

УДК: 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДИКИ НЕЗАВИСИМОГО УПРАВЛЕНИЯ ПОЛНЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ ПОСРЕДСТВОМ СОБСТВЕННЫХ ДЕФОРМАЦИЙ В ДИСКРЕТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

В.С. Туктамышев, В.А. Лохов, Ю.И. Няшин

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

В работе рассмотрена концепция независимого управления напряжённым и деформированным состояниями в системах с наложенными собственными (неупругими) деформациями. Детально исследован алгоритм независимого управления полными деформациями. Для дискретизированных систем эта методика является универсальной и может использоваться в рамках метода конечных элементов. Показано математическое условие, определяющее возможность такого управления.

Ключевые слова: собственные деформации, декомпозиция, независимое управление полными деформациями

STUDY OF THE METHOD OF INDEPENDENT DEFORMATION CONTROL BY EIGENSTRAIN IN DISCRETIZED SYSTEMS

V.S. Tuktamyshev, V.A. Lokhov and Y.I. Nyashin

Perm State National Research Polytechnical University, Perm, Russia

The concept of independent stress and deformation control in the systems with imposed eigenstrain is investigated. The algorithm of independent deformation control is considered in detail. For discretized systems, it is a general-purpose approach, which can be used in the framework of the finite element method. A mathematical criterion for the possibility of independent deformation control is presented.

Key words: eigenstrain, decomposition, independent deformation control

1. Введение

Термин «собственные деформации» впервые ввел Рейсснер в 1931 году [1]. Под этим термином он понимал неупругие деформации, соответствующие самоуравновешенным остаточным напряжениям. В 1991 году Мура [2] предложил более общее определение собственной деформации, которое и принято в современной научной литературе. В рамках геометрически линейной теории это есть неупругие деформации любой природы (температурные, пьезоэлектрические, деформации фазовых переходов и другие). Гипотеза Рейсснера заключается в том, что собственная деформация может быть найдена независимо от решения краевой задачи теории упругости. Например: температурная деформация определяется изменением температуры, вычисляемой на основе уравнения теплопроводности; пьезоэлектрическая деформация определяется внешним электрическим полем, и так далее. Поэтому в уравнениях краевой задачи собственная деформация считается известной. Использование термина «собственная деформация» позволяет рассматривать различные виды неупругих деформаций с единой математической точки зрения, в частности строить решения задач независимого управления напряжениями и (или) деформациями.

Под независимым управлением полными деформациями (перемещениями) системы понимается создание, с помощью собственных деформаций, требуемого поля полных деформаций (перемещений) без воздействия на её напряжённое состояние.

Задачи независимого управления особенно важны при проектировании интеллектуальных, то есть способных адаптироваться к изменяющимся условиям эксплуатации, конструкций.

В работе [3] доказывается фундаментальная теорема о декомпозиции собственной деформации на две составляющие, одна из которых свободна от напряжений [2], другая — свободна от деформаций [4]. Именно эта теорема, по мнению авторов, представляет теоретический и прикладной интерес и позволяет эффективно решать задачи независимого управления.

Следует отметить, что впервые метод декомпозиции для решения уравнений в частных производных предложил Заремба [5], разложение пространства напряжений описано в работах [6–8].

Для применимости теоремы о декомпозиции на практике необходимо создать методику исследования условий существования упомянутых составляющих собственной деформации, а также математически формализовать ограничения, связанные с особенностями различных видов неупругого деформирования.

2. Дифференциальная постановка краевой задачи с собственными деформациями

Пусть исследуемое тело занимает ограниченную область Ω трехмерного евклидова пространства A^3 . Замыкание области обозначим через $\bar{\Omega}$, границу (считающуюся достаточно гладкой) — через Γ ($\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$). Краевая задача формулируется следующим образом.

Внутри области выполняются уравнения статического равновесия:

$$\operatorname{div} \hat{\sigma} + \mathbf{q} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

где $\hat{\sigma}$ — симметричный тензор напряжений, \mathbf{q} — вектор объемных сил, $\mathbf{q} \in (C(\Omega))^3$. В формуле (1) и далее величины напряжений σ , деформаций ε и перемещений u будут рассматриваться как функции пространственных декартовых ортогональных координат, которым соответствует радиус-вектор $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$.

Деформации считаются малыми и аддитивными. Это значит, что тензор малой деформации $\hat{\varepsilon}$ является суммой упругой $\hat{\varepsilon}^e$ и собственной $\hat{\varepsilon}^* \in (C^1(\Omega))^6$ деформаций:

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}^e + \hat{\varepsilon}^*, \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \quad (2)$$

Предполагается, что собственные деформации $\hat{\varepsilon}^*$ можно найти отдельно, используя соответствующие определяющие соотношения. Например, для температурной деформации такое соотношение имеет вид: $\hat{\varepsilon}^* = \hat{\alpha} \Delta T$ ($\hat{\alpha}$ — тензор коэффициентов температурного расширения, ΔT — изменение температуры, отсчитываемое от состояния, в котором $\hat{\sigma} = 0$, $\hat{\varepsilon} = 0$, $\mathbf{u} = 0$) и так далее. Поэтому в рамках данной постановки $\hat{\varepsilon}^*$ считается известной величиной.

Упругие деформации и напряжения в системе связываются законом Гука:

$$\hat{\sigma} = \hat{C} \cdot \hat{\varepsilon}^e, \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad (3)$$

где \hat{C} — тензор упругих модулей, $C_{ijkl} \in (C^1(\Omega))$, а деформации и перемещения системы — геометрическими соотношениями Коши:

$$\hat{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla) / 2, \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad (4)$$

где \mathbf{u} — вектор перемещения, $\mathbf{u} \in (C^2(\bar{\Omega}))^3$.

Деформации системы также удовлетворяют уравнениям совместности:

$$\text{rot}(\text{rot } \hat{\varepsilon})^T = 0, \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad (5)$$

где T — знак операции транспонирования.

Считается, что граница области Γ делится на две взаимно непересекающиеся части: $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$. На части границы Γ_u заданы нулевые кинематические граничные условия, на части Γ_σ — вектор напряжений $\mathbf{p} \in (C(\Gamma_\sigma))^3$:

$$\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad \mathbf{n} \cdot \hat{\sigma} = \mathbf{p}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma \quad (6)$$

Здесь кинематические граничные условия предполагают, что движение тела как жесткого целого невозможно.

Таким образом, совместное решение уравнений (1–6) позволяет определить напряжения, деформации и перемещения системы.

3. Обобщенная постановка краевой задачи с собственными деформациями

Как правило, задачи механики сплошной среды требуют применения численных методов, например, метода конечных элементов. В этом случае необходимы обобщенная постановка краевой задачи и обобщенное решение.

Назовём обобщенным решением симметричный тензор $\hat{\sigma}$, который определяется обобщенным законом Гука $\hat{\sigma} = \hat{C} \cdot (\hat{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \hat{\varepsilon}^*)$, где $\mathbf{u} \in (W_2^1(\Omega))^3$, $\mathbf{u} = 0$, $\mathbf{x} \in \Gamma_u$, и для которого работа внешних и внутренних сил на возможных перемещениях \mathbf{w} равна нулю:

$$\int_{\Omega} \hat{\sigma} \cdot \hat{\varepsilon}(\mathbf{w}) d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{p} \cdot \mathbf{w} dS - \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{w} d\Omega = 0, \quad \forall \mathbf{w} \in (W_2^1(\Omega))^3, \quad \mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u. \quad (7)$$

Здесь W_2^1 — пространство Соболева функций, имеющих первую обобщенную производную. Деформации $\hat{\varepsilon}(\mathbf{u})$ и $\hat{\varepsilon}(\mathbf{w})$ определяются геометрическими соотношениями Коши (4), где производные понимаются в обобщенном смысле. Значения перемещений \mathbf{u} и \mathbf{w} на границе вычисляются посредством оператора следа. В постановке задачи (7) считается, что $\mathbf{p} \in (L_2(\Gamma_\sigma))^3$, $\mathbf{q} \in (L_2(\Omega))^3$, $\hat{\varepsilon}^* \in (L_2(\Omega))^6$, а компоненты C_{ijkl} ($i, j, k, l = 1, 2, 3$) являются кусочно-непрерывными функциями координат.

В работе [9] показано, что классическое решение является обобщенным, а, в случае достаточной гладкости напряжений, обобщенное решение является классическим.

4. Собственные деформации, свободные от напряжений и свободные от полных деформаций

Пусть собственная деформация $\hat{\varepsilon}_1^*$ распределена таким образом, что не вызывает напряжений в теле. Тогда краевая задача (1)–(6), при отсутствии объёмных и поверхностных сил, принимает вид:

$$\hat{\sigma}_1 = 0, \quad \hat{\varepsilon}_1 = \hat{\varepsilon}_1^*, \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}; \quad \hat{\varepsilon}_1 = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1 \nabla), \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}; \quad \mathbf{u}_1 = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u.$$

В результате полная деформация равна собственной деформации.

Следует отметить, что собственная деформация, создаваемая в теле, может приводить к возникновению напряжений и не вызывать полных деформаций

(нильпотентная собственная деформация [4]). В этом случае краевая задача (1)–(6) (при $\mathbf{q} = 0$, $\mathbf{p} = 0$) выглядит так:

$$\nabla \cdot \hat{\sigma}_2 = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega; \quad \hat{\sigma}_2 = -\hat{C} \cdot \hat{\varepsilon}_2^*, \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}; \quad \mathbf{n} \cdot \hat{\sigma}_2 = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma; \quad \mathbf{u}_2 = 0, \quad \hat{\varepsilon}_2 = 0, \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$

В результате полная деформация равна нулю.

Важно, что вышеупомянутые задачи имеют неединственные решения и определяют множества собственных деформаций, свободных от напряжений и свободных от полных деформаций.

Для случая обобщенного решения справедливы следующие постановки:

– для собственных деформаций, свободных от напряжений

$$\hat{\sigma}_1 = \hat{C} \cdot (\hat{\varepsilon}_1(\mathbf{u}_1) - \hat{\varepsilon}_1^*) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mathbf{u} \in (W_2^1(\Omega))^3, \quad \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad (8)$$

где $\hat{\varepsilon}_1(\mathbf{u}_1)$ вычисляется по геометрическим соотношениям Коши;

– для собственных деформаций, свободных от полных деформаций

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_2 = -\hat{C} \cdot \hat{\varepsilon}_2^*, & \mathbf{x} \in \Omega, \quad \hat{\varepsilon}_2 = 0, \quad \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \\ \int_{\Omega} \hat{\sigma}_2 \cdot \hat{\varepsilon}(\mathbf{w}) d\Omega = 0, & \forall \mathbf{w} \in (W_2^1(\Omega))^3, \quad \mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u. \end{cases} \quad (9)$$

5. Функциональные пространства собственных деформаций

Более детальное исследование свойств собственных деформаций при решении краевой задачи проведено посредством аппарата функционального анализа с использованием энергетического функционального пространства собственных деформаций.

Рассмотрим множество H симметричных тензоров второго ранга. Пусть компоненты тензоров являются вещественными функциями пространственных координат и принадлежат функциональному пространству L_2 [10]. Скалярное произведение в пространстве H введем следующим образом:

$$(\hat{A}, \hat{B})_H = \int_{\Omega} A_{ij} C_{ijkl} B_{kl} d\Omega; \quad (10)$$

норму в пространстве определим через скалярное произведение:

$$\|\hat{A}\|_H = \sqrt{(\hat{A}, \hat{A})_H}. \quad (11)$$

Можно показать, что соотношение (10) удовлетворяет аксиомам скалярного произведения.

Так как пространство $(L_2)^6$ — полное пространство, то и пространство H также является полным и потому гильбертовым.

Далее выделим подпространство H_u совместных собственных деформаций. Некоторый симметричный тензор собственной деформации $\hat{\varepsilon}_u^* \in H$ принадлежит подпространству H_u , если для него существует такая вектор-функция (перемещение) $\exists \mathbf{u} \in (W_2^1(\Omega))^3$, что $\mathbf{u} = 0$ при $\mathbf{x} \in \Gamma_u$ и $\hat{\varepsilon}_u^* = (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla)/2$. Здесь производные понимаются в обобщенном смысле, а значение функции \mathbf{u} на границе Γ_u определяется посредством оператора следа. Доказано [3], что подпространство H_u образует множество элементов собственных деформаций $\hat{\varepsilon}_u^*$, свободных от напряжений. Другими словами, элементы H_u удовлетворяют уравнению (8).

Следующее подпространство H_σ введем при помощи условия, что собственная деформация $\hat{\varepsilon}_\sigma^*$ является свободной от полных деформаций (при отсутствии внешних сил). Тогда

$$\hat{\varepsilon}_\sigma^* = -\hat{C}^{-1} \cdot \hat{\sigma}, \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad (12)$$

где напряжения удовлетворяют уравнению равновесия (7) при отсутствии внешних сил:

$$\int_{\Omega} \hat{\sigma} \cdot \hat{\varepsilon}(\mathbf{w}) d\Omega = 0, \quad \forall \mathbf{w} \in (W_2^1(\Omega))^3, \quad \mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u. \quad (13)$$

Множество собственных деформаций $\hat{\varepsilon}_\sigma^*$ в выражении (12) образует линейное подпространство H_σ [3]. Элементы этого подпространства удовлетворяют системе уравнений (9).

6. Теорема о декомпозиции собственной деформации

Эта теорема отражает фундаментальное свойство собственной деформации:

Теорема. Любая собственная деформация, существующая в теле, может быть единственным образом разложена на составляющую $\hat{\varepsilon}_u^*$, свободную от напряжений, и составляющую $\hat{\varepsilon}_\sigma^*$, свободную от полных деформаций: $\hat{\varepsilon}^* = \hat{\varepsilon}_u^* + \hat{\varepsilon}_\sigma^*$, где $\hat{\varepsilon}^* \in H$, $\hat{\varepsilon}_u^* \in H_u$, $\hat{\varepsilon}_\sigma^* \in H_\sigma$. В работе [3] доказаны существование и единственность этого разложения.

Также можно доказать, что подпространства H_u и H_σ взаимно ортогональны в смысле скалярного произведения (10).

Представленная теорема, в частности, открывает возможность независимого управления напряжениями и полными деформациями системы, соответственно, при помощи собственных деформаций, свободных от полных деформаций, и собственных деформаций, свободных от напряжений:

$$\hat{\varepsilon}_\sigma^0 = -\hat{C}^{-1} \cdot \hat{\sigma}^0, \quad \hat{\varepsilon}_u^0 = \hat{\varepsilon}^0, \quad (14)$$

где $\hat{\sigma}^0$ — требуемое поле напряжений, удовлетворяющее уравнению равновесия (13), $\hat{\varepsilon}^0$ — требуемое поле совместных деформаций.

7. Базисные элементы подпространства совместных собственных деформаций в дискретизированных системах

Для того чтобы выделить из собственной деформации часть, свободную от напряжений, и тем самым приблизиться к решению задачи независимого управления полными деформациями (см. вторую формулу (14)), необходимо знать базис подпространства совместных собственных деформаций H_u , так как любой элемент $\hat{\varepsilon}_u^* \in H_u$ можно представить в виде разложения по этому базису:

$$\hat{\varepsilon}_u^* = \sum_{j=1}^n c_j \hat{\pi}_j, \quad (15)$$

где $\hat{\pi}_j$ — базисные элементы подпространства H_u , c_j — коэффициенты разложения, $n = \dim H_u$ — размерность H_u .

Построение базиса собственных деформаций, свободных от напряжений, следует проводить, руководствуясь методикой, описанной в работе [11], согласно которой деформации дискретизированной системы, вычисляемые при поочерёдном единичном

смещении незакреплённых узлов в направлениях координатных осей, образуют базис подпространства H_u .

Восстановить поле деформаций по перемещениям узлов позволяет так называемая матрица градиентов системы конечных элементов $[B]$ [12]:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u\}. \tag{16}$$

Подстановка перемещений $\{u\}_i$ (вектор-столбца перемещений с единственным ненулевым элементом $u_i = 1$, соответствующим единичному смещению незакреплённого узла; здесь и далее $i = 1 \dots \dim H_u$) в (16) определяет базисные элементы $\{\pi\}_i$: $\{\pi\}_i = [B]\{u\}_i$, или с учётом того, что вектор $\{u\}_i$ содержит только одну ненулевую компоненту $u_i = 1$, базисные элементы

$$\{\pi\}_i = [B]\{u\}_i = [B]_i, \tag{17}$$

где $[B]_i$ — соответствующий столбец матрицы $[B]$. Поочерёдное единичное смещение незакреплённых узлов системы вдоль координатных осей с подстановкой в каждом случае соответствующих векторов $\{u\}_i$ в это соотношение определяет весь набор базисных элементов $\{\pi\}_i$ в подпространстве собственных деформаций, свободных от напряжений.

Соотношение (17) показывает, что для нахождения базисных элементов подпространства H_u необходимо знать матрицу $[B]$ дискретизированной системы, компоновка которой, вообще говоря, зависит от вида конечного элемента. Например, в случае малых деформаций стержня, который находится в плоскости и работает на растяжение–сжатие (Рис. 1), матрица $[B]$ является одномерным массивом, содержащим направляющие косинусы этого стержня относительно осей координат: $[B] = (1/l_b)\{\cos \alpha \quad \cos \beta \quad -\cos \alpha \quad -\cos \beta\}^T$, где l_b — длина стержня; α и β — углы между вектором e стержня и положительными направлениями осей координат.

Формирование матрицы $[B]$ всей стержневой системы происходит по аналогии с формированием глобальной матрицы жёсткости конечно-элементной сетки. При этом для каждого конечного элемента вводится вектор $\{N\}$, содержащий глобальные номера узловых перемещений, принадлежащих этому элементу. В случае плоской системы каждый такой вектор имеет четыре коэффициента.

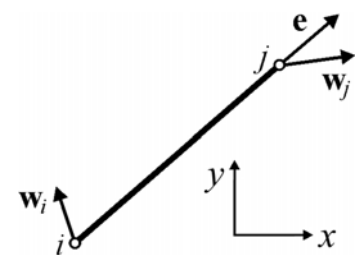


Рис. 1. Стержневой элемент

8. Задача независимого управления полными деформациями

В реально существующих телах желаемые поля собственных деформаций зачастую не могут быть созданы произвольно. Например, в результате температурного расширения в изотропном теле образуются только шаровые деформации; пьезоэлектрические деформации всегда направлены вдоль осей кристаллографической решётки [13]. В данной работе предполагаем, что собственную деформацию можно записать в виде:

$$\hat{\varepsilon}^*(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^K a_k \hat{\xi}_k, \tag{18}$$

где $\mathbf{a} = \{a_1 \ a_2 \ \dots \ a_K\}^T$. К примеру, для температурных деформаций $a_1 = \Delta T$, $\hat{\xi}_1 = \hat{\alpha}$, $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$.

При управлении полными деформациями условием отсутствия напряжений в рассматриваемой системе является принадлежность собственной деформации (18) подпространству H_u . Другими словами, коэффициенты a_k ($k = 1 \dots K$) должны быть такими, чтобы:

$$\hat{\varepsilon}^*(\mathbf{a}) \in H_u. \quad (19)$$

Целевой функцией задачи управления является функционал, характеризующий отклонение $\hat{\varepsilon}^*(\mathbf{a})$ от $\hat{\varepsilon}^0$:

$$\Phi(\mathbf{a}) = \|\hat{\varepsilon}^0 - \hat{\varepsilon}^*(\mathbf{a})\|_{H_u} \rightarrow \inf(\mathbf{a}), \quad (20)$$

где $\hat{\varepsilon}^0 \in H_u$ — требуемые собственные деформации, свободные от напряжений, а норма вычисляется согласно (11). Таким образом, задача независимого управления полными деформациями сводится к поиску минимума функционала Φ при ограничениях (18) и (19).

Далее рассмотрим алгоритм построения функционала Φ .

Условие независимого управления полными деформациями (19), с использованием выражений (15) и (18), имеет вид:

$$\sum_{k=1}^K a_k \hat{\xi}_k = \sum_{j=1}^n c_j \hat{\pi}_j, \quad (21)$$

то есть тензор собственной деформации $\hat{\varepsilon}^*$ разлагаем по базису $\hat{\pi}_j$ в подпространстве H_u .

Далее определим коэффициенты разложения c_j в (21). Для этого скалярно умножим левую и правую части соотношения (21) на некоторый базисный элемент $\hat{\pi}_i$.

Получим $\sum_{k=1}^K a_k (\hat{\xi}_k, \hat{\pi}_i)_H = \sum_{j=1}^n c_j (\hat{\pi}_j, \hat{\pi}_i)_H$. При $i = 1 \dots \dim H_u$ последнее соотношение

можно переписать в матричной форме: $[\pi \xi] \{a\} = [\pi \pi] \{c\}$. Отсюда следует $\{c\} = [\pi \pi]^{-1} [\pi \xi] \{a\}$, где $[\pi \pi]_{ij} = (\hat{\pi}_i, \hat{\pi}_j)_H$, $[\pi \xi]_{ik} = (\hat{\pi}_i, \hat{\xi}_k)_H$, $i, j = 1 \dots n$; $k = 1 \dots K$,

$n = \dim H_u$. Скалярное умножение последнего уравнения на элементы $\hat{\xi}_l$ ($l = 1 \dots K$) с последующей подстановкой коэффициентов c_j ($i = 1 \dots \dim H_u$) приводит к системе уравнений относительно параметров a_k ($k = 1 \dots K$):

$$[\Omega] \{a\} = 0, \quad (22)$$

где $[\Omega] = [\xi \xi] - [\pi \xi]^T [\pi \pi]^{-1} [\pi \xi]$, $[\xi \xi]_{lk} = (\hat{\xi}_l, \hat{\xi}_k)_H$ ($l, k = 1 \dots K$), $n = \dim H_u$.

Если определитель матрицы $[\Omega]$ не равен нулю, то система уравнений (22) имеет только тривиальное решение. Физически условие $\det[\Omega] \neq 0$ означает, что в системе нет возможности проводить независимое управление полными деформациями. Если матрица $[\Omega]$ оказывается нулевой, то это значит, что условие (19) выполняется для любых a_k ($k = 1 \dots K$).

Независимое управление возможно только тогда, когда $\det[\Omega] = 0$. При этом множество линейно независимых вектор-столбцов $\{\omega\}$, удовлетворяющих системе (22), образует так называемое нуль-пространство (ядро) [14] матрицы $[\Omega]$:

$[\omega] = \begin{bmatrix} \{\omega\}_1 \\ \{\omega\}_2 \\ \dots \\ \{\omega\}_S \end{bmatrix}_{K \times S}$, тогда параметры a_k ($k = 1, \dots, K$) собственной деформации определяются формулой:

$$\{a\} = X_1 \{\omega\}_1 + X_2 \{\omega\}_2 + \dots + X_S \{\omega\}_S. \quad (23)$$

Алгоритм поиска $\{\omega\}_i$ ($i = 1 \dots S$) запрограммирован авторами в пакете MATLAB.

Соотношение (18) с учётом (23) принимает вид $\tilde{\varepsilon}^* = \sum_{m=1}^S X_m \sum_{k=1}^K \omega_{km} \tilde{\xi}_k$, а задача (20)

представляется следующим образом:

$$\Phi \rightarrow \inf (X_m), \quad (24)$$

где X_m — искомые параметры управления.

9. Пример решения задачи независимого управления полными деформациями

Изложенный алгоритм применим к различным дискретизированным системам. Для демонстрации его работы обратимся к простому примеру, где проводится независимое управление полными деформациями в стержнях фермы.

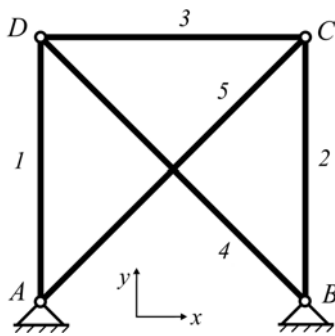


Рис. 2. Стержневая система

Рассмотрим ферму, состоящую из пяти стержней с одинаковой площадью поперечного сечения, модулем упругости E и коэффициентом температурного расширения α . Длины боковых и верхнего стержней (с номерами 1, 2 и 3) равны L , причём $AD \perp DC$, $CB \perp DC$ (Рис. 2).

Допустим, что представленная система может быть подвергнута однородному нагреву, соответствующему собственной деформации $\hat{\varepsilon}_T^*$. Вектор-столбец собственных деформации стержней фермы при таком нагреве будет иметь вид:

$\hat{\varepsilon}_T^* = \alpha \Delta T \{1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1\}^T$, где ΔT — изменение температуры, отсчитываемое от некоторого состояния, в котором $\hat{\sigma} = 0$ и $\hat{\varepsilon} = 0$.

Тогда величины, входящие в соотношение (18) для собственной (температурной) деформации $\hat{\varepsilon}_T^*$, представляются в виде: $a_1 = \Delta T$, $\hat{\xi}_1 = \alpha \{1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1\}^T$. Предположим также, что существует другое внешнее воздействие, приводящее к возникновению одинаковых собственных деформаций $\hat{\varepsilon}_p^*$ в диагональных (4-м и 5-м) стержнях фермы: $\hat{\varepsilon}_p^* = a_2 \hat{\xi}_2 = a_2 \{0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1\}^T$. Таким образом, для приближения к требуемому напряжённому деформируемому состоянию в системе имеется два независимых параметра управления — a_1 и a_2 , определяющие собственные деформации $\hat{\varepsilon}_T^*$ и $\hat{\varepsilon}_p^*$, соответственно.

Пусть при отсутствующих напряжениях в стержневой системе требуется создать следующее распределение совместных деформаций:

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_0 \{1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1\}^T. \quad (25)$$

Для этого запишем требуемые собственные деформации $\hat{\varepsilon}^0$, свободные от напряжений:

$$\hat{\varepsilon}^0 = \hat{\varepsilon} = \varepsilon_0 \{1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1\}^T. \quad (26)$$

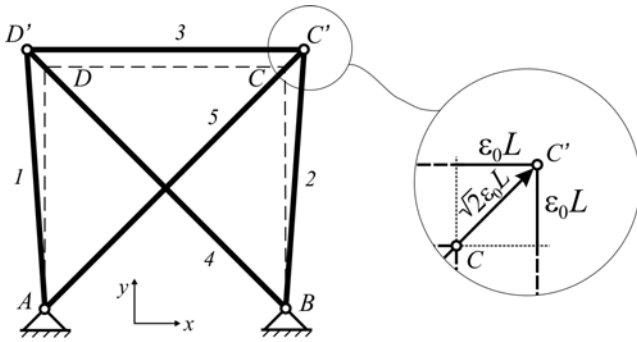


Рис. 3. Конфигурация, соответствующая требуемому полю деформация фермы

Считая деформации малыми, изобразим деформированную согласно (25) стержневую ферму (см. Рис. 3). Отметим, что поле деформаций (25) является совместным, так как оно соответствует узловым перемещениям.

Все вычисления, реализующие методику независимого управления полными деформациями, производятся в среде программирования MATLAB.

Для достижения поля деформаций (26) используется базис

подпространства H_u . Определение базисных элементов этого подпространства проводится путём построения матрицы $[B]$ рассматриваемой конструкции. Эта матрица первоначально, при $\{u\} = \{u_{Ax} \ u_{Ay} \ u_{Bx} \ u_{By} \ u_{Cx} \ u_{Cy} \ u_{Dx} \ u_{Dy}\}^T$, будет иметь

следующую форму:
$$[B] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
. С учётом

граничных условий (узлы A и B закреплены, см. Рис. 3) первые четыре компоненты вектор-столбца $\{u\}$ будут нулевыми.

Поочерёдное перемещение свободных узлов системы параллельно координатным осям с последующим анализом матрицы $[B]$ позволяет сформировать систему базисных элементов H_u . Сообщим одному из незакреплённых узлов, к примеру, узлу D , малое единичное перемещение вдоль оси x ($u_{Dx} = 1$). Используя соотношение (16), получим первый базисный элемент $\hat{\pi}_1$ (по сути это — седьмой столбец матрицы $[B]$): $\hat{\pi}_1 = 1/L \{0 \ 0 \ -1 \ -1/2 \ 0\}^T$. Перемещения остальных незакреплённых узлов (u_{Dy} , u_{Cx} , u_{Cy}) позволяют определить последующие элементы: $\hat{\pi}_2 = 1/L \{1 \ 0 \ 0 \ 1/2 \ 0\}^T$, $\hat{\pi}_3 = 1/L \{0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1/2\}^T$, $\hat{\pi}_4 = 1/L \{0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1/2\}^T$.

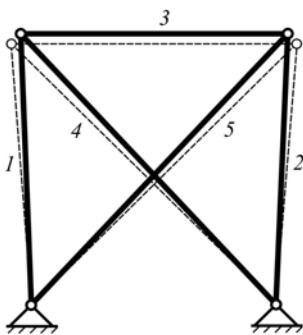


Рис. 4. Требуемое (пунктирные линии) и оптимальное (сплошные линии) распределения деформаций стержневой системы

Предварительно скомпоновав матрицы, входящие в соотношение (22), выразим матрицу $[\Omega]$, определитель которой оказывается равным нулю. Тогда, используя задачу нахождения минимума функционала (24), а также соотношения (23) и (18), определим:

$$X = 1,37 \varepsilon_0, \quad \{a\}^{opt} = \varepsilon_0 \{4/3 \ -1/3\}^T, \tag{27}$$

$$\hat{\varepsilon}^{*opt} = \varepsilon_0 \{4/3 \ 4/3 \ 4/3 \ 1 \ 1\}^T.$$

Поскольку поиск оптимальных собственных деформаций производится в подпространстве H_u (см. формулу (20)), то наложение поля $\hat{\varepsilon}^{*opt}$, согласно

теореме о декомпозиции, не вызовет напряжений в элементах фермы. Конфигурация фермы, соответствующая собственным деформациям (27), представлена на рисунке 4.

Путём непосредственного решения задачи деформирования фермы с собственными деформациями (27) можно показать, что $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}^{*opt}$, $\hat{\sigma} = 0$.

10. Заключение

На основе теоремы о декомпозиции собственной деформации разработан новый метод моделирования и управления полными деформациями посредством собственных деформаций.

Предложена методика построения базисных элементов в дискретизированных системах для энергетических пространств, свободных от напряжений. Рассмотрен алгоритм достижения требуемого деформированного состояния, позволяющий сохранить в системе действующее поле механических напряжений.

Решена задача независимого управления полными деформациями стержневой системы, демонстрирующая описанный алгоритм.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-01-00910-а).

Литература

1. *Reissner H.* Eigenspannungen und Eigenspannungsquellen // ZAMM. – 1931. – V. 11, N. 1. – P. 1-8.
2. *Mura T.* Micromechanics of defects in solids, 2nd ed. – Dordrecht: Kluwer, 1991. – 601 p.
3. *Nyashin Y., Lokhov V., Ziegler F.* Decomposition method in linear elastic problems with eigenstrain // ZAMM. – 2005. – V. 85, N. 8. – P. 557-570.
4. *Irschik H., Ziegler F.* Eigenstrain without stress and static shape control of structures // AIAA J. – 2001. – V. 39, N. 10. – P. 1985-1999.
5. *Zaremba S.* Sur le principe de minimum // Bull. Intern. l'Acad. d. Sciences de Cracovie. Cl. des sciences math. et natur. – 1909. – N. 7. – P. 197-264.
6. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.
7. *Rafalski P.* Orthogonal projection method. II. Thermoelastic problem // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Tech. – 1969. – V. 17, N. 2. – P. 69-74.
8. *Соколов А.Г., Стружанов В.В.* Об одной задаче оптимизации напряженного состояния в упругом теле // Прикл. мат. и механика. – 2001. – Т. 65, № 2. – С. 317-323.
9. *Nyashin Y., Kiryukhin V.* Biological stresses in living tissues. The modeling and control problems // Russian Journal of Biomechanics. – 2002. – V. 6, N. 3. – P. 13-31.
10. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. – М.: Физматлит, 2002. – 488 с.
11. *Туктамышев В.С., Лохов В.А.* Метод независимого управления механическими напряжениями в деформируемых системах // Мех. композ. матер. и констр. – 2008. – Т. 14, № 2. – С. 269-281.
12. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике // Под ред. Б.Е. Победри. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
13. *Мэзон У.* Пьезоэлектрические кристаллы и их применения в ультразвуке // Под ред. А.В. Шубникова. – М.: Изд. иностр. литер, 1952. – 450 с.
14. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 318 с.

Поступила в редакцию 24.05.11

Сведения об авторах

Туктамышев Вадим Саитзянович, ст.преп., Пермский национальный исследовательский политехнический университет (ПНИПУ), 614990, Пермь, Комсомольский проспект, 29; E-mail: helpinvader@list.ru

Лохов Валерий Александрович, кфмн, доц., ПНИПУ; E-mail: lva@pstu.ru

Няшин Юрий Иванович, дтн, проф., зав.каф., ПНИПУ; E-mail: nyashin@inbox.ru