

УДК 534.21

## НИЗКОДИССИПАТИВНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В РАЗНОСТНЫХ МЕТОДАХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

А.М. Сипатов<sup>1,2</sup>, Л.Ю. Гомзиков<sup>1,2</sup>, М.В. Усанин<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>ОАО «Авиадвигатель», Пермь, Россия

<sup>2</sup>Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

Сопоставлены различные методики фильтрации решения, такие как: явная низкодиссипативная фильтрация (DRP), фильтрация с дополнительным выборочным фильтром низкого порядка для сглаживания скачков (SC), вейвлет-фильтрация, компактная фильтрация с регулируемой пропускной способностью. Показано, что хотя 11-точечная DRP-фильтрация и является одним из самых простых и быстрых методов, тем не менее, имеет более выраженные диссипативные свойства по сравнению с вейвлет-фильтрацией на основе 6-коэффициентной функции Добешии и с 5-точечной трехдиагональной компактной схемой фильтрации. Для представленных задач наименее диссипативными получились вейвлет-фильтры. А среди фильтров, дающих наименьший уровень паразитных пульсаций решения в области скачка, помимо фильтров низкого порядка и схем высокого порядка с использованием SC-фильтров, выделен компактный фильтр с регулируемой пропускной способностью.

*Ключевые слова:* схемы высокого порядка точности, вейвлет-фильтрация, компактная фильтрация, обработка скачков

## LOW DISSIPATIVE FILTRATION FOR DIFFERENCE METHODS OF COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS

A.M. Sipatov<sup>1,2</sup>, L.Yu. Gomzikov<sup>1,2</sup> and M.V. Usanin<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>OJSC "Aviadvigatel", Perm, Russia

<sup>2</sup>Perm State National Research Polytechnical University, Perm, Russia

Comparison of different filtering methods (explicit Dispersion-Relation-Preserving (DRP) filtering, Shock-Capturing (SC) filtering, wavelet filtration, compact filter with adjustable bandwidth) is presented. It is shown that though 11-points DRP filtering is one of the simplest and fastest methods, its dissipative properties are more pronounced than the properties of Daubechies 6-coefficient wavelet filter and tridiagonal compact 5-point filtering scheme. For the problem under consideration, wavelet-filters appear to be least dissipative. Among the filters producing the lowest level of spurious oscillations in the solution in the neighborhood of shock and apart from the low order filters and high order shock-capturing schemes, a compact filter with adjustable bandwidth is found to be effective

*Key words:* high-order schemes, wavelet filtration, compact filtering, shock capturing

### 1. Введение

Современная вычислительная аэроакустика широко использует оптимизированные центрально-разностные схемы DRP (Dispersion Relation Preserving), позволяющие улавливать более широкий диапазон высокочастотных волн по сравнению с неоптимизированными разностными схемами [1]. Собственно, сама оптимизация заключается в минимизации отклонения от единицы групповой скорости

$$v_{гр} = \frac{\partial(k^* \Delta x)}{\partial(k \Delta x)} = \sum_{i=1}^N 2a_i i \cos(ik \Delta x),$$

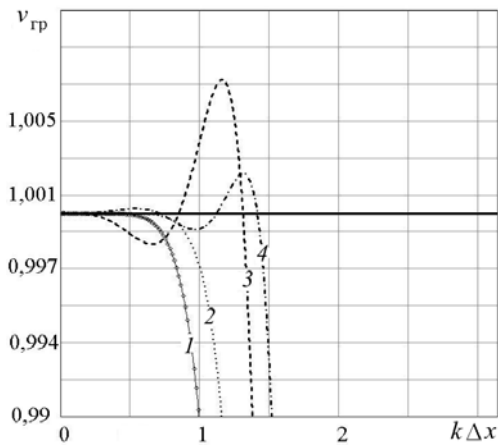
где  $k \Delta x$  — фактическое безразмерное волновое число,  $k^* \Delta x$  — эффективное безразмерное

волновое число, а  $a_i$  являются коэффициентами центрально-разностной схемы

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_l \approx \frac{1}{\Delta x} \sum_{i=-N}^N a_i F(x_l + i\Delta x).$$

Оптимизированные таким образом схемы, хотя и имеют меньший порядок точности аппроксимации (чаще всего 4-й), тем не менее, как видно из рисунка 1, способны описывать эволюции волн более высокой частоты по сравнению со схемами, имеющими тот же шаблон и более высокий порядок точности (в разложении Тейлора).

В таблице 1 приведены коэффициенты некоторых обычных (имеющих шаблон «крест») центрально-разностных схем CD9, CD11 и соответствующих им оптимизированных схем DRP9, DRP11 [2]. Особенностью этих схем является не только их способность описывать волны большей частоты, но и меньшая устойчивость (поскольку для некоторых частот групповая скорость больше 1, то есть волны дополнительно индуцируются), а также большая амплитуда паразитных волн.



**Рис. 1.** Изменение групповой скорости в зависимости от  $k\Delta x$  для различных конечно-разностных схем: CD9 (кривая 1), CD11 (2), DRP9 (3), DRP11 (4)

Таблица 1. Коэффициенты центрально-разностных схем

Коэффициент $a_j$	Разностная схема (порядок точности)			
	CD9 (8)	CD11 (10)	DRP9 (4)	DRP11 (4)
$a_0$	0	0	0	0
$a_1 = -a_{-1}$	4/5	5/6	0,841570125482	0,872756993962
$a_2 = -a_{-2}$	-1/5	-5/21	-0,244678931765	-0,286511173973
$a_3 = -a_{-3}$	4/105	5/84	0,059463584768	0,090320001280
$a_4 = -a_{-4}$	-1/280	-5/504	-0,007650904064	-0,020779405824
$a_5 = -a_{-5}$	-	1/1260	-	0,002484594688

Как следствие, использование схем высокого порядка точности, тем более оптимизированных DRP схем, приводит к необходимости гашения наведённых паразитных волн. Для этого применяется процедура сглаживания (фильтрования) решения, которая, не затрагивая низкочастотные пульсации ( $k\Delta x < \pi/2$ ), полностью подавляет пилообразные паразитные возмущения. К решению  $Q(x)$  употребляются фильтры вида:

$$\bar{Q}(x_0) = Q(x_0) - \sigma_d D_Q(x_0), \quad D_Q(x_0) = \sum_{j=-N}^N d_j Q(x_0 + j\Delta x), \quad (1)$$

где  $\sigma_d$  — сила фильтра, а  $d_j$  — коэффициенты фильтра, стандартные значения которых приведены в таблице 2.

Таблица 2. Коэффициенты стандартных фильтров

Коэффициент $d_j = d_{-j}$	Фильтр (порядок)					
	SF1 (2)	SF2 (4)	SF2 (6)	SF4 (8)	SF5 (10)	SF6 (12)
$d_0$	1/2	3/8	5/16	5/128	63/256	231/1024
$d_1$	-1/4	-1/4	-15/64	-7/32	-105/512	-99/512
$d_2$	-	1/16	3/32	7/64	5/128	495/4096
$d_3$	-	-	-1/64	-1/32	-45/1024	-55/1024
$d_4$	-	-	-	1/256	5/512	33/2048
$d_5$	-	-	-	-	-1/1024	-3/1024
$d_6$	-	-	-	-	-	1/4096

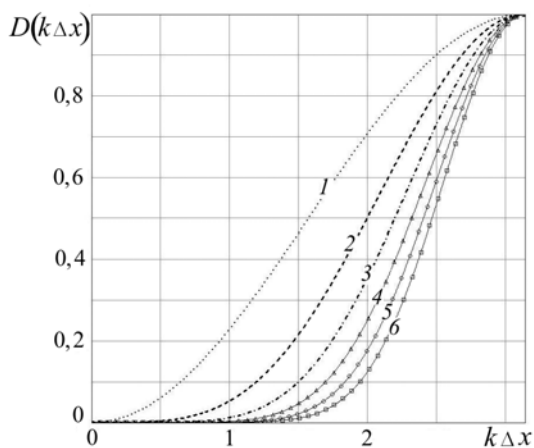
При этом необходимо иметь в виду, что подобные методы сглаживания с низким порядком сводят на нет все преимущества оптимизированных схем, поскольку их демпфирующая функция

$$D_k(k\Delta x) = d_0 + 2 \sum_{j=1}^N d_j \cos(jk\Delta x) \quad (2)$$

отлична от нуля на достаточно большом спектре частот (Рис. 2) и гасит волны, эволюцию которых сама схема еще способна отслеживать. Итак, одно из важнейших требований к фильтру: его диссипативные свойства должны быть достаточными для гашения паразитных волн, порождаемых схемой.

Второе требование к схеме фильтрации обуславливается необходимостью отслеживания эволюции газодинамических скачков. С одной стороны, скачок является точкой, в которой нарушается дифференцируемость исследуемой функции, и, как следствие, использование обычных схем, построенных в предположении непрерывной дифференцируемости в пределах расчетной области, приводит к существенной ошибке решения. С другой стороны, для фильтрации этой ошибки, если все-таки употребляется центрально-разностная схема, необходима оценка ее природы и размерности.

Для проведения оценки скачок представляется в виде бесконечного ряда Фурье. И тогда функцию в его окрестности можно считать непрерывной, но содержащей множество волн паразитных частот. Таким образом, второе требование к фильтру состоит в том, что для хорошего описания скачков, в соответствии с заданной дискретизацией расчетной области, необходимо, чтобы фильтр «размазывал» скачок, как минимум, на размерность схемы. Другими словами, на скачке фильтр должен выполнять функцию искусственной вязкости.



**Рис. 2.** Демпфирующая функция для различных стандартных фильтров: SF1 (кривая 1), SF2 (2), SF3 (3), SF4 (4), SF5 (5), SF6 (6).

В данной работе рассмотрено несколько вариантов схем фильтрации, описанных более подробно в работах [1–3], предложена схема компактной фильтрации с изменяемым весовым коэффициентом и рассмотрено применение вейвлет-фильтрации такого вида, к которому обычно прибегают для сглаживания оцифрованных аудио сигналов. В дополнение проведено их сравнение на ряде тестовых задач.

## 2. Оптимизированные фильтры (DRP)

При построении оптимизированных фильтров в работе [1] использовались условия минимизации интегрального среднеквадратичного отклонения  $D_k(k\Delta x)$  (2) от идеальной демпфирующей кривой  $D_{id}(k\Delta x)$ . В качестве идеальной демпфирующей кривой в пространстве волновых чисел рассматривалась функция Гаусса  $D_{id}(k\Delta x) = e^{-\ln(2)((k\Delta x - \pi)/\sigma)^2}$ , где  $\sigma$  — ее полуширина, которая равнялась  $\sigma = 0,2\pi$  и  $\sigma = 0,3\pi$ . При нахождении коэффициентов фильтра также принимались во внимание условия симметрии ( $d_j = d_{-j}$ ) и условия нормировки  $D(0) = 0, D(\pi) = 1$ . Полученные в работе [1] коэффициенты фильтра для 7-точечных схем (по  $N = 3$  точек с каждой стороны) приведены в таблице 3.

При нахождении коэффициентов фильтра авторы работы [2] минимизировали несколько иной функционал, а именно, интегральную ошибку:

$$\int_{\ln(\pi/16)}^{\ln(\pi/2)} D_k(k\Delta x) d(\ln(k\Delta x)) \longrightarrow \min$$

Таблица 3. Коэффициенты оптимизированных фильтров

$d_j$	Название фильтра и число точек аппроксимационной схемы с каждой стороны				
	SF3O1, $N=3$ ( $\sigma = 0,2\pi$ )	SF3O2, $N=3$ ( $\sigma = 0,3\pi$ )	SF4O, $N=4$	SF5O, $N=5$	SF6O, $N=6$
$d_0$	0,287392842460	0,3276986608	0,24352749312	0,215044884112	0,190899511506
$d_1$	-0,226146951809	-0,235718815	-0,20478888064	-0,187772883589	-0,171503832236
$d_2$	0,106303578770	0,0861506696	0,12000759168	0,123755948787	0,123632891797
$d_3$	-0,023853048191	-0,0142811847	-0,04521111936	-0,059227575576	-0,069975429105
$d_4$	–	–	0,00822866176	0,018721609157	0,029662754736
$d_5$	–	–	–	-0,002999540835	-0,008520738659
$d_6$	–	–	–	–	0,001254597714

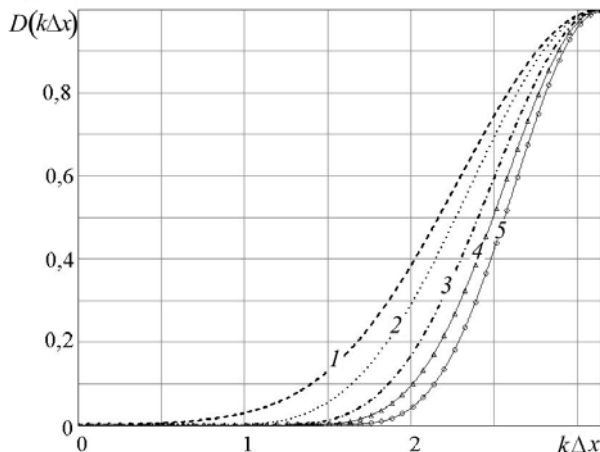


Рис. 3. Демпфирующие функции оптимизированных фильтров: SF3O1 (кривая 1), SF3O2 (2), SF4O (3), SF5O (4), SF6O (5)

Найденные ими коэффициенты для 9-, 11-, 13-точечных схем ( $N=4, 5, 6$ ) представлены в таблице 3. Вид функций  $D_k(k\Delta x)$ , вычисленных для оптимизированных фильтров, показан на рисунке 3.

### 3. SC-фильтры

При использовании описанных выше низкодиссипативных схем для расчета течений со скачками вблизи разрывов появляются нефизичные пульсации, связанные с неустойчивостью Гиббса. Чтобы их подавить в окрестности точек разрыва, в схему необходимо ввести дополнительную вязкость. Для этого осуществляется специальная процедура фильтрации SC (Shock-Capturing Filtering), описанная в [3].

На каждой итерации после фильтра высокого порядка (1), подавляющего высокочастотные пилообразные колебания, к консервативным переменным применяется фильтр низкого порядка (так называемый SC-фильтр) вида:

$$Q_i^{sc} = Q_i - (\sigma_{i+1/2}^{sc} D_{i+1/2}^{sc} - \sigma_{i-1/2}^{sc} D_{i-1/2}^{sc}) \quad (3)$$

где  $\sigma^{sc}$  — сила фильтра, изменяющаяся в пределах  $0 \leq \sigma^{sc} \leq 1$  и зависящая от наличия разрыва в решении вблизи рассматриваемой точки; демпфирующие функции  $D_{i+1/2}^{sc}$  и  $D_{i-1/2}^{sc}$  рассчитываются по консервативным переменным  $Q$  по формулам:

$$D_{i+1/2}^{sc} = \sum_{j=1-N}^N c_j Q_{i+j}, \quad D_{i-1/2}^{sc} = \sum_{j=1-N}^N c_j Q_{i+j-1}.$$

Коэффициенты  $c_j$  находятся из условия, что фильтр (3), при постоянстве  $\sigma^{sc}$ , должен быть эквивалентен фильтру вида (1), то есть  $Q_i^{sc} = Q_i - \sigma_i^{sc} \sum_{j=-N}^N d_j Q_{i+j}$ .

Для исследования свойства SC-фильтров вида (3) нужно представить непостоянную силу фильтра в виде  $\sigma_{i+1/2}^{sc} = \sigma_i^{sc} + \Delta\sigma_i^{sc}$ ,  $\sigma_{i-1/2}^{sc} = \sigma_i^{sc} - \Delta\sigma_i^{sc}$  ( $0 \leq \sigma_i^{sc} \leq 1$ ;  $-0,5 \leq \Delta\sigma_i^{sc} \leq 0,5$ ), тогда выражение (3), с учетом связи между коэффициентами  $c_N = -c_{1-N}$ ,  $c_j - c_{j+1} = c_{-j} - c_{1-j}$ , запишется так:

$$Q_i^{sc} = Q_i - \sigma_i^{sc} \left( -2c_1 Q_i + \sum_{j=1}^{N-1} (c_j - c_{j+1})(Q_{i+j} + Q_{i-j}) + c_N (Q_{i+N} + Q_{i-N}) \right) - \Delta\sigma_i^{sc} \left( \sum_{j=1}^{N-1} (c_j + c_{j+1})(Q_{i+j} - Q_{i-j}) + c_N (Q_{i+N} - Q_{i-N}) \right). \quad (4)$$

В результате применения к (4) пространственного преобразования Фурье получится

$$\tilde{Q}_i^{sc} = \tilde{Q}_i (1 - \sigma_i^{sc} D_{re}(k\Delta x) + i\Delta\sigma_i^{sc} D_{im}(k\Delta x)),$$

где  $D_{re}(k\Delta x)$  — демпфирующая функция эквивалентного фильтра с постоянной силой, а  $D_{im}(k\Delta x)$  — передаточная функция фазовых ошибок, связанных с вариацией силы фильтра  $\Delta\sigma_i^{sc}$ :

$$D_{re}(k\Delta x) = -2c_1 + 2 \sum_{j=1}^{N-1} (c_j - c_{j+1}) \cos(jk\Delta x) + 2c_N \cos(Nk\Delta x),$$

$$D_{im}(k\Delta x) = -2 \sum_{j=1}^{N-1} (c_j + c_{j+1}) \sin(jk\Delta x) - 2c_N \sin(Nk\Delta x).$$

Профили  $D_{re}(k\Delta x)$  соответствуют стандартным фильтрам (см. Рис. 2) и характеризуются уменьшением диссипации при увеличении порядка. По профилям  $D_{im}(k\Delta x)$  видно, что фазовая ошибка в интересующем нас диапазоне волновых чисел  $0 < k\Delta x < 1,2$  для фильтра второго порядка может быть значительной.

В [3] разработан четырехточечный фильтр вида (3), обладающий диссипативными свойствами, близкими к стандартному фильтру второго порядка (SCF1), но имеющий значительно меньшие дисперсионные ошибки. Коэффициенты нового SC-фильтра находятся из условия минимизации следующего функционала:

$$\int_0^{\pi} [D_{re}(k\Delta x) - D_{re}^{SCF1}(k\Delta x)]^2 d(k\Delta x) + \int_0^{2\pi/5} [D_{im}(k\Delta x)]^2 d(k\Delta x) \longrightarrow \min.$$

Коэффициенты полученного фильтра приведены в таблице 4; соответствующие передаточные функции показаны на рисунке 4. В сравнении с фильтром SCF1 оптимизированный фильтр SCF2O (кривая 3) дает меньшие фазовые ошибки для малых волновых чисел, и в то же время намного большую диссипацию, чем фильтр четвертого порядка SCF2. Следует также отметить, что фильтр четвертого порядка имеет диссипацию, недостаточную для полного подавления нефизических пульсаций, возникающих на разрывах.

Сила фильтра должна быть значительной вблизи скачков и пренебрежимо малой в областях без разрывов. Таким образом, необходима некоторая процедура по выделению скачков в расчетной области. В работе [3] предложено осуществлять выделение скачков либо на основе давления, либо на основе дивергенции скорости. Далее рассматривается вариант с давлением.

Таблица 4. Коэффициенты SC-фильтров

Коэффициент ( $c_{1-j} = -c_j$ )	Фильтр		
	SCF1	SCF2	SCF2O
$c_1$	- 1/4	- 3/16	- 0,210383
$c_2$	-	1/16	0,039617

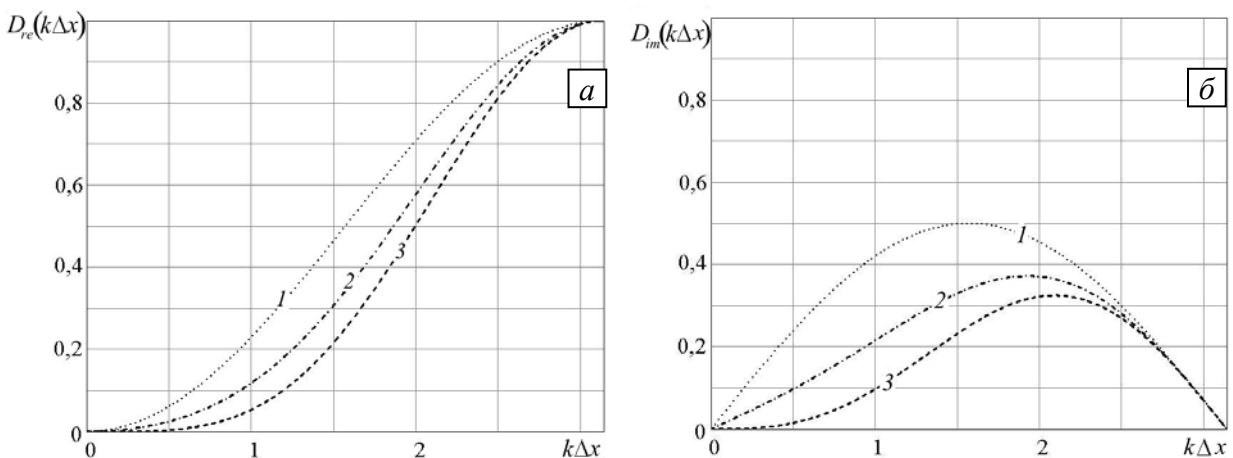


Рис. 4. Характеристики SC-фильтров:  $D_{re}(k\Delta x)$  – демпфирующая функция эквивалентных фильтров с постоянной силой (а),  $D_{im}(k\Delta x)$  – передаточная функция фазовых ошибок, связанных с вариацией силы фильтра (б); SCF1 (кривая 1), SCF2 (2), SCF2O (3)

Сначала к полю давления применяется стандартный фильтр второго порядка  $Dp_i = (-p_{i-1} + 2p_i - p_{i+1})/4$ , позволяющий выделить высокочастотные составляющие и найти амплитуду фильтрованного давления  $Dp_i^{amp} = \left[ (Dp_i - Dp_{i+1})^2 + (Dp_i - Dp_{i-1})^2 \right] / 2$ . В качестве детектора скачков выступает отношение  $r_i = (Dp_i^{amp}) / p_i^2 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon = 10^{-16}$  — малая величина, вводимая для предотвращения деления на нуль в выражении для силы фильтра, определяемой как функция детектора скачков  $r_i$ :

$$\sigma_i^{sc} = (1 - r_{lim}/r_i + |1 - r_{lim}/r_i|) / 2.$$

Для определения силы фильтра в промежутках между узлами проводится простое осреднение:  $\sigma_{i+1/2}^{sc} = (\sigma_i^{sc} + \sigma_{i+1}^{sc}) / 2$ ,  $\sigma_{i-1/2}^{sc} = (\sigma_i^{sc} + \sigma_{i-1}^{sc}) / 2$ .

#### 4. Вейвлет-фильтрация

Помимо описанных выше центрально-разностных фильтров для сглаживания решения можно воспользоваться методами, применяемыми для сглаживания сигналов, а именно, разложением сигнала по ортогональной системе базисных функций:

$$\mathbf{Q} = \sum_k c_k \Phi_k, \quad \overline{\Phi_k \Phi_m} = \delta_{km}.$$

Здесь  $\mathbf{Q}$  — вектор, длина которого равняется размерности сигнала,  $\Phi_k$  — базисные функции. Чаще всего базисом служат масштабируемые функции, например синусы и косинусы от  $k\Delta x$ , как в случае разложения Фурье. Тогда задача сводится к анализу коэффициентов разложения  $c_k$ : обнулению всех множителей при функциях малого (фильтруемого) масштаба. Затем делается обратное преобразование, и сигнал восстанавливается.

С одной стороны, такой подход обеспечивает идеальный вид демпфирующей функции — она равняется нулю для всех пропускаемых частот и скачкообразно принимает значение 1 для всех фильтруемых частот (то есть это — неплавная кривая в отличие от изображенных на рисунках 2 и 3). С другой стороны, в зависимости от вида базисных функций этот метод может оказаться более требовательным к вычислительным ресурсам. Кроме того одним из условий его применимости является периодичность сигнала, что не выполняется для многих задач газовой динамики, поскольку течение происходит за счет градиента давления.

Для разложения произвольного дискретного сигнала  $\mathbf{V}^0$  удобно использовать в качестве базисов ортогональные вейвлеты:

$$\mathbf{V}^0 = \sum_k \mathbf{V}_k^1 \Phi_k + \sum_k \mathbf{W}_k^1 \Psi_k = \sum_k \mathbf{V}_k^2 \Phi_k + \sum_k \mathbf{W}_k^2 \Psi_k + \sum_k \mathbf{W}_k^1 \Psi_k = \dots = \sum_k \mathbf{V}_k^M \Phi_k + \sum_{m=1}^M \sum_k \mathbf{W}_k^m \Psi_k$$

, где  $\Psi_k(x)$  представляют собой масштабированные копии материнского вейвлета  $\Psi(x)$ ,  $\Phi_k$  — скейлинговая функция, отвечающая вейвлету  $\Psi_k$ , а  $M$  — число учитываемых масштабов.

При численных расчетах задач газовой динамики часто прибегают к вейвлетам Добеши, имеющим компактный носитель [4]. Для них все базисные функции полностью определяются конечным набором из  $2P$  коэффициентов  $h_n$  (Табл. 5) и  $g_n$ , связанных соотношением  $g_n = (-1)^{n+1} h_{P-n}$ ,  $n = 0, \dots, P-1$ :

$$\varphi(x) = \sum_n h_n \varphi(2x - n), \quad \psi(x) = \sum_n g_n \psi(2x - n).$$

В этом случае преобразование сигнала глубиной в один масштаб состоит в получении из исходного вектора  $\mathbf{V}^0$  размерности  $N$  двух векторов —  $\mathbf{V}^1$  и  $\mathbf{W}^1$ , размерности  $N/2$ , причем  $\mathbf{V}^1$  является уменьшенной копией  $\mathbf{V}^0$ , из которой исключены все всплески с периодом  $2\Delta x$ , а  $\mathbf{W}^1$  — вектором распределения всплесков этого периода в  $\mathbf{V}^0$ :

$$\mathbf{V}_i^1 = \sum_{k=0}^{2P-1} \mathbf{V}_{2i+k}^0 h_k, \quad \mathbf{W}_i^1 = \sum_{k=0}^{2P-1} \mathbf{V}_{2i+k}^0 g_k, \quad i = 0, \dots, (N-1)/2.$$

Для выделения всплесков большего масштаба процедура повторяется: из вектора  $\mathbf{V}^1$  получаются векторы  $\mathbf{V}^2$  и  $\mathbf{W}^2$  и так далее. Восстановить сигнал можно обратным преобразованием:

$$\mathbf{V}_{2i+j}^0 = \sum_{k=0}^{2P-1} (\mathbf{V}_{i+j-k}^1 h_k + \mathbf{W}_{i+j-k}^1 g_k). \tag{5}$$

Таблица 5. Коэффициенты дискретных вейвлетов Добеши

название	(db1)	(db3)	(db5)
$h_0$	0,7071067811865475244	0,4829629131445341434	0,3326705529500826160
$h_1$	0,7071067811865475244	0,8365163037378079056	0,8068915093110925765
$h_2$	–	0,2241438680420133810	0,4598775021184915701
$h_3$	–	–0,1294095225512603812	–0,1350110200102545887
$h_4$	–	–	–0,0854412738820266617
$h_5$	–	–	0,0352262918857095366

Первые два условия применимости метода — периодичность сигнала и кратность его размерности двум — легко выполнить построением из исходного решения  $\mathbf{Q}$  вектора  $\widehat{\mathbf{Q}}$  в соответствии с формулой

$$\widehat{\mathbf{Q}}_i = \begin{cases} \mathbf{Q}_i, & i = 0, \dots, (N-1), \\ \mathbf{Q}_{2N-i-1}, & i = N, \dots, (2N-1), \end{cases} \tag{6}$$

а при восстановлении воспользоваться средним значением  $\mathbf{Q}_i = (\widehat{\mathbf{Q}}_i + \widehat{\mathbf{Q}}_{2N-i-1})/2$  и за счет этого также добиться симметрии при преобразовании (сами по себе вейвлеты несимметричны).

Для фильтрации сигнала перед восстановлением к вектору  $\mathbf{W}^1$  применяется процедура пороговой фильтрации — трешолдинга, заключающегося в приравнивании нулю значений  $\mathbf{W}_i^1$ , если они меньше порогового, равного четверти максимального по модулю значения. Такой подход позволяет подавить схемные пульсации, сохранив при этом пульсации высокочастотные, которые для скачка являются физическими. Трешолдинг можно упростить, если вообще не строить вектор  $\mathbf{W}^1$ , а удалять из решения высокочастотные пульсации, в том числе и вблизи скачка, за счет этого произойдет его сглаживание.

Для уменьшения образующихся вблизи скачка осцилляций Гиббса используется преобразование, инвариантное к сдвигу данных, заключающееся в следующем: из  $\mathbf{V}^0$  получается ряд векторов  $S^m(\mathbf{V}^0)$ , где  $S^m$  — оператор сдвига значений в точках вектора  $\mathbf{V}^0$  на  $m$ ; затем для каждого из векторов строится только вектор  $\mathbf{V}^1$  (вследствие редуцирования трешолдинга до простого удаления пульсаций); после этого делается



упрощенное обратное преобразование (5), в котором не участвуют векторы  $\mathbf{W}^1$  и коэффициенты  $g_k$ , и производится обратный сдвиг  $S^{-m}$ . Решение находится в результате осреднения всех полученных векторов.

Такая процедура фильтрации, например, на основе вейвлета Добеши с размерностью базиса  $P=3$  (то есть разложение строится по 6 или 11 (с учетом (6) точкам), является менее диссипативной, чем при использовании 11-точечного DRP-фильтра при равном количестве вычислительных операций, отсутствии сдвига и простом сглаживании решения. Применение инвариантного сдвигу преобразования для уменьшения осцилляции на скачках приводит для этого же вейвлета к 8-кратному увеличению количества вычислительных операций.

## 5. Компактный фильтр с регулируемой пропускной способностью

Нефизичные высокочастотные пульсации, присущие центрально-разностной схеме, в конце каждого шага по времени подавляются посредством применения к рассчитанным газодинамическим полям фильтра вида:

$$\beta \bar{Q}(x_0 - \Delta x) + \bar{Q}(x_0) + \beta \bar{Q}(x_0 + \Delta x) = \sum_{j=0}^N b_j Q(x_0 + j\Delta x). \quad (7)$$

Коэффициенты фильтра рассчитываются методом, изложенным в [6]: разложением в ряд Тейлора и выполнением требования равенства нулю коэффициентов при производных до порядка, описываемого схемой. В результате получается  $N$  уравнений с  $N+2$  неизвестными. Одно дополнительное уравнение берется из условия подавления высоких частот, то есть из условия равенства нулю спектральной функции уравнения (7)

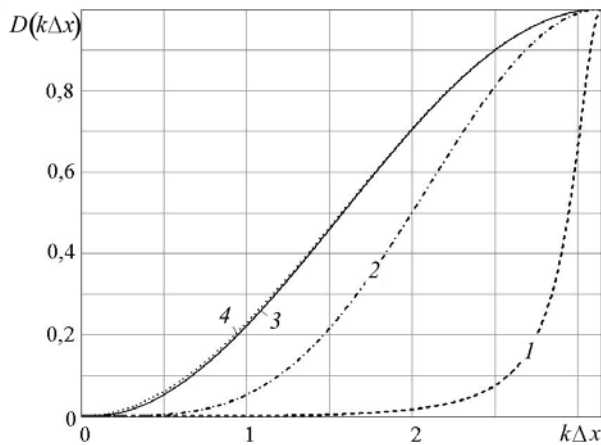
$$SF(k\Delta x) = \left( 2 \sum_{j=0}^N b_j \cos(jk\Delta x) \right) / (1 + 2\beta k\Delta x \cos(k\Delta x)) \text{ при } k\Delta x = \pi: SF(\pi) = \sum_{j=0}^N (-1)^j b_j = 0.$$

Таким образом, неопределенным остается только одно уравнение. Выбирая значение  $\beta$  из интервала от  $(-0,5)$  до  $(0,5)$  (исходя из условия неразрывности  $SF(k\Delta x)$  при  $0 \leq k\Delta x \leq \pi$ ), можно вычислить коэффициенты фильтра (Табл. 6). Примечательно, что при  $\beta = 0$  получаются обычные коэффициенты явных фильтров.

Таблица 6. Коэффициенты компактных фильтров в зависимости от свободного параметра

Коэффициент $b_j$	Компактный фильтр (порядок точности)		
	CF1 (4)	CF2 (6)	CF3 (8)
$a_0$	$(1+2\beta)/4$	$(5+6\beta)/16$	$(11+10\beta)/32$
$a_1$	$(1+2\beta)/4$	$(1+2\beta)/4$	$(15+34\beta)/64$
$a_2$	–	$(-1+2\beta)/16$	$(-3+6\beta)/32$
$a_3$	–	–	$(1-2\beta)/64$

На рисунке 5 приведены демпфирующие функции фильтра SF2 при различных  $\beta$ . Видно, что при приближении  $\beta$  к  $0,5$  полоса фильтруемых частот сжимается к  $k\Delta x = \pi$ . Это означает, что узкая полоса фильтрации, которая срезает только пилообразные возмущения, получается при использовании любого компактного фильтра, при этом меняется только порядок аппроксимации функции. Причем одной и той же разностной схеме присуща разная степень фильтрации. Это свойство является привлекательным при создании селективных фильтров. В таких фильтрах параметр  $\beta$  может иметь



**Рис. 5.** Демпфирующая функция для фильтра CF2 при различных  $\beta$  : 0,49 (кривая 1), 0 (2),  $-0,49$  (3) и для фильтра SF1 (4)

различные значения в разных точках расчетной области, и для получения решения в скачках не обязательно ступенчато переходить к фильтрам более низкого порядка, как при употреблении явных схем фильтрации, а достаточно понизить значение  $\beta$ .

На этих свойствах и строится компактный фильтр с регулируемой пропускной способностью. За базу берется фильтр CF2, поскольку, как видно из рисунка 5, его демпфирующая функция стремится при  $\beta \rightarrow -0,5$  к демпфирующей функции фильтра низкого порядка вида SF1. Таким образом, этот фильтр при разных  $\beta$  может не только срезать пилообразные высокочастотные возмущения, но и полностью сглаживать решение, работая как фильтр SF1, эквивалентный искусственной вязкости. Такой фильтр эффективен в стационарных задачах. В нестационарных задачах оценка передаточной функции фазовых ошибок неявного фильтра, применяемого в решении после каждого шага, осложняется зависимостью распределения  $\beta$  в точках расчетной области от времени. Как следствие, применение фильтра с динамически подстраиваемой пропускной способностью в виде (7) не рекомендуется из-за возможного значительного влияния на получаемые результаты.

## 6. Тестовые решения

### 6.1. Распространение гауссова импульса

В качестве первого теста представлено распространение безразмерного гауссова импульса  $y = e^{-x^2/S}/2$  различной ширины ( $S=1; 10; 100$ ), описываемое волновым уравнением  $dy/dt = -dy/dx$  на сетке с единичным шагом, и снижение его амплитуды различными фильтрами. Для дискретизации по времени применялась схема Эйлера, а по пространству — схема DRP11, для которой первый импульс  $S=1$  лежит в области паразитных частот и должен гаситься фильтром.

Гашение сигнала и схемных пульсаций осуществлялось оптимизированным явным 11-точечным фильтром SF50, неявным 5-точечным трехдиагональным фильтром CF2 при  $\beta = 0,49$  и вейвлет-фильтром, основанным на функции Добеши db5. Результаты представлены на рисунке 6, из которого видно, что к точному решению (кривая 4) наиболее приближена кривая 1, соответствующая фильтру CF2, на импульсах  $S=10; 100$ . Причем CF2 также в большей степени, чем фильтр SF50 (кривая 2), погасил импульс  $S=1$ . Еще эффективнее с задачей гашения импульса  $S=1$  справился вейвлетный фильтр (кривая 3), хотя он, в отличие от фильтра CF2, частично уменьшил и амплитуду

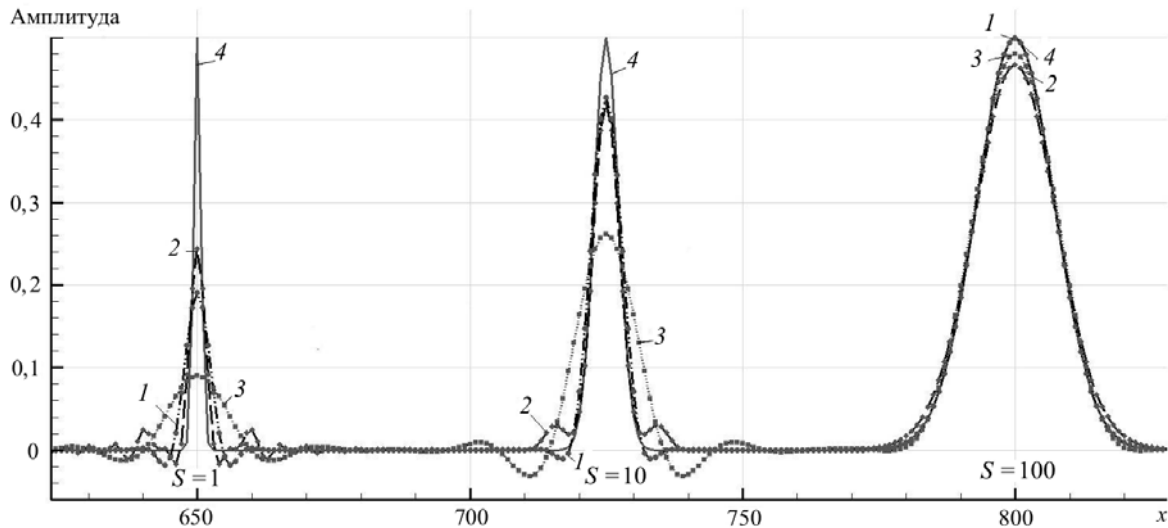


Рис. 6. Распространение и гашение гауссова импульса различной ширины разными фильтрами в сравнении с точным решением (4): CF2  $\beta=0,49$  (кривая 1), SF50 (2), db5 (3)

импульса  $S=100$ . Это объясняется, прежде всего, видом демпфирующей функции: фильтры CF2 и SF50 полностью гасят пульсации с периодом в две ячейки сетки, частично — меньшие частоты и пропускают (с гашением  $<0,05\%$ ) только пульсации длиной около 8 отрезков на период, а вейвлетный фильтр полностью подавляет полосу пульсаций с периодом меньше 4 отрезков и пропускает все пульсации с большим периодом. Поскольку гауссов импульс отличается от синусного сигнала, являясь сложением большого спектра волн (при Фурье-разложении), то его вершина сгладилась вейвлет-фильтром. В то же время оптимизированный явный фильтр SF50 еще сильнее понизил амплитуду «проходящего» по схеме импульса  $S=100$  и при этом в меньшей степени, чем остальные фильтры, справился с гашением импульса  $S=1$ .

## 6.2. Распад разрыва

Следующей тестовой задачей был распад разрыва на основе решения уравнений Эйлера, записанных в виде

$$\partial Q / \partial t + \partial F / \partial x = 0, \quad (21)$$

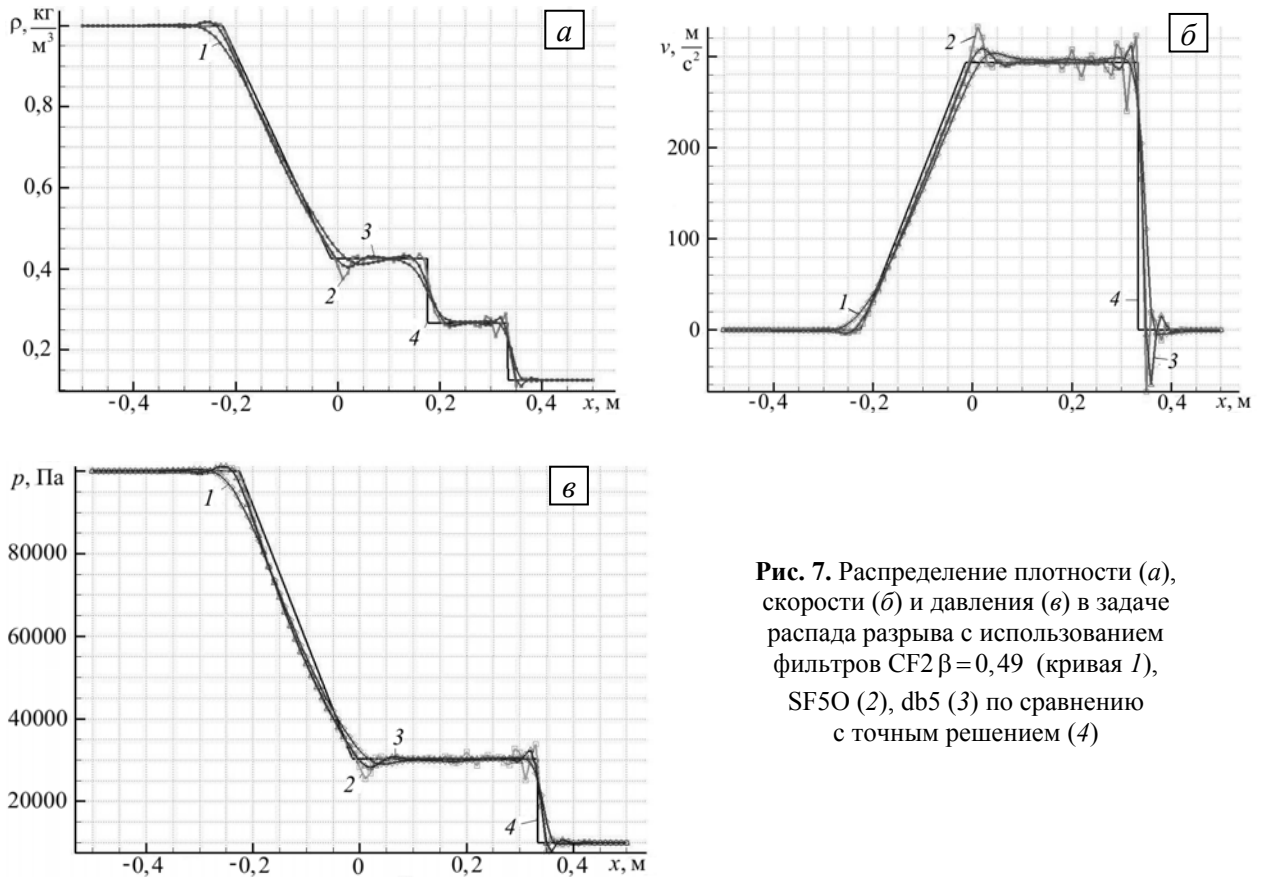
$$\text{где } Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u u + p \\ u(\varepsilon + p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_2 \\ (\gamma - 1)q_3 + (3 - \gamma)q_2^2 / (2q_1) \\ \gamma q_3 q_2 / q_1 - (\gamma - 1)q_2^3 / (2q_1^2) \end{bmatrix},$$

$\varepsilon = p / (\gamma - 1) + \rho u^2 / 2$  — полная энергия единицы объема. Начальные условия представлены в таблице 7.

Таблица 7. Начальные условия для задачи о распаде разрыва

Положение границы	Скорость $u$ , м/с	Давление $p$ , Па	Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>
Слева	0	100000	1,0
Справа	0	10000	0,125

Задача решалась на отрезке  $x = 1,0$ ; применялась пространственная схема DRP11 с шагом сетки 0,01; для аппроксимации по времени — оптимизированная двухслойная схема Рунге-Кутты 4-го порядка. Оценивалось влияние вида фильтра на эволюцию разрыва. Результаты, полученные на 25-й итерации ( $t = 6,68 \cdot 10^{-4}$ ), представлены на рисунке 7.



**Рис. 7.** Распределение плотности (а), скорости (б) и давления (в) в задаче распада разрыва с использованием фильтров CF2  $\beta=0,49$  (кривая 1), SF50 (2), db5 (3) по сравнению с точным решением (4)

Графики показывают, что при сравнимой точности получаемого решения 11-точечный явный фильтр SF50 вновь хуже остальных справился с гашением паразитных пульсаций. Наиболее гладкое решение имеет место в случае компактного фильтра CF2 даже при  $\beta = 0,49$ , но при этом наблюдается значительная потеря его точности. Самые хорошие результаты отвечают вейвлетному фильтру, главным образом потому, что, единожды сгладив скачек, он больше не теряет точности, так как совсем не демпфирует пульсации с периодом больше 4 точек.

### 6.3. Взаимодействие звуковых волн со скачком

Рассматривается течение в сопле, площадь которого меняется по закону

$$S(x) = \begin{cases} 0,536572 - 0,198086e^{-(\ln 2)(x/0,6)^2}, & x > 0, \\ 1,0 - 0,661514e^{-(\ln 2)(x/0,6)^2}, & x < 0, \end{cases} \quad (-10 < x < 10).$$

Решается система уравнений Эйлера вида  $\partial Q / \partial t + \partial F / \partial x = L$ , где

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u u \\ u(\varepsilon + p) \end{bmatrix}. \quad \text{Число Маха на входе равно } M_{\text{inlet}} = 0,2006533, \text{ давление на}$$

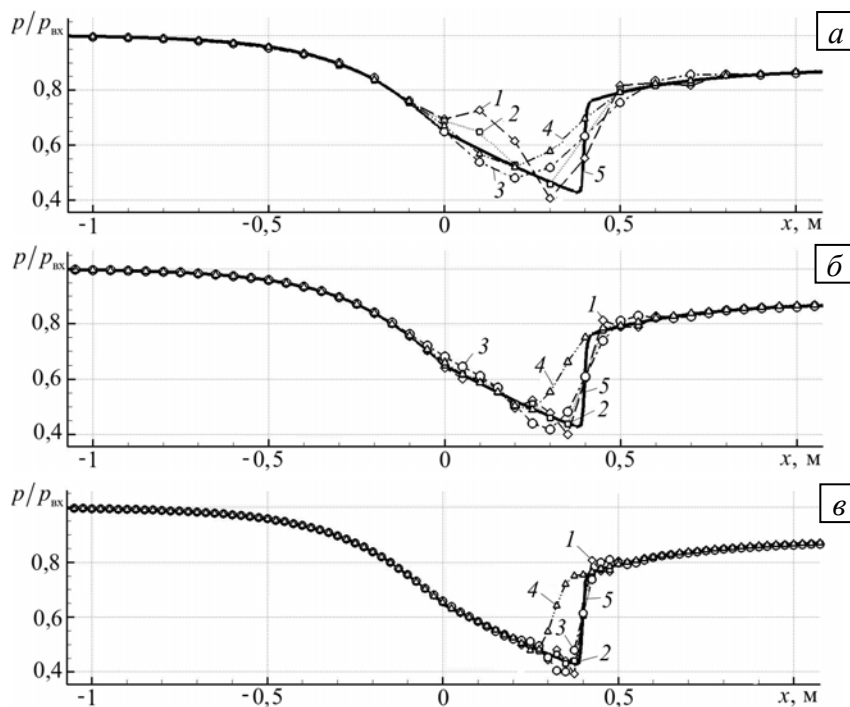
выходе  $p_{\text{exit}} = 0,6071752$ , то есть граничные условия задаются так, что в канале появляется сверхзвуковая зона. После получения стационарного решения на входе

(слева) прикладываются пульсации по закону  $\begin{bmatrix} \rho' \\ u' \\ p' \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos\left(\omega\left(\frac{x}{1+M} - t\right)\right)$ , где

амплитуда  $\varepsilon = 0,00001$ , частота пульсаций  $\omega = 0,6\pi$ .

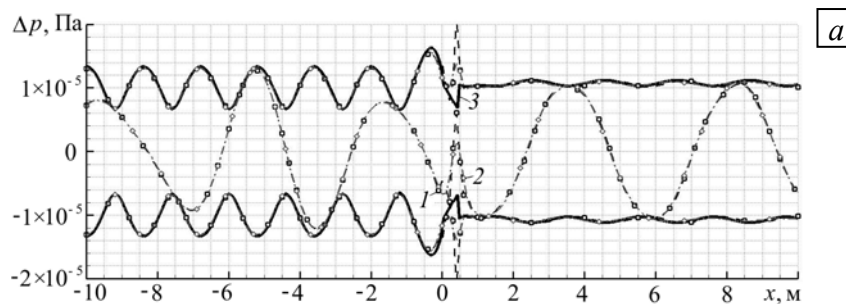
Расчеты проводились на равномерных сетках различной густоты (200, 400, 800

ячеек). Стационарное решение, полученное при использовании различных фильтров, приведено на рисунке 8. Видно, что наибольшие осцилляции наблюдаются в решении с фильтром SF50. Применение этого фильтра с дополнительным SC-фильтром позволяет уменьшить осцилляции, но увеличивает при этом время расчета и диссипативные свойства схемы. Сравнимые с этими результаты получились для случая вейвлет-фильтра, только диссипативные свойства вейвлет-фильтра несколько лучше. Компактный фильтр с динамически подстраиваемыми свойствами показал наименьшие диссипативные свойства и, в то же время, большее сглаживание решения на разрыве.



**Рис. 8.** Распределение давления вдоль сопла на сетках с числом ячеек 200 (а), 400 (б), 800 (в), полученное с применением фильтров SF50 (кривая 1), SF50+SC (2), db5 (3) и динамического CF2 (4) по сравнению с точным решением (5)

Результаты нестационарного решения оценивались по мгновенному распределению отклонения от среднего (стационарного) решения и по форме огибающих кривых (максимальных и минимальных отклонений за период). Полученные распределения представлены на рисунке 9. Вейвлетный фильтр даже без специального SC-фильтра дает решение менее диссипативное и в то же время менее подверженное паразитным осцилляциям, чем явный оптимизированный фильтр с дополнительным SC-фильтром.



**Рис. 9.** Нестационарные пульсации давления вдоль сопла при различном числе ячеек пространственной сетки: 200 (а); 400 (б); 800 (в), полученные с применением фильтров SF50+SC (кривая 1), db5 (2), по сравнению с точным решением (3)

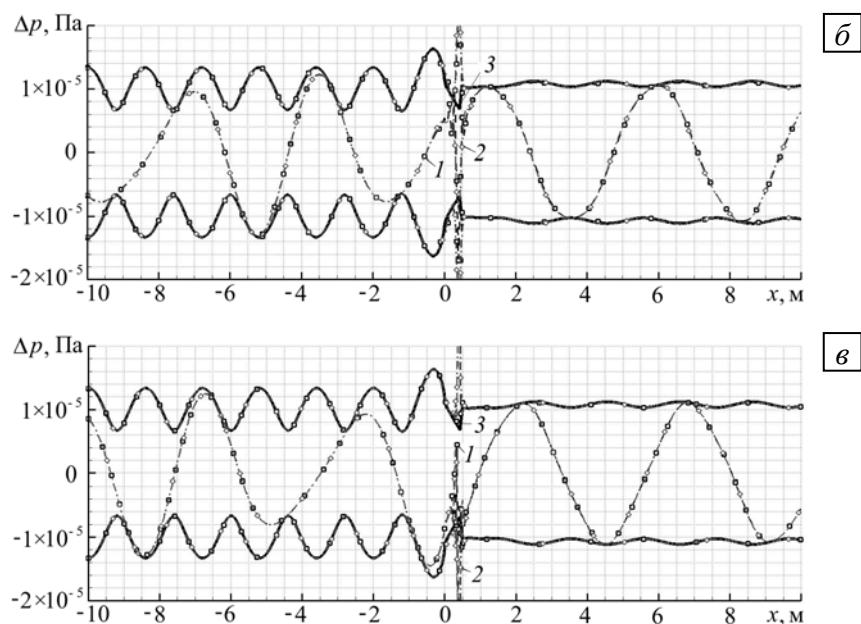


Рис. 9. Продолжение

## 7. Заключение

Анализ результатов показал, что применение фильтров на основе дискретной функции Добеши db5 является наиболее привлекательным для нестационарных расчетов. Эти фильтры, обладающие незначительными диссипативными свойствами, являются, в то же время, достаточно устойчивыми к паразитным осцилляциям. Применение явных центрально-разностных фильтров даже с дополнительным фильтром, сглаживающим скачки, менее эффективно.

Для получения стационарного решения компактные фильтры с динамическим настраиванием диссипативных свойств являются еще более эффективными, чем вейвлет-фильтры, но из-за сложной оценки передаточных свойств такой фильтр в нестационарных расчетах применять не рекомендуется.

## Литература

- 1 Tam C., Webb J. Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational aeroacoustics // J. of Comp. Physics. – 1993. – V. 107. – P. 262-281.
- 2 Bogey C., Baily C. A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for flow and noise computations // J. of Comp. Physics. – 2004. – V. 194. – P. 194-214.
- 3 Wang X.-Y., Chang S.-C., Jorgenson P. Prediction of sound waves propagating through a nozzle without/with a shock wave using the space-time CE/SE Method // NASA/TM—2000-209937, <http://gltrs.grc.nasa.gov/reports/2000/TM-2000-209937.pdf> (дата обращения 01.07.11).
- 4 Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». – 2001. – С. 92-128, 232-288.
- 5 Хардле В., Крекьячарян Ж., Пикар Д., Цыбаков А. Вейвлеты, аппроксимация и статистические приложения // Перевод К.А. Алексеева. – [http://www.nsu.ru/matlab/MatLab\\_RU/wavelet/book6/preface.asp.htm](http://www.nsu.ru/matlab/MatLab_RU/wavelet/book6/preface.asp.htm) (дата обращения 01.07.11)
- 6 Visbal M.R., Gaitonde D.V. Very high-order spatially implicit schemes for computational acoustics on curvilinear meshes // J. of Comp. Acoustics. – 2001. – V. 9, N. 4. – P. 1259-1286.

Поступила в редакцию 13.10.10

### Сведения об авторах

Сипатов Алексей Матвеевич, дтн, нач. отдела, ОАО «Авиадвигатель», Пермь, Комсомольский проспект, 93; E-mail: sipatov@avid.ru

Гомзиков Леонид Юльевич, нач. бригады, ОАО «Авиадвигатель»; E-mail: gomzikov@avid.ru

Усанин Михаил Владимирович, ктн, вед. констр., ОАО «Авиадвигатель»; E-mail: usanin@avid.ru