

УДК 519.6

ИТЕРАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ РЕТРОСПЕКТИВНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

И.А. Цепелев

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия

Исследуется ретроспективная задача, состоящая в восстановлении априори неизвестного начального состояния высоковязкой несжимаемой жидкости по ее известному финальному состоянию. Модель динамики жидкости в приближении Буссинеска описывается уравнениями Стокса, несжимаемости и теплового баланса с соответствующими начальными и граничными условиями. Для решения задачи в обратном направлении времени разработан новый итерационный подход, позволяющий свести неустойчивую исходную задачу к серии устойчивых задач. Построенный на его основе алгоритм реализован на ЭВМ параллельного действия в пакете инженерных вычислений OpenFOAM. Проведен анализ вычислительной эффективности алгоритма.

Ключевые слова: уравнение Стокса, ретроспективная задача, вязкие течения жидкости, метод конечных объемов, некорректная задача, естественная тепловая конвекция, несжимаемая жидкость, пакеты инженерных программ

ITERATIVE ALGORITHM FOR SOLVING THE RETROSPECTIVE PROBLEM OF NATURAL THERMAL CONVECTION OF A VISCOUS FLUID

I.A. Tsepelev

Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Yekaterinburg, Russia

A retrospective problem consisting in the recovery of a priori unknown initial state of a viscous incompressible fluid on the basis of its known final state is investigated. A fluid dynamics model in the Boussinesq approximation is described by Stokes, incompressibility and thermal balance equations under corresponding initial and boundary conditions. To solve the problem in reverse time, a new iterative approach has been developed in which the unstable initial problem is reduced to a series of stable problems. An algorithm, obtained using the proposed approach, is implemented on the parallel computer in OpenFOAM. The results show the computational efficiency of the developed algorithm.

Key words: Stokes equation, retrospective problem, viscous fluid flows, finite volume method, ill-posed problem, natural thermal convection, incompressible flow, engineering software packages

1. Постановка задачи

Рассматривается подход к численному моделированию ретроспективной задачи тепловой конвекции высоковязкой неоднородной несжимаемой теплопроводной жидкости. Подобные задачи возникают при исследовании, например, процессов эволюции соляных структур в коре Земли, тепловой конвекции в мантии, движения континентов под действием тепловых потоков в мантии и ряда других задач геофизики. Совершенствование методов обработки сейсмических и других геологоразведочных данных позволяет изучать все эти процессы более детально. Совместный анализ геофизических данных и результатов численного моделирования приводит к лучшему пониманию природы явлений.

Математическая модель термоконвективных течений высоковязкой ньютоновской неоднородной несжимаемой жидкости в обратном времени в приближении Буссинеска включает в себя краевую задачу для определения поля скоростей [1, 2]:

$$\nabla p = -\nabla \cdot \left[\eta (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \right] + \mathbf{F}(T), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \partial \mathbf{u}_\tau / \partial \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial \Omega, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3)$$

и начально-краевую задачу для определения температуры

$$\partial T / \partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla^2 T + f(t, \mathbf{x}), \quad t \in [0, \vartheta], \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4)$$

$$\sigma_1 T + \sigma_2 \partial T / \partial \mathbf{n} = T_*, \quad t \in [0, \vartheta], \quad \mathbf{x} \in \partial \Omega, \quad (5)$$

$$T(\vartheta, \mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (6)$$

Здесь « ∇ » и « $\nabla \cdot$ » — операции взятия градиента и дивергенции соответственно; ∇^2 — оператор Лапласа; p — давление; η — вязкость; $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор скорости движения жидкости; \mathbf{F} — вектор внешних массовых сил; T — температура; Ω — модельная область изменения пространственных переменных $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$; \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали в точках границы $\partial \Omega$ области Ω ; \mathbf{u}_τ — проекция вектора скорости на касательную плоскость в точках границы $\partial \Omega$; f — плотность внутренних источников тепла; σ_1 и σ_2 — некоторые кусочно-гладкие неотрицательные функции на $\partial \Omega$ ($\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \neq 0$); T_* — заданная на границе температура; $\chi(\cdot)$ — функция, определяющая исходную информацию для решения задачи. Физические параметры жидкости (температура, скорость, давление, вязкость, плотность) считаются переменными, зависящими от времени и пространственных координат. Вязкость и плотность являются функциями температуры. Соотношения (1)–(6) приведены в безразмерном виде. Подробно переход к безразмерным уравнениям рассмотрен в работе [3].

Ретроспективная задача естественной тепловой конвекции заключается в следующем: необходимо найти поле скоростей $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$, давление $p = p(t, \mathbf{x})$ и температуру $T = T(t, \mathbf{x})$, удовлетворяющие в области Ω при $t \in [0, \vartheta]$ задачам (1)–(3) и (4)–(6). Хорошо известно, что сформулированная задача является некорректной и для получения численного решения требует привлечения методов регуляризации [4–6]. В пакетах инженерных программ математические модели подобного рода не представлены в виде программного кода (решателя). Для их реализации в таком качестве необходимо разработать алгоритм численного решения, обладающий свойством устойчивости к малым возмущениям исходных данных и неизбежно возникающей вычислительной погрешности.

2. Алгоритм решения ретроспективной задачи

Назначим момент времени $t = \vartheta$ стартовой точкой начального этапа вычислений. Выберем достаточно малый отрезок времени $[t_l, \vartheta]$, где $t_l > 0$, и зададим разбиение $\{t_k = t_l + \tau k \ (k = 0, \dots, K), \ \tau K = \vartheta - t_l\}$, τ — величина шага по времени, K — число шагов во времени. Символом T^k будем обозначать значение соответствующей сеточной функции T в момент времени $t_k \in [t_l, \vartheta]$. Для момента $t = \vartheta$, решая задачу (1)–(3),

находим распределение поля скоростей $\mathbf{u}(\vartheta, \cdot)$ и полагаем: $\mathbf{u}(t, \cdot) = \mathbf{u}(\vartheta, \cdot)$ при $t \in [t_l, \vartheta]$. Поставим в соответствие задаче (4), (5) ее дискретный аналог, который в операторной форме можно записать в виде двухслойной неявной схемы аппроксимации конвективного (**C**) и диффузионного (**D**) членов. В результате некоторых преобразований получим:

$$T^{k+1} = (\mathbf{E} + \tau\mathbf{C} + \tau\mathbf{D})^{-1} [T^k + \tau f^k], \quad T^0 = T(t_l, \cdot), \quad (7)$$

где **E** — единичный оператор.

Для краевой задачи (4), (5) могут быть использованы различные способы аппроксимации дифференциальных операторов, но такие, чтобы в дискретной задаче сохранялись все физические законы, которые лежат в основе модели. Более подробно эти вопросы рассмотрены в работе [11]. Процесс определения однопараметрического семейства решений, зависящих от параметра T^0 , реализуется в прямом времени. Основное требование к дискретным операторам **C** и **D** заключается в выполнении равенств $\mathbf{C}^* = -\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}^* = \mathbf{D} > 0$. Заметим, что оператор $\mathbf{S} = (\mathbf{E} + \tau\mathbf{C} + \tau\mathbf{D})^{-1}$ удовлетворяет условиям

$$0 < \mathbf{S} \leq \mathbf{E}, \quad (8)$$

следовательно, задача (7) будет однозначно разрешимой и устойчивой при произвольном выборе $\tau > 0$ [10].

Введем оператор $\mathbf{A}\varphi = T(\vartheta, \cdot; \varphi) = \mathbf{S}^K \varphi + \tau \sum_{i=1}^K \mathbf{S}^{i-1} f^{i-1}$, где $T(\vartheta, \cdot; \varphi)$ обозначает распределение температуры в момент времени ϑ , которое получается из начального (подлежащего определению) распределения температуры φ при известном поле скоростей. Отметим, что оператор $\mathbf{A} \neq \mathbf{A}^*$ явно не определяется.

Для решения ретроспективной задачи (4)–(6) построим итерационный процесс, основанный на последовательном уточнении начального состояния исходя из решения задачи $\mathbf{A}\varphi = \chi$. Чтобы решить данное операторное уравнение, воспользуемся неявным двухслойным итерационным методом [12]:

$$\mathbf{B} \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\beta_n} = r^n, \quad r^n(\cdot) \triangleq T(\vartheta, \cdot; \varphi^n) - \chi(\cdot), \quad n = 0, 1, \dots, \quad \varphi^0(\cdot) = 0, \quad (9)$$

При этом полагаем, что $\mathbf{B} = \mathbf{B}^* > 0$ и последовательность параметров $\beta_n > 0$ подчиняется условию $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n < \infty$.

Для нахождения φ^{n+1} необходимо K раз решить задачу (7), затем найти решение системы линейных алгебраических уравнений (9) с положительно определенной самосопряженной матрицей **B**. Если операторы $\mathbf{A} \neq \mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B} \neq \mathbf{B}(t)$, то устойчивость итерационного процесса определяется операторным неравенством [12]:

$$\mathbf{B} - 0,5\beta_n \mathbf{A} \geq \mathbf{E}.$$

Оператор \mathbf{B} оказывает влияние на скорость сходимости итерационного процесса (9). Так, построение его в виде $\mathbf{B} \equiv \mathbf{E} + \mathbf{D}$ обеспечит сходимость итерационного процесса в соответствующем пространстве Соболева $W_2^1(\Omega)$. Другими словами, удастся добиться сходимости не только самих аппроксимаций, но и их первых производных. Отметим, что для устойчивости итерационного процесса в случае сильного влияния погрешностей измерений во входных данных задавать $\mathbf{B} \equiv \mathbf{E}$, вообще говоря, недостаточно, о чем свидетельствуют результаты моделирования соответствующей тестовой задачи в работе [13].

Вычисление параметра β_n в (9) можно осуществить одним из возможных вариационных методов, например, неявным методом скорейшего спуска, суть которого заключается в минимизации нормы $\beta_n = \arg \min \left\{ \|\varphi^{n+1} - T^0\|_{\mathbf{B}}^2 : \beta_n > 0 \right\}$. В этом выражении приняты обозначения: $\|\varphi\|^2 = \langle \varphi, \varphi \rangle$; $\langle y^n, z^n \rangle_{\mathbf{B}} = \langle \mathbf{B}y^n, z^n \rangle$, где символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$. Несмотря на то, что искомое решение T^0 задачи (7), неизвестно, задача определения β_n имеет аналитическое решение [12]: $\beta_n = \langle r^n, \mathbf{B}^{-1}r^n \rangle \langle T(\vartheta, \cdot; \mathbf{B}^{-1}r^n), \mathbf{B}^{-1}r^n \rangle^{-1}$. Заметим, что параметр такого вида не обеспечивает выполнение неравенства

$$J_{n+1} = \left\| \mathbf{B}^{-1} \left(T(\vartheta, \cdot; \varphi^{n+1}) - \chi(\cdot) \right) \right\|_{\mathbf{B}} \leq \left\| \mathbf{B}^{-1} \left(T(\vartheta, \cdot; \varphi^n) - \chi(\cdot) \right) \right\|_{\mathbf{B}}, \quad (10)$$

но сходимость приближений $\|\varphi^n\|_{\mathbf{B}} \rightarrow \|T^0\|_{\mathbf{B}}$ в метрике пространства \mathbf{B} имеет место. Выбор \mathbf{B} в виде $\mathbf{B} \equiv \mathbf{E} + \mathbf{D}$ приводит задачу определения параметра β_n к краевой задаче для уравнения Гельмгольца, которая может быть решена, например, методом сопряженных градиентов. Параметр β_n , задаваемый формулой

$$\beta_n = \left\langle T(\vartheta, \cdot; \mathbf{B}^{-1}r^n), \mathbf{B}^{-1}r^n \right\rangle \left\langle \mathbf{B}^{-1}T(\vartheta, \cdot; \mathbf{B}^{-1}r^n), T(\vartheta, \cdot; \mathbf{B}^{-1}r^n) \right\rangle^{-1}, \quad (11)$$

обеспечивает выполнение неравенства (10), хотя для такого вида параметра придется дополнительно решать соответствующую краевую задачу.

Итак, строим последовательность приближений $\{\varphi^n\}$ и $\|\varphi^n\|_{\mathbf{B}} \rightarrow \|T^0\|_{\mathbf{B}}$. Вычисления прекращаем, когда выполнится равенство $J_N = \varepsilon$. Здесь величина ε согласуется с задаваемой точностью решения задачи (4), (5). Например, можно предложить выбирать ε равным квадрату характерного размера ячейки сетки (предполагаем, что сетка состоит из выпуклых многогранников), покрывающей расчетную область, если аппроксимация дифференциальных операторов в (4) и (5) имеет второй порядок точности. Примем φ^N за аппроксимацию искомой температуры в момент времени $t = t_l$. Данный момент времени определяет стартовую точку следующего этапа вычислений. Все описанные действия будем повторять до тех пор, пока стартовый момент удовлетворяет условию $t_l > 0$.

Опишем кратко пошаговую схему численного решения ретроспективной задачи в целом. Зададим разбиение отрезка времени $\{t_m = \tau_m m, m = 0, \dots, M; \sum \tau_m = \vartheta\}$. Организуем итерационный процесс по $m \in [0, M]$. На каждой такой итерации последовательно выполняем следующие шаги:

- по распределению температуры $T(t_m, \cdot)$, решая задачу (1)–(3), находим распределение поля скоростей $\mathbf{u}(t_m, \cdot)$ и полагаем $\mathbf{u}(t, \cdot) = \mathbf{u}(t_m, \cdot)$, $t \in [t_{m-1}, t_m]$;
- по найденному распределению поля скоростей $\mathbf{u}(t_m, \cdot)$ на отрезке времени $[t_l = t_{m-1}, t_r = t_m]$ определяем значение K , и согласно алгоритму, описанному выше, вычисляем новое распределение температуры $T(t_{m-1}, \cdot)$;
- после завершения итерационного процесса получим распределения температуры $T(t_m, \cdot)$ и поля скоростей $\mathbf{u}(t_m, \cdot)$ в соответствующие моменты времени. Имея эти распределения, при желании с помощью интерполяции на отрезке времени $t \in [0, \vartheta]$ можно более детально восстановить картину процесса в целом.

3. Модельные примеры

Для тестирования приведенного алгоритма была разработана программа в пакете инженерных вычислений OpenFOAM (Open Source Field Operation And Manipulation), в котором реализованы алгоритмы расчетов широкого спектра моделей механики жидкости и газа. Этот пакет представляет собой открытую объектно ориентированную платформу, реализованную на языке программирования C++. Он обладает большой функциональностью, удовлетворяет требованиям, предъявляемым к пакетам прикладных программ, допускает использование мультипроцессорных кластеров. По сути пакет является библиотекой классов языка C++ для операционной системы Linux и современных мультипроцессорных кластеров, включающей процедуры решения дифференциальных уравнений с частными производными в произвольной пространственной области. В пакете реализованы алгоритмы численного решения задачи Стокса, уравнения конвекции–диффузии, учтены различные виды граничных условий и геометрии пространственной области. Полную информацию о возможностях пакета OpenFOAM можно найти, зайдя на ссылки [14], [15].

Исходная задача (1)–(3) дискретизировалась методом конечных объемов. Для определения поля скоростей и давления, отвечающих заданному распределению температуры, применялся SIMPLE алгоритм (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) [16]. Получающиеся системы линейных алгебраических уравнений с положительно определенными и симметричными матрицами решались методом сопряженных градиентов с подходящим предобуславливателем. Температура (7) определялась из соответствующей системы бинаправленным методом сопряженных градиентов [17]. Для аппроксимации оператора Лапласа всюду выбиралась линейная схема Гаусса с коррекцией потока, для аппроксимации конвективного оператора — TVD схема с ограничителем minmod. Данный ограничитель описан в работе [11]

Для наглядности результатов в тестовых расчетах использовалась упрощенная модель, а именно: в области $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ полагалось, что $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 0$, $T_* = 0$, $f(t, \mathbf{x}) = 0$, $\eta(T) = 1$, $\mathbf{F} = 0,01 \nabla T$, $M = K = 10$; функция $\gamma: \Omega \rightarrow [-1, 1]$ моделировала равномерно распределенные случайные величины; $\varepsilon = \delta = 10^{-6}$. В расчетной области строилась сетка из 40000 правильных гексаэдров. Алгоритм решения задачи определялся формулами (9), (11). Восстановлению подлежали гладкая и кусочно-гладкая функции.

Пример 1. Решалась ретроспективная задача восстановления гладкой функции $T_1(\cdot)$ (см. Рис. 1, а) в момент времени $t_0 = 0$. Функция $T(\vartheta, \cdot; T_1)$, где $\vartheta = 0,1$, получалась путем решения задачи (1)–(5); функция $\chi(\cdot) = T(\vartheta, \cdot; T_1) + \delta\gamma(\cdot)$ была исходной информацией. Оператор \mathbf{B} выбирался в виде: $\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}_w = \mathbf{E} + \mathbf{D}$. На рисунке 1, б изображена функция $T_{R1}(\cdot) = |T_1(\cdot) - \varphi^{2000}(\cdot)|$, которая демонстрирует качество проведенных вычислений.

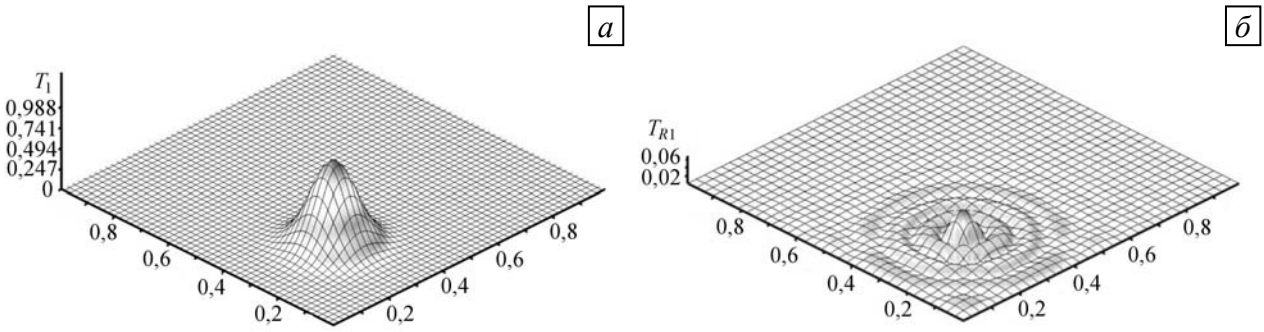


Рис. 1. Восстановление гладкой функции: начальное распределение температуры (а) и функция ошибки ее восстановления (б)

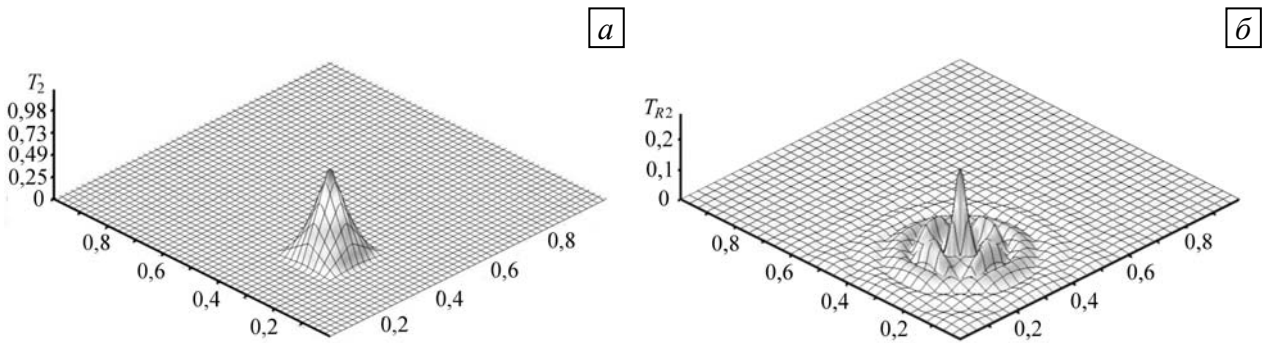


Рис. 2. Восстановление кусочно-гладкой функции: начальное распределение температуры (а) и функция ошибки ее восстановления (б)

Пример 2. Восстанавливалась кусочно-гладкая функция $T_2(\cdot)$ (см. Рис. 2) в момент времени $t_0 = 0$. Функция $T(\vartheta, \cdot; T_2)$, где $\vartheta = 0,1$, находилась из решения задачи (1)–(5); исходная информация задавалась в виде: $\chi(\cdot) = T(\vartheta, \cdot; T_2) + \delta\gamma(\cdot)$. Оператор \mathbf{V} имел тот же вид, что и в Примере 1. Рисунок 2, б содержит функцию $T_{R2}(\cdot) = |T_2(\cdot) - \varphi^{2000}(\cdot)|$ — ошибку восстановления функции $T_2(\cdot)$.

Графики рисунка 3 демонстрируют значения функционалов погрешности вычислений $G_n = 100 \|T_{1(2)}(\cdot) - \varphi^n(\cdot)\|_{L_2(\Omega)}$ и чувствительности к ошибкам во входных данных $H_n = 100 \|T(\vartheta, \cdot; \varphi^n) - \chi(\cdot)\|_{L_2(\Omega)}$ для Примера 1 (штриховая линия) и Примера 2 (сплошная линия) соответственно. Сравнивая примеры, можно сделать заключение о том, что регуляризатор \mathbf{B}_W хорошо выполняет функцию подавления случайных величин, которые моделируют погрешность измерений в решении задачи. Однако он не способен восстанавливать разрывы градиента искомого решения задачи, и связано это с пониженной по сравнению с классом гладкости итерационных приближений гладкостью искомого решения. После выполнения $n = 500$ шагов алгоритм фактически не улучшает аппроксимацию решения, хотя свойство (10) сохраняется. Если в качестве регуляризатора выбрать оператор $\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}_D = \mathbf{D}_{A\chi} \mathbf{D}_\chi^{-1} (\mathbf{E} + \mathbf{D}) > 0$, где \mathbf{D}_y — диагональная матрица, диагональ которой есть вектор y , то для Примера 1 скорость сходимости итерационного процесса увеличится. Соответствующее поведение функционала $G_n = 100 \|T_1(\cdot) - \varphi^n(\cdot)\|_{L_2(\Omega)}$ показано на рисунке 3, а мелким пунктиром.

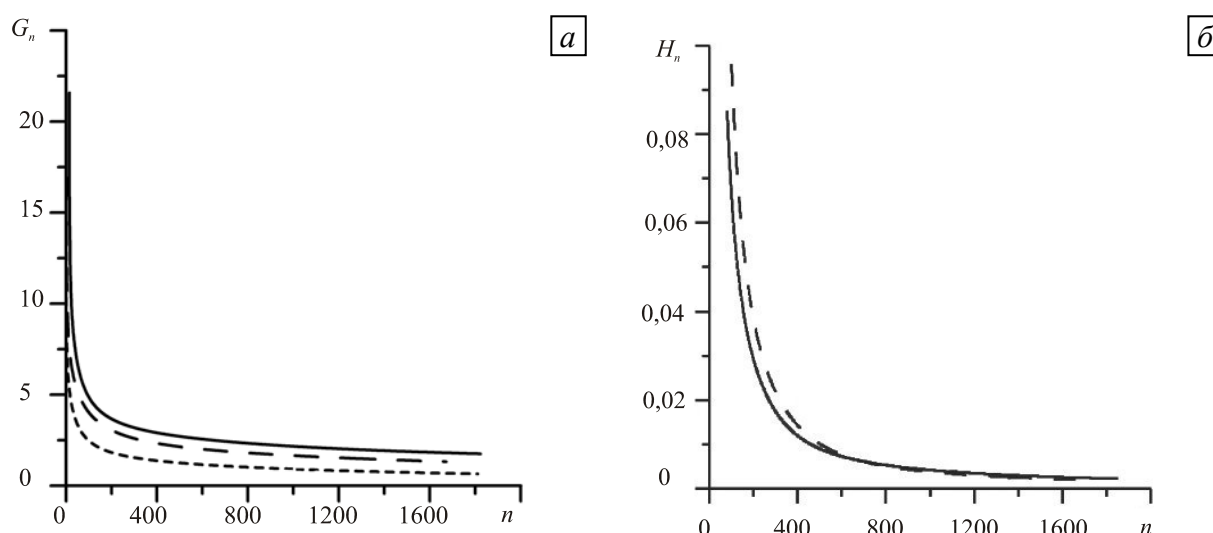


Рис. 3. Среднеквадратичная погрешность (а) и чувствительность (б) вычислительных экспериментов

4. Замечания

Ранее в работах [7], [8] предложен, обоснован и реализован численный метод решения ретроспективной задачи, основанный на методах градиентного спуска. Соответствующий алгоритм основывается на введении двухкомпонентного векторного потенциала для скорости $\mathbf{u} = \text{rot}(\psi_1, \psi_2, 0)$ (позволяет исключить уравнение (3) из постановки задачи) и применении оператора вихря к уравнению (1) (позволяет исключить из рассмотрения давление, так как $\text{rot}\nabla p \equiv 0$). В результате получается уравнение четвертого порядка дифференцирования для двух неизвестных функций:

$$\text{rot } \nabla \cdot \left[\eta \left[\nabla \text{rot}(\boldsymbol{\psi}) + \nabla \text{rot}(\boldsymbol{\psi})^T \right] \right] = \text{rot}(\mathbf{F}).$$

Далее для качественной аппроксимации содержащихся в этом уравнении производных высокого порядка применяется метод Галеркина со специальным базисом из тензорного произведения кубических В-сплайнов. Использование достаточно гладких базисных функций оправдано тем, что априори полагается достаточная гладкость самого решения задачи Стокса в математической модели. В результате последующей дискретизации задачи определение векторного потенциала сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений с положительно определенной симметричной ленточной матрицей. Число ненулевых диагоналей такой матрицы довольно велико, матрица плохо обусловлена, и число обусловленности ухудшается при увеличении размерности дискретной задачи и зависит от распределения вязкости в заданной пространственной области. Большая размерность дискретной задачи делает практически невозможным применение точных методов решения алгебраических систем. Итерационные же методы имеют низкую скорость сходимости.

Представленный подход легко реализуется, если только для рассматриваемой пространственной области можно построить однозначное достаточно гладкое отображение в параллелепипед. Численные методы решения начально-краевой задачи (4)–(6) в этом случае базируются на интерполяции поля скоростей на произвольной сетке и конечно-разностной ее дискретизации. Ретроспективная задача сводится к минимизации функционала

$$\|T(\mathcal{G}, \cdot; \varphi) - \chi(\cdot)\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow \min_{\varphi}.$$

Здесь $T(\vartheta, \cdot; \varphi)$ обозначает решение краевой задачи (4), (5) в момент времени $t = \vartheta$, с начальным условием $T(t = 0, \cdot) = \varphi(\cdot)$. Для реализации метода градиентного спуска необходимо аналитически записать сопряженную начально-краевую задачу для дискретного представления модельных уравнений (4)–(6). Это существенно ограничивает круг математических моделей, которые могут рассматриваться в рамках данного подхода. Тем не менее, его преимущества заключаются в высокой точности численных экспериментов, что подтверждает ряд тестовых примеров [9], [18].

Для представленного в работе численного алгоритма не надо проводить дополнительное аналитическое исследование математической модели. Используемый для реализации пакет OpenFOAM располагает широким набором эффективных процедур решения систем алгебраических уравнений, которые получаются в результате дискретизации краевых задач в пространственных областях с различной геометрией. Основное преимущество заключается в том, что скорость внесения изменений и дополнений в программную реализацию на порядок выше, чем это делалось ранее. Так, например, можно легко адаптировать данный подход к решению ретроспективных задач для неньютоновских жидкостей. В численном алгоритме используются различные способы определения оператора \mathbf{B} для задачи, чего не делалось ранее. Надо также отметить, что предлагаемый подход обладает меньшей точностью, но тестовые расчеты показывают, что численное решение качественно отображает существенные свойства искомого решения.

Построение аналитического представления дискретного оператора, отвечающего задаче (7), представляет собой хотя и трудоемкую, но вполне осуществимую работу. Теперь вместо задачи вычисления $T(\vartheta, \cdot; \varphi)$ можно рассматривать задачу аналитического определения матрицы \mathbf{A} и решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{A}\varphi = \chi \quad (12)$$

аналитическими методами линейной алгебры, например методом исключений Гаусса. В этом случае вопросы построения устойчивых методов не встают перед исследователем, решение находится с машинной точностью. Но тогда возникает вопрос: стоит ли вообще заниматься разработкой теории итерационных методов решения подобных задач? Ответ на него дает современное развитие вычислительной техники. Так, для дискретной аппроксимации $100 \times 100 \times 100$ размерность матрицы \mathbf{A} составляет 10^6 , количество действий для получения решения определяется величиной $\sim 10^{18}$, а для хранения матрицы потребуется $\sim 10^{12}$ элементов памяти. При этом, учитывая нелинейность задачи, для определения поля скоростей решение (12) придется осуществлять в каждом узле разбиения отрезка времени. Это увеличит время расчета, как минимум, на 2 порядка. Такое современным компьютерам не под силу. Заметим, что решение задачи (12) в 2D-постановке аналитическими методами линейной алгебры весьма перспективное направление уже сейчас.

5. Заключение

В работе предложен численный подход к решению ретроспективной задачи моделирования медленных, вызванных действием тепловых и гравитационных эффектов, течений вязкой несжимаемой жидкости, плотность и вязкость которой зависят от температуры. С математической точки зрения речь идет о совместном приближенном решении в обратном времени системы соотношений, состоящей из уравнения Стокса, уравнения несжимаемости, уравнения теплового баланса, а также соответствующих граничных условий и исходных данных для произвольной пространственной области.

Основные результаты работы состоят в следующем:

– разработан новый устойчивый к вычислительным ошибкам и погрешностям исходных данных алгоритм, позволяющий восстанавливать состояние рассматриваемой среды в прошлом по ее известному состоянию в настоящем, обоснование устойчивости которого не требует проведения аналитического исследования сопряженной начально-краевой задачи для уравнения теплового баланса;

– данный алгоритм реализован в виде программы в пакете OpenFOAM, которая может применяться, например, для восстановления истории развития тепловых полей в верхних слоях Земли, в пространственных областях сложной геометрии.

Описанная в статье тактика соответствует современному уровню развития вычислительной техники и программного обеспечения для нее.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-01-00073), Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 14 при поддержке УрО РАН (проект № 09-П-1-1003).

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 738 с.
2. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1970. – 288 с.
3. Исмаил-заде А.Т., Короткий А.И., Наймарк Б.М., Цепелев И.А. Численное моделирование трехмерных вязких течений под воздействием гравитационных и тепловых эффектов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2001. – Т. 41, № 9. – С. 1399-1415.
4. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 288 с.
5. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. – М.: Наука, 1978. – 206 с.
6. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. – Новосибирск: СО АН СССР, 1962. – 92 с.
7. Ismail-Zadeh A., Korotkii A., Schubert G., Tsepelev I. Numerical techniques for solving the inverse retrospective problems of thermal evolution of the Earth interior // Computers and Structures. – 2009. – V. 87, Issue 11-12. – P. 802-811.
8. Korotkii A.I., Tsepelev I.A. Solution of a retrospective inverse problem for one nonlinear evolutionary model // Proc. of Steklov Institute of Mathematics. – 2003. – Suppl. 2. – P. 80-94.
9. Исмаил-заде А.Т., Короткий А.И., Цепелев И.А. Трехмерное численное моделирование обратной ретроспективной задачи тепловой конвекции на основе метода квазиобращения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2006. – Т. 46, № 12. – С. 2279-2290.
10. Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Матус П.П. Разностные схемы с операторными множителями. – Минск: ЦОТЖ, 1998. – 442 с.
11. Wang Y., Hutter K. Comparisons of numerical methods with respect to convectively dominated problem // Int. J. Numer. Meth. Fluid. – 2001. – V. 37. – P. 721-745.
12. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
13. Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Васильев В.И. Итерационное решение ретроспективной обратной задачи теплопроводности // Математ. моделирование. – 1997. – Т. 9, № 5. – С. 119-127.
14. <http://foam.sourceforge.net/doc/Guides-a4/UserGuide.pdf> (дата обращения: 10.08.2010).
15. <http://foam.sourceforge.net/doc/Guides-a4/ProgrammersGuide.pdf> (дата обращения: 10.08.2010).
16. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 312 с.
17. Axelsson O. Iterative Solution Methods. – Cambridge: Univ. Press, 1994. – 672p.
18. Ismail-Zadeh A., Schubert G., Tsepelev I., Korotkii A. Thermal evolution and geometry of the descending lithosphere beneath the SE-Carpathians: An insight from the past // Earth and Planetary Science Letters. – 2008. – V. 273, Issue 1-2. – P. 68-79.

Поступила в редакцию 20.09.10

Сведения об авторе

Цепелев Игорь Анатольевич, кфмн, снс, Институт математики и механики УрО РАН (ИММ УрО РАН), 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской д. 16; E-mail: tsepelev@imm.uran.ru