (\rho - 1)\pi_1'/\rho + v_1(ik\zeta'' - ik^3\zeta), \quad (8)$$

$$\lambda\theta' = (1 - \rho)ik\pi_2 + v_2(\theta''' - k^2\theta'), \quad ik\lambda\theta = (\rho - 1)\pi_2' + v_2(ik\theta'' - ik^3\theta), \quad (9)$$

$$\psi'' - k^2\psi = 0, \quad \phi'' - k^2\phi = 0; \quad (10)$$

$$z = -1: \quad \zeta = \zeta' = \psi = 0; \quad (11)$$

$$z = 1: \quad \theta = \theta' = \phi = 0; \quad (12)$$

$$z = 0: \quad \zeta = \theta, \quad \zeta' = \theta', \quad \lambda\xi = -ik\zeta, \quad \rho\psi' = \phi', \quad \psi - \phi = 2(\rho - 1)\xi/(\rho + 1), \quad (13)$$

$$\eta_2(\theta'' + k^2\theta) - \eta_1(\zeta'' + k^2\zeta) + ikB(\rho - 1)^2 / ((\rho + 1)^2 \xi) = 0, \quad (14)$$

$$2ik\eta_1\zeta' - 2ik\eta_2\theta' + \pi_1 - \pi_2 + 4B\phi'/(\rho + 1) - k^2\xi = 0. \quad (15)$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по  $z$ ,  $\eta_\beta$  — безразмерные динамические вязкости,  $\xi$  — амплитуда возмущения поверхности раздела.

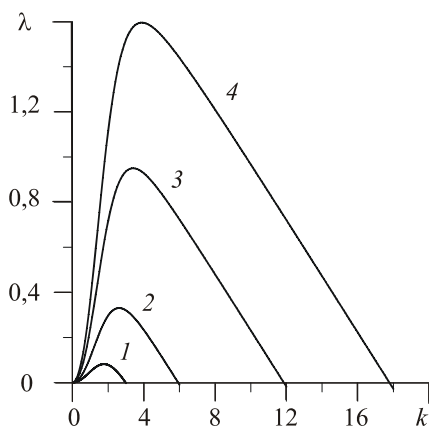
Аналитическое решение линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (8)–(10) и подстановка полученных решений

в виде линейных комбинаций независимых решений в граничные условия (11)–(15) дают систему линейных однородных уравнений для коэффициентов при независимых решениях. Из равенства нулю определителя этой системы находятся значения  $\lambda$ . Полученное уравнение для инкремента решалось с помощью комплексного варианта метода секущих.

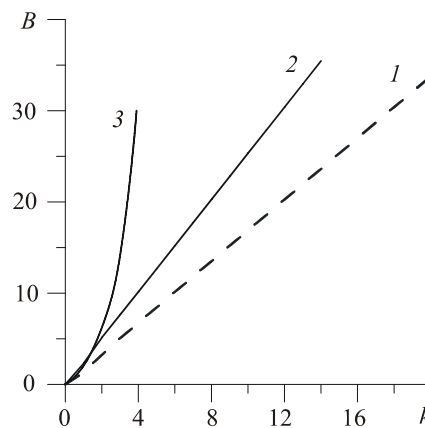
Далее приводятся результаты вычислений для случая слоев одинаковой толщины. Вязкие жидкости имеют отношение плотностей  $\rho = 2$  и вязкости  $\nu_1 = 1$ ,  $\nu_2 = 2$ . Жидкости подвергаются воздействию плоских возмущений.

На рисунке 2 показаны зависимости инкремента  $\lambda$  от волнового числа для разных значений вибрационного параметра  $B$ . При каждом значении  $B$  имеется диапазон значений волнового числа  $k$ , в котором возмущения нарастают. При увеличении вибрационного параметра этот диапазон расширяется. Видно, что волновое число наиболее опасных возмущений слабо зависит от  $B$  и равно примерно 3, то есть длина волны наиболее опасных возмущений имеет порядок удвоенной толщины слоя. Как показывают расчеты, все колебательные возмущения являются затухающими. В отсутствие вибраций эти возмущения представляют собой капиллярные волны. Появление вибраций уменьшает их частоту благодаря бернуллиевскому механизму, и, как видно из рисунка 2, при достаточно большой скорости вибраций колебательные возмущения исчезают из спектра.

Рисунок 3 содержит нейтральную кривую  $B(k)$ , а также зависимости волнового числа наиболее опасных возмущений от вибрационного параметра для идеальных и вязких жидкостей. Как видно, длина волны наиболее опасных возмущений бесконечна при  $B = 0$  и уменьшается с ростом  $B$ . Для фиксированного  $B$  длина волны наиболее опасных возмущений в вязком случае больше, чем в случае идеальных жидкостей, так как вязкость эффективнее подавляет коротковолновые возмущения.



**Рис. 2.** Зависимость инкремента  $\lambda$  от волнового числа  $k$  для различных значений вибрационного параметра  $B$ : 5 (кривая 1), 10 (2), 20 (3), 30 (4); жидкости вязкие, плоские возмущения



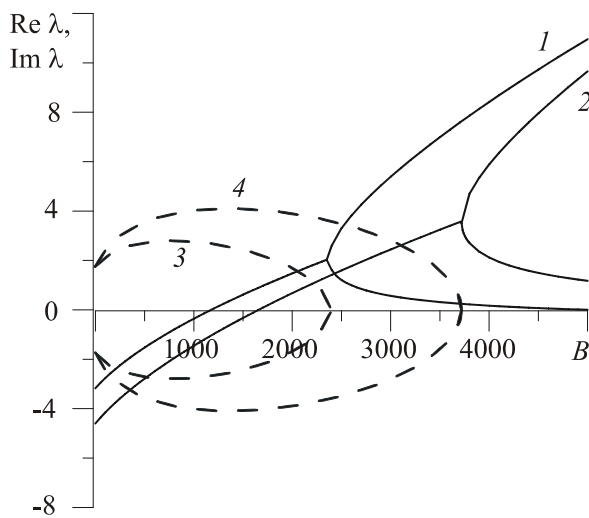
**Рис. 3.** Нейтральная кривая  $B(k)$  (кривая 1), зависимость волнового числа наиболее быстро растущих возмущений  $k$  от вибрационного параметра  $B$  для идеальных (2) и вязких (3) жидкостей; плоские возмущения

### 3.3. Спиральные возмущения

Спиральные возмущения характеризуются отличными от нуля тремя компонентами скорости и отсутствием зависимости от продольной координаты  $x$ . Пусть возмущения распространяются по закону  $\sim e^{iky}$ . Можно показать, что возмущения пульсационных скоростей равны нулю, а  $x$ -компоненты возмущений средних скоростей являются затухающими.

Вновь вводятся функции тока, теперь для  $y$ - и  $z$ -компонент возмущений средних скоростей:  $u_{1y} = \partial\zeta/\partial z$ ,  $u_{1z} = -\partial\zeta/\partial y$ ,  $u_{2y} = \partial\theta/\partial z$ ,  $u_{2z} = -\partial\theta/\partial y$ . Для функций тока вновь получаются уравнения (8), (9). Граничные условия совпадают с (11)–(15), если в последних положить  $\psi = \phi = 0$ . В результате решения получается система линейных однородных уравнений для коэффициентов при независимых решениях, из равенства нулю определителя которой находятся  $\lambda$ .

Расчеты показывают, что вибрации не влияют на монотонные инкременты, по крайней мере, при умеренных значениях  $B$ . Все монотонные спиральные возмущения затухают. В спектре присутствуют колебательные возмущения, но при умеренных значениях  $B$  все они также являются затухающими. Однако при больших  $B$  (порядка 1000 и выше) появляются растущие спиральные колебательные возмущения (см. Рис. 4). При дальнейшем увеличении вибрационного параметра колебательные возмущения исчезают из спектра.



**Рис. 4.** Зависимость действительных (сплошные линии) и мнимых (штриховые линии) частей колебательных инкрементов  $\lambda$  от вибрационного параметра  $B$  для двух значений волновых чисел  $k$ : 4 (кривые 1, 3), 5 (кривые 2, 4); жидкости вязкие, спиральные возмущения

### 3.4. Пространственные возмущения

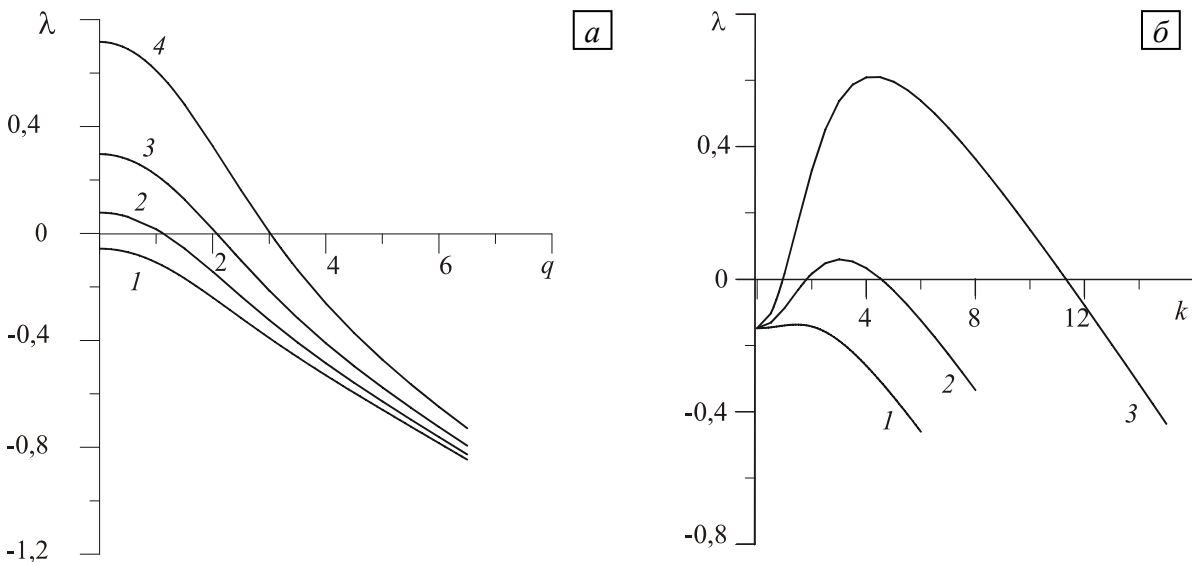
В теории гидродинамической устойчивости плоскопараллельных течений существуют преобразование Сквайра, позволяющее свести задачу для пространственных возмущений к задаче для плоских возмущений, и теорема Сквайра, согласно которой плоские возмущения являются наиболее опасными. Но в случае, который будет рассматриваться далее, преобразование Сквайра провести не удастся, поэтому будут рассматриваться пространственные возмущения. При этом все три компоненты возмущений средних и пульсационных скоростей отличны от нуля. Пусть возмущения распространяются по закону  $\sim e^{i(kx+qy)}$ .

Уравнения и граничные условия для амплитуд пульсационных скоростей принимают вид:  $ikw_{\beta y} - iqw_{\beta x} = 0$ ,  $ikw_{\beta z} - w'_{\beta x} = 0$ ,  $iqw_{\beta z} - w'_{\beta y} = 0$ ,  $ikw_{\beta x} + iqw_{\beta y} + w'_{\beta z} = 0$ ;  $z = 0$ :  $w_{2x} = \rho w_{1x}$ ,  $w_{2y} = \rho w_{1y}$ ,  $w_{1z} - w_{2z} = 2ik \frac{1-\rho}{1+\rho} \xi$ ;  $z = -1$ :  $w_{1z} = 0$ ;  $z = 1$ :  $w_{2z} = 0$ . Из их решения удастся найти величину, фигурирующую в граничных условиях для средних скоростей:  $w_{2x}(0) = -2k^2 \rho (1-\rho) \text{cth } a \xi / (a(1+\rho)^2)$ , где  $a = \sqrt{k^2 + q^2}$ .

Уравнения для возмущений средних скоростей имеют общий вид (4), а граничные условия записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
u_{1x}(-1) &= u_{1y}(-1) = u_{1z}(-1) = u_{2x}(1) = u_{2y}(1) = u_{2z}(1) = 0, & u_{1x}(0) &= u_{2x}(0), & u_{1y}(0) &= u_{2y}(0), \\
u_{1z}(0) &= u_{2z}(0), & \lambda \xi &= u_{1z}(0), & \eta_2(u'_{2x} + iku_{2z}) - \eta_1(u'_{1x} + iku_{1z}) + ikB(\rho-1)^2/(\rho+1)^2 \xi &= 0, \\
\eta_2(u'_{2y} + iqu_{2z}) - \eta_1(u'_{1y} + iqu_{1z}) + iqB(\rho-1)^2/(\rho+1)^2 \xi &= 0, \\
2\eta_2 u'_{2z} - 2\eta_1 u'_{1z} + 4Bw_{2x}/(\rho+1) + \pi_1 - \pi_2 - a^2 \xi &= 0.
\end{aligned}$$

На рисунке 5 представлены зависимости инкремента  $\lambda$  от компоненты волнового вектора  $q$  (Рис. 5, *a*) при фиксированном  $k=2$  и от компоненты  $k$  (Рис. 5, *б*) при фиксированном  $q=2$  в случае пространственных возмущений слоев равной толщины для разных значений вибрационного параметра. Видно, что рост  $q$  приводит к стабилизации равновесия. Следовательно, можно заключить, что пространственные возмущения менее опасны, чем плоские. Естественно, усиление вибраций приводит к дестабилизации, область неустойчивости по  $q$  увеличивается. При нулевом  $k$  инкремент отрицательный, что соответствует спиральным возмущениям. При достаточно сильных вибрациях имеется конечная по  $k$  область неустойчивости, тем большая, чем интенсивнее вибрации. В спектре также присутствуют колебательные возмущения, но все они являются затухающими.



**Рис. 5.** Зависимость инкремента  $\lambda$  от компонент волнового числа  $q$  (*a*) и  $k$  (*б*) для значений вибрационного параметра  $B$ : 2 (кривая 1), 5(2), 10 (3), 20 (4) – фрагмент (*a*) и 5 (кривая 1), 10(2), 20 (3) – фрагмент (*б*); жидкости вязкие, пространственные возмущения

#### 4. Слой разной толщины

Рассматривается случай, когда слои имеют разную толщину. Пульсационные скорости в квазиравновесии теперь имеют общий вид (2).

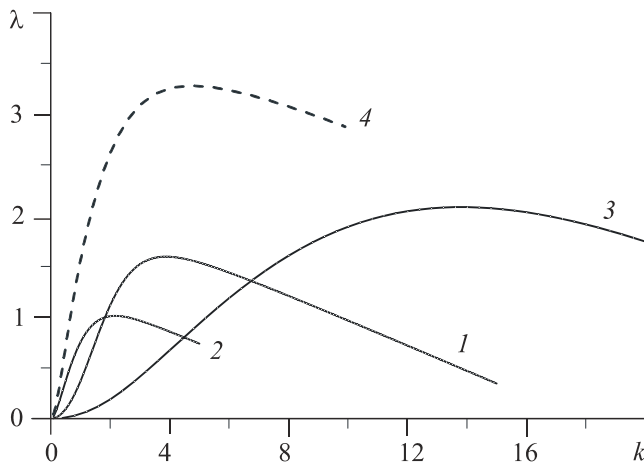
##### 4.1. Плоские возмущения

Задача решается так же, как и в случае слоев равной толщины. Уравнения для функций тока возмущений средних и пульсационных скоростей сохраняют прежний вид. Ставится граничное условие прилипания для верхнего слоя при  $z = h$ . Условие равенства нормальных компонент пульсационных скоростей на поверхности раздела дает выражение:  $\psi - \phi = 2(h+1)(\rho-1)\xi/(\rho h+1)$ . Уравнение баланса напряжений на границе раздела в проекциях на оси  $x$  и  $z$  позволяет записать условия для амплитуд:



$\eta_2(\theta'' + k^2\theta) - \eta_1(\zeta'' + k^2\zeta) + ikB(\rho - 1)(\rho h^2 - 1)\xi / (1 + \rho h)^2 = 0$ ,  $2ik\eta_1\zeta' - 2ik\eta_2\theta' + \pi_1 - \pi_2 + 2B(1 + h)\phi' / (\rho h + 1) - k^2\xi = 0$ . Остальные граничные условия сохраняют прежний вид.

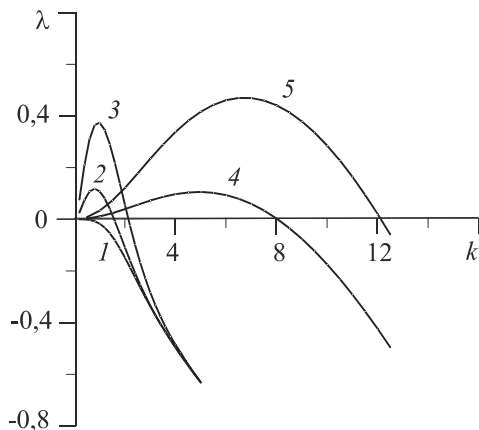
На рисунке 6 показаны зависимости инкремента  $\lambda$  от волнового числа для разных значений отношения толщин слоев (при этом верхний слой менее плотный):  $h = 1$  соответствует слоям одинаковой толщины,  $h = 10$  — случаю, когда верхний слой в 10 раз толще нижнего,  $h = 0,1$  — нижний слой в 10 раз толще верхнего. Кривая 4 соответствует тем же значениям параметров, что и кривая 3, но расчет произведен в новых единицах, где в качестве единицы длины взята толщина более тонкого верхнего слоя. Как видно, в этом случае волновые числа наиболее опасных возмущений имеют один и тот же порядок для всех трех систем, то есть длина волны определяется толщиной более тонкого слоя. В спектре также присутствуют колебательные возмущения, но все они являются затухающими.



**Рис. 6.** Зависимость инкремента  $\lambda$  от волнового числа  $k$  при плоских возмущениях слоев вязких жидкостей;  $h = 1$  (кривая 1); 10(2); 0,1(3, 4)

#### 4.2. Спиральные возмущения

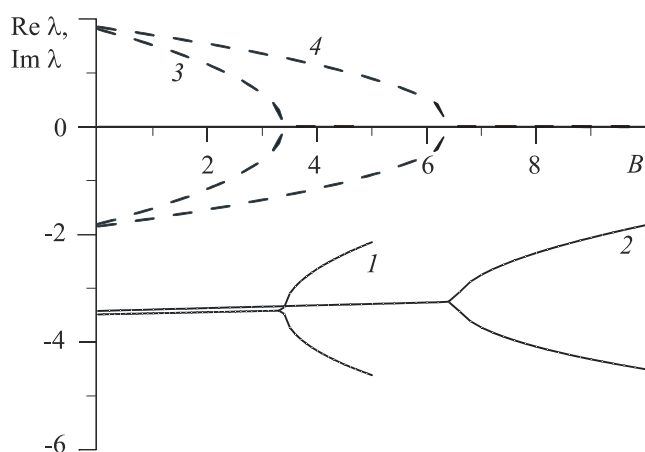
В этом случае условие баланса напряжений на границе раздела в проекции на ось  $y$  принимает вид:  $\eta_1(\zeta'' + k^2\zeta) - \eta_2(\theta'' + k^2\theta) - ikB\xi(\rho - 1)(\rho h^2 - 1) / (1 + \rho h)^2 = 0$ . Граничное условие прилипания для верхнего слоя ставится при  $z = h$ . На рисунке 7 показана зависимость инкремента  $\lambda$  от волнового числа  $k$  для разных соотношений толщин слоев. Для случая неравных толщин слоев наблюдается появление вблизи нуля увеличивающейся с ростом  $B$  области значений  $k$ , в которой монотонные спиральные возмущения нарастают. Однако расчеты свидетельствуют, что плоские возмущения по-прежнему остаются более опасными.



**Рис. 7.** Зависимость инкремента  $\lambda$  от волнового числа  $k$  при спиральных возмущениях слоев вязких жидкостей для различных  $h$  и  $B$ : 1 и 30 (кривая 1); 10 и 10 (2); 10 и 30 (3); 0,1 и 10 (4); 0,1 и 30 (5)

### 4.3. Пространственные возмущения

Решение задачи для пространственных возмущений демонстрирует, что изменение толщин слоев не вносит принципиальных изменений в поведение возмущений. В спектре присутствуют растущие монотонные возмущения. Увеличение компоненты волнового вектора  $q$  приводит к стабилизации. На рисунке 8 показан колебательный спектр пространственных возмущений. Колебательные возмущения затухают, наблюдается увеличение области их существования в случае толстого верхнего слоя.



**Рис. 8.** Зависимость действительных (сплошные линии) и мнимых (штриховые линии) частей колебательных инкрементов  $\lambda$  от вибрационного параметра  $B$  для  $h=1$  (кривые 1, 3); 10 (кривые 2, 4) при пространственных возмущениях слоев вязких жидкостей;  $k=3$ ,  $q=3$

## 5. Сравнение с экспериментом

В работе [3] представлены эксперименты по воздействию высокочастотных вибраций на систему, состоящую из жидкой и газообразной ( $\text{CO}_2$ ) фаз, вблизи критической точки в условиях невесомости. Двухфазная система заключена в цилиндрическую ячейку. Первоначально газообразная фаза образует капли, взвешенные в жидкой фазе. Включение вибраций, перпендикулярных оси цилиндра, приводит к формированию чередующихся полос разных фаз (страт), ориентированных перпендикулярно направлению вибраций. Условия эксперимента следующие:  $T_c - T = 15 \text{ мК}$ , частота вибраций  $n = 60 \text{ Гц}$ , амплитуда вибраций  $a = 0,3 \text{ мм}$ , полутолщина ячейки  $h = 0,5 \text{ см}$ . Ширина страт, полученная экспериментально, приблизительно равна 1 мм.

Кинематические вязкости фаз малы и приблизительно равны  $\nu = 3,25 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2/\text{с}$ . Малость вязкостей и высокая частота вибраций делают обоснованным применение к описанию данного эксперимента приближения идеальных жидкостей и результатов теории, развитой в разделе 3.1. Условиям эксперимента соответствуют вибрационный параметр  $B = 355$  и отношение плотностей фаз  $\rho = 1,14$ . Из формулы (7) получается волновое число наиболее опасных возмущений, равное  $k = 31$ , и соответствующая длина волны:  $\lambda \approx 1 \text{ мм}$ .

Таким образом, экспериментальная ширина страт совпадает с вычисленной длиной волны наиболее опасных возмущений. Правильность предсказания теорией пространственной периодичности возникающей структуры является подтверждением того, что механизм образования страт состоит в нарастании возмущений с максимальным инкрементом.

## 6. Заключение

Исследованы спектры возмущений плоской поверхности раздела жидкостей различных, но сравнимых плотностей в присутствии касательных вибраций в условиях невесомости. Рассмотрены системы со слоями одинаковой толщины и разной (с соотношением толщин 1 к 10) для случаев плоских, спиральных, пространственных возмущений.

Показано, что потеря устойчивости происходит благодаря плоским монотонным возмущениям. В рассматриваемой задаче нет аналога теоремы Сквайра, но оказывается, что спиральные и пространственные моды менее опасны.

Найдены нарастающие колебательные спиральные возмущения при больших значениях вибрационного параметра для системы слоев одинаковой толщины, а также растущие монотонные спиральные возмущения для слоев разной толщины.

Показано, что длина волны наиболее опасных возмущений для вязких жидкостей имеет величину порядка удвоенной толщины слоя и слабо зависит от вибрационного параметра. Длина волны возмущений с максимальным инкрементом для вязких жидкостей больше, чем для идеальных. В случае, когда слои имеют разную толщину, длина волны наиболее опасных возмущений определяется толщиной слоя, который тоньше.

Сравнением экспериментальных и аналитических результатов подтвержден механизм формирования чередующихся страт, наблюдавшихся в эксперименте с двухфазной колеблющейся системой в условиях невесомости, состоящий в нарастании возмущений с максимальным инкрементом.

## Литература

1. *Wolf G.H.* The dynamic stabilization of the Rayleigh-Taylor instability and the corresponding dynamic equilibrium // *Z. Physik.* – 1969. – V. 227, N. 3. – P. 291-300.
2. *Безденежных Н.К., Брискман В.А., Любимов Д.В., Черепанов А.А.* Управление устойчивостью поверхности раздела жидкостей с помощью вибраций, электрических и магнитных полей // 3-й Всесоюз. семинар по гидромеханике и теплообмену в невесомости. Тез. докл. – Черногловка, 1984. – С. 18-20.
3. *Beysens D., Wunenburger R., Chabot C., Garrabos Y.* Effect of oscillatory accelerations on two-phase fluids // *Microgravity Sci. Technol.* – V. 11, N. 3. – 1998. – P. 113-118.
4. *Любимов Д.В., Лобов Н.И., Черепанов А.А.* О равновесной границе раздела жидкостей в высокочастотном вибрационном поле // 3-й Всесоюз. семинар по гидромеханике и теплообмену в невесомости. Тез. докл. – Черногловка, 1984. – С. 100.
5. *Любимов Д.В., Черепанов А.А.* О возникновении стационарного рельефа на поверхности раздела жидкостей в вибрационном поле // *Изв. АН СССР. МЖГ.* – 1986. – № 6. – С. 8-13.

Поступила в редакцию 17.03.11

---

### Сведения об авторах

*Бурнышева Анастасия Викторовна*, инж., Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН); Email: burnysheva75@mail.ru

*Любимов Дмитрий Викторович*, дфмн., проф., зав.кафедрой, Пермский государственный национальный исследовательский университет (ПГНИУ), Россия, 614990, Пермь, ул.Букирева, д.15; Email: lyubimov@psu.ru

*Любимова Татьяна Петровна*, дфмн., проф., зав.лаб., ИМСС УрО РАН; Email: lyubimovat@mail.ru