

УДК 519.633:539.374

## УПРУГИЙ УДАР ПО ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОМУ СТЕРЖНЮ

Н.А. Окулов

*Филиал Российского государственного социального университета в г. Наро-Фоминске,  
Наро-Фоминск, Россия*

Работа посвящена численному моделированию процесса деформирования вязкопластического стержня, один торец которого опирается на гладкую твердую стенку, а по второму производится продольный упругий удар. Задача решается в одномерном приближении. Предложен численный метод, учитывающий изменение площадей сечений стержня в процессе удара. Метод позволяет решать задачи с одной, двумя и большим количеством границ раздела жестких и вязкопластических зон. Приведены результаты численного моделирования.

*Ключевые слова:* вязкопластический стержень, задача Стефана, численное моделирование

## ELASTIC IMPACT ON A VISCOPLASTIC ROD

N.A. Okulov

*Branch of the Russian State Social University in Naro-Fominsk, Naro-Fominsk, Russia*

The present study deals with numerical modeling of the viscoplastic deformation of a rod leant against a smooth solid wall at one end and subjected to an elastic (longitudinal) collision at the other end. A one-dimensional problem is considered. A numerical method that takes into account a change in the cross-sectional areas of the rod during the impact is proposed. The method allows us to solve the problem with one, two or more boundaries between the rigid zone and the viscoplastic one. The numerical simulation results are presented.

*Keywords:* viscoplastic rod, Stefan problem, numerical simulation

### 1. Введение

Первые экспериментальные и теоретические работы, посвященные вопросам деформирования вязкопластических стержней при продольных ударных нагрузках, появились в первой половине прошлого столетия [1]. В работе [2] средствами математического моделирования установлено, что в процессе удара одна часть стержня находится в жестком состоянии (жесткая зона), а другая — в вязкопластическом (вязкопластическая зона). Закон изменения границы раздела зон заранее не известен и подлежит определению в процессе решения задачи. С математической точки зрения задача деформирования вязкопластического стержня относится к группе задач типа Стефана, поскольку граница раздела жесткой и вязкопластической зон является аналогом границы фазового перехода (фронта) в теплофизических задачах.

Имеются две группы конечно-разностных методов решения таких задач: методы сквозного счета [3] и методы с выделением границы фазового перехода. К методам, входящим во вторую группу, относятся метод адаптивной сетки [4], метод выпрямления фронта [5, 6] и метод ловли фронта в узел сетки [6, 7]. Последний метод имеет два варианта. В первом варианте пространственная сетка задается заранее, а очередной временной шаг подбирается таким образом, чтобы фронт попал в узел сетки. Во

втором варианте заранее задается временная сетка, а чтобы фронт попадал в узел, подбирается пространственная сетка. У метода ловли фронта в узел сетки имеются два принципиальных ограничения. Первое заключается в том, что метод можно применять только для решения задач с одним фронтом; второе — изменение положения фронта должно иметь монотонный характер.

В данной работе предлагается метод численного моделирования процесса деформирования вязкопластического стержня, который является естественным развитием метода ловли фронта в узел сетки. От его первого варианта новый метод берет идею подбора временного шага, от второго — идею подбора пространственного шага. Ограничение, связанное с предположением о монотонном характере изменения положения фронта, преодолевается с помощью специальной алгоритмической процедуры перебора версий; процедура также делает возможным использование метода в случае не только одной, но и большего числа границ раздела жестких и вязкопластических зон.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу деформирования стержня 1 (Рис. 1), по одному из торцов которого производится продольный удар абсолютно жестким телом 2 массой  $M^*$ , а второй опирается на гладкую твердую стенку 3. Стержень изготовлен из несжимаемого вязкопластического материала плотностью  $\rho$ , первоначальная длина стержня  $L_0$ . Скорость тела перед ударом равняется  $V_0$ . Между телом и ударяемым торцом находится упругая прокладка 4. Ее толщина в несжатом состоянии составляет  $\Delta$ , жесткость —  $k^*$ , масса считается пренебрежимо малой. Начало координат  $O$  неподвижной декартовой системы поместим в центре ударяемого торца, ось  $Ox$  направим вдоль оси стержня. В момент  $t = 0$  тело, прокладка и стержень приходят в соприкосновение.

Значения координаты  $0 \leq x \leq L_0$ , отвечающие сечениям стержня в момент времени  $t = 0$ , в последующие моменты будем рассматривать в качестве лагранжевых координат сечений. Декартову координату точки тела, находящейся на границе с упругой прокладкой, обозначим как  $x_M(t)$ . В начальный момент времени положим:  $x_M(0) = -\Delta$ . Сумма  $X(t) = x_M(t) + \Delta$  задает смещение тела относительно его начального положения.

Предположим, что имеется некоторый ограничитель 5, не позволяющий телу сместиться на величину, большую  $X_{\max}$ . Тело, достигнув ограничителя, абсолютно упруго отражается, и его скорость меняет знак на противоположный.

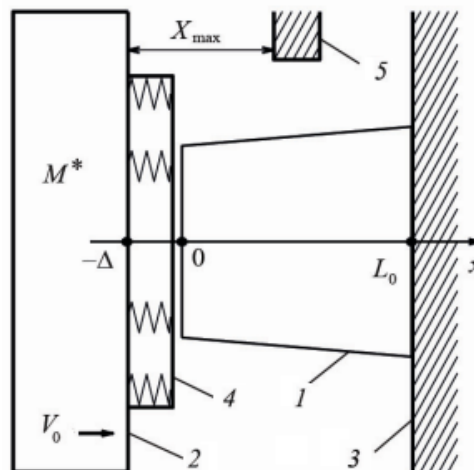


Рис. 1. Стержень 1, ударяющее тело 2, опорная стенка 3, упругая прокладка 4 и ограничитель 5 (положение перед ударом).

Задачу решаем в одномерном приближении. Определяющее соотношение вязкопластической среды принимаем в виде, предложенном авторами статьи [2]:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \begin{cases} (\sigma + \sigma_s)/\eta, & |\sigma| > \sigma_s, \\ 0, & |\sigma| \leq \sigma_s. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $\sigma = \sigma(x, t)$  и  $v = v(x, t)$  — усредненные по сечению с лагранжевой координатой  $x$  напряжение и скорость в момент времени  $t$ . В одномерном случае параметры  $\sigma_s$  и  $\eta$  имеют смысл пластической постоянной (предела текучести) и коэффициента вязкости. В рассматриваемой задаче в силу сжатия стержня  $\sigma \leq 0$ . Связные множества сечений стержня, в которых выполняются неравенства  $\sigma < -\sigma_s$  и  $\sigma \geq -\sigma_s$ , будем называть, соответственно, вязкопластической и жесткой зонами.

Для каждого момента времени  $t > 0$  требуется определить количество указанных зон и их положение. Для каждой вязкопластической зоны необходимо найти распределения скоростей и напряжений, а для каждой жесткой зоны — скорость движения и распределение напряжений в ней.

**З а м е ч а н и е.** Предельные значения параметров  $k^*$  и  $M^*$  соответствуют следующим ситуациям: при  $k^* \rightarrow \infty$  по стержню осуществляется жесткий удар (упругая прокладка отсутствует) телом конечной массы; при  $M^* \rightarrow \infty$  — упругий удар телом, движущимся с постоянной скоростью; при  $M^* \rightarrow \infty$ ,  $k^* \rightarrow \infty$  — жесткий удар телом, движущимся с постоянной скоростью.

### 2.1. Переход к безразмерным величинам

В качестве характерных значений напряжения, расстояния, времени, скорости, площади поперечного сечения и массы выбираем

$$\langle \sigma \rangle = \sigma_s, \quad \langle x \rangle = L_0, \quad \langle t \rangle = L_0^2 \rho / \eta, \quad \langle v \rangle = L_0 \sigma_s / \eta, \quad \langle S \rangle = S_0(0), \quad \langle M \rangle = \rho L_0 S_0(0)$$

и переходим к безразмерным переменным

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= \frac{\sigma}{\langle \sigma \rangle}, & \tilde{x} &= \frac{x}{\langle x \rangle}, & \tilde{t} &= \frac{t}{\langle t \rangle}, & \tilde{v} &= \frac{v}{\langle v \rangle}, & \tilde{U} &= \frac{U}{\langle U \rangle}, \\ \tilde{S} &= \frac{S}{\langle S \rangle}, & \tilde{S}_0 &= \frac{S_0}{\langle S \rangle}, & \tilde{X} &= \frac{X}{\langle x \rangle}, & \tilde{V} &= \frac{V}{\langle v \rangle}, & \tilde{M} &= \frac{M^*}{\langle M \rangle}. \end{aligned}$$

Дальнейшее изложение будем вести в безразмерных переменных, поэтому подразумевающий их знак « $\sim$ » опускаем.

В безразмерных переменных определяющее соотношение (1) записываем как

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = (1 + \sigma(x, t)) \cdot H(-1 - \sigma(x, t)), \quad (2)$$

где  $H(z)$  — функция Хевисайда ( $H(z) = 0$  при  $z < 0$ ,  $H(z) = 1$  при  $z \geq 0$ ), а кинематическая связь между смещением тела  $X$  и его скоростью  $V$ , а также между смещениями сечений  $U$  и их скоростями  $v$  принимает вид:

$$\frac{dX(t)}{dt} = \alpha V(t), \quad \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \alpha v(x,t),$$

где безразмерный параметр  $\alpha = \rho \sigma_s L_0^2 / \eta^2$  является произведением числа Сен-Венана  $Sen = \sigma_s L_0 / (\eta V_0)$  и числа Рейнольдса  $Re = \rho V_0 L_0 / \eta$ .

## 2.2. Уравнение движения сечений

Пусть  $S_0(x)$  и  $S(x,t)$  — площади сечения с координатой  $x$  в начальный момент и момент времени  $t$ . Очевидно, что  $S_0(x) = S(x,0)$ . В работе [2] установлена формула

$$S(x,t) = \frac{S_0(x)}{1 + \frac{\partial U(x,t)}{\partial x}},$$

где  $U(x,t)$  — смещение сечения с лагранжевой координатой  $x$  в момент времени  $t$ . Дифференцируя левую и правую части этой формулы по времени и используя определяющее соотношение (2), получаем

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} = -\alpha \frac{S^2(x,t)}{S_0(x)} (1 + \sigma(x,t)) \cdot H(-1 - \sigma(x,t)).$$

**З а м е ч а н и е.** Поскольку  $(1 + \sigma(x,t)) \cdot H(-1 - \sigma(x,t)) \leq 0$ , то из последней формулы следует, что в процессе удара площадь любого из сечений не может уменьшаться.

Записываем уравнение движения центра масс части стержня, заключенной между сечениями  $x$  и  $x + \Delta x$ , и делаем предельный переход  $\Delta x \rightarrow 0$ . Учитывая условие несжимаемости материала стержня, получаем уравнение движения сечений

$$S_0(x) \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial (\sigma(x,t) S(x,t))}{\partial x}. \quad (3)$$

Исключая с помощью определяющего соотношения (2) из уравнения движения (3) скорость, переходим к двум уравнениям. Одно из них,

$$\frac{\partial \sigma(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{S_0(x)} \frac{\partial (\sigma(x,t) S(x,t))}{\partial x} \right), \quad (4)$$

выполняется в вязкопластической зоне, другое,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{S_0(x)} \frac{\partial (\sigma(x,t) S(x,t))}{\partial x} \right) = 0, \quad (5)$$

— в жесткой зоне.

Ударяющее тело испытывает силовое воздействие только тогда, когда прокладка сжата, поэтому уравнение, описывающее его движение, имеет вид

$$M \frac{dV(t)}{dt} = -F(t), \quad F(t) = -k \cdot (X(t) - U(0, t)) \cdot H(X(t) - U(0, t)),$$

где  $k = k^* L_0 / (\langle S \rangle \sigma_s)$  — безразмерный коэффициент жесткости прокладки. В случае, когда смещение тела достигает максимального значения, уравнение движения тела необходимо дополнить условием абсолютно упругого отражения.

### 2.3. Режимы деформирования стержня. Сценарий удара

В каждый момент времени стержень рассматриваем как объединение нескольких чередующихся жестких и вязкопластических зон. Деформация стержня происходит только в вязкопластических зонах, в жестких зонах материал стержня не деформируется. Условимся обозначать жесткую зону буквой  $S$ , а вязкопластическую —  $L$ . Просматривая зоны в порядке следования от ударяемого торца к опорному, получаем упорядоченные наборы букв  $L$  и  $S$ , например,  $S, LS, LSL$  и тому подобные. Очевидно, что разным наборам соответствуют разные режимы процесса деформирования стержня. Для обозначения режимов также будем использовать соответствующие наборы букв  $L$  и  $S$ .

В данной работе рассмотрим случаи, когда зон пластического течения образуется не более одной (это ограничение не является принципиальным; предлагаемый численный метод может использоваться и при большем числе вязкопластических зон). Этим случаям соответствуют режимы  $S, L, SL, LS$  и  $SLS$ .

Вообще говоря, в процессе удара режимы деформирования стержня меняются. Упорядоченную во времени последовательность режимов будем называть сценарием удара.

### 2.4. Условия сопряжения на границах раздела

Плоское сечение, отделяющее жесткую зону от вязкопластической, считаем границей раздела. В режиме  $SLS$  имеются две границы: 1-я —  $x = \xi_1(t)$ , и 2-я —  $x = \xi_2(t)$ ,  $\xi_1(t) < \xi_2(t)$ . В качестве условий сопряжения на границах раздела обычно используются условия непрерывности напряжения и скорости. На границах раздела выполняется равенство  $1 + \sigma = 0$ , поэтому первая группа условий сопряжения имеет вид

$$\sigma(x, t) \Big|_{x=\xi_j+} = \sigma(x, t) \Big|_{x=\xi_j-} = -1 \quad (j = 1, 2).$$

В качестве второй группы условий сопряжения в рассматриваемой задаче удобнее использовать не условие непрерывности скорости, а условие непрерывности ускорения:

$$\frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{x=\xi_j+} = \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{x=\xi_j-} \quad (j = 1, 2).$$

Такая замена условий возможна, поскольку условие непрерывности ускорения является следствием условий непрерывности напряжения и скорости.

Используя уравнение движения (3), условию непрерывности ускорения на границах раздела придаем следующий вид:

$$\left. \frac{\partial(\sigma S)}{\partial x} \right|_{x=\xi_j+} = \left. \frac{\partial(\sigma S)}{\partial x} \right|_{x=\xi_j-} \quad (j = 1, 2). \quad (6)$$

**З а м е ч а н и е.** В режимах  $S$  и  $L$  границ раздела нет. В режиме  $SL$  отсутствует 2-я граница раздела, в режиме  $LS$  — 1-я. Условия сопряжения на отсутствующих границах раздела не ставятся.

### 2.5. Начальные и краевые условия

За начальный момент времени выбираем время  $t = 0$ , когда тело входит в контакт со стержнем. Следовательно,

$$V(0) = \frac{1}{\text{Sen}}, \quad X(0) = 0, \quad S(x, 0) = S_0(x), \quad U(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad \sigma(x, 0) = 0.$$

На опорном торце должно выполняться условие отсутствия смещений

$$U(1, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Ударяющее тело воздействует на стержень через прокладку с силой  $F(t)$ . Поскольку с противоположной стороны  $F(t) = -\sigma(0, t)S(0, t)$ , приходим к следующему граничному условию на ударяемом торце:

$$\sigma(0, t) = -k \cdot (X(t) - U(0, t)) \cdot H(X(t) - U(0, t)) / S(0, t).$$

### 2.6. Распределение напряжений в жесткой зоне вблизи ударяемого торца

Пусть  $0 \leq x \leq \xi_1(t)$  — жесткая зона вблизи ударяемого торца. Напряжение в этой зоне должно удовлетворять уравнению (5) и граничному условию  $\sigma(\xi_1, t) = -1$ . Предполагаем, что  $\sigma(0, t) = \varphi_0(t)$ . С учетом указанных краевых условий дифференциальное уравнение (5) имеет аналитическое решение

$$\sigma(x, t) = \sigma_0(x, t, \xi_1(t), \varphi_0(t)), \quad (7)$$

$$\text{где } \sigma_0(x, t, \xi, \varphi) = \frac{1}{S(x, t)} \left( \varphi S(0, t) - \frac{S(\xi, t) + \varphi S(0, t)}{\int_0^\xi S_0(x) dx} \int_0^x S_0(x) dx \right).$$

### 2.7. Распределение напряжений в жесткой зоне, примыкающей к опорному торцу

Пусть  $\xi_2(t) \leq x \leq 1$  — жесткая зона вблизи опорного торца. Напряжение в этой зоне должно удовлетворять уравнению (5) и граничным условиям

$$\sigma(\xi_2(t), t) = -1, \quad \left. \frac{\partial(\sigma(x, t)S(x, t))}{\partial x} \right|_{x=1} = 0.$$

При таких краевых условиях уравнение (5) имеет следующее аналитическое решение:

$$\sigma(x, t) = \sigma_1(x, t, \xi_2(t), -1), \quad (8)$$

где  $\sigma_1(x, t, \xi, \varphi) = \frac{\varphi S(\xi, t)}{S(x, t)}$ .

### 3. Разностная схема

#### 3.1. Сетка

Областью решения задачи деформирования вязкопластического стержня в процессе удара является полуполоса  $D = \{x, t \mid 0 \leq x \leq 1, t \geq 0\}$ . Решение осуществляется шагами по времени, которым соответствуют временные слои  $t = t_m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ). На каждом временном слое  $m$  выполняем следующие действия:

1) устанавливаем величину текущего шага по времени  $\tau_m = t_m - t_{m-1}$ ;

2) строим пространственную сетку  $x = x_i^m$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ , где  $N$  — число узлов); в пространстве узлы нумеруются в порядке продвижения от границы  $x = 0$  к границе  $x = 1$ , поэтому для всех  $m \geq 0$  выполняются равенства  $x_1^m = 0$ ,  $x_N^m = 1$ ;

3) вычисляем узловые значения искомых функций (напряжения, скорости и других характеристик деформации стержня и движения тела).

Подчеркнем, что сетка формируется в процессе решения задачи. Ее временные и пространственные шаги  $\tau_m = t_m - t_{m-1}$ ,  $h_i^m = x_i^m - x_{i-1}^m$ , вообще говоря, имеют непостоянную величину.

Совокупность пространственных шагов на  $m$ -м временном слое будем рассматривать как  $N$ -мерный вектор  $H^m = (h_1^m, h_2^m, \dots, h_N^m)$ . При построении сетки учитываем, что границы раздела разных зон (в одномерном случае — это линии)  $x = \xi_1(t)$  и  $x = \xi_2(t)$  должны проходить по узлам. Представляем их следующими наборами узлов:

$$\xi_1(t) \rightarrow \cup(n_1^m, m), \quad \xi_2(t) \rightarrow \cup(n_2^m, m),$$

где  $n_1^m$  и  $n_2^m$  — пространственные номера узлов, через которые проходят, соответственно, 1-я и 2-я границы раздела. Такие узлы будем называть разделительными.

#### 3.2. Формирование системы линейных алгебраических уравнений

Жесткие зоны, прилегающие к ударяемому и опорному торцам, обозначим, соответственно, как зону I и зону II. Узлам, принадлежащим зоне I, ставим в соответствие уравнения

$$\sigma_i^m = \sigma_0(x_i^m, t_m, x_{n_i^m}^m, -k(\tilde{X}^m - \tilde{U}_1^m)H(\tilde{X}^m - \tilde{U}_1^m)/\tilde{S}_1^m) \quad (1 \leq i \leq n_1^m), \quad (9)$$

узлам в вязкопластической зоне — разностные уравнения, полученные в результате аппроксимации уравнения (4) на рассматриваемой неравномерной сетке

$$\frac{2\sigma_{i+1}^m \tilde{S}_{i+1}^m h_i^m + 2\sigma_{i-1}^m \tilde{S}_{i-1}^m h_{i+1}^m - 2\sigma_i^m \tilde{S}_i^m (h_i^m + h_{i+1}^m)}{h_i^m h_{i+1}^m (h_i^m + h_{i+1}^m)} - \frac{1}{S_0(x_i^m)} \frac{S_0(x_{i+1}^m) - S_0(x_{i-1}^m)}{h_i^m + h_{i+1}^m} \frac{\sigma_{i+1}^m \tilde{S}_{i+1}^m - \sigma_{i-1}^m \tilde{S}_{i-1}^m}{h_i^m + h_{i+1}^m} = \frac{\sigma_i^m - \sigma_i^{m-1}}{\tau_m} S_0(x_i^m) \quad (n_1^m < i < n_2^m), \quad (10)$$

узлам в зоне II — уравнения

$$\sigma_i^m = \sigma_0(x_i^m, t_m, x_{n_2^m}^m, -1) \quad (n_2^m \leq i \leq N). \quad (11)$$

Входящие в эти разностные уравнения предикторные значения смещения тела  $\tilde{X}^m$ , смещений сечений  $\tilde{U}_i^m$  и их площадей  $\tilde{S}_i^m$  вычисляем по формулам:

$$\begin{aligned} \tilde{X}^m &= X^{m-1} + \alpha V^{m-1} \tau_m \cdot \lambda, \quad \tilde{U}_i^m = U_i^{m-1} + \alpha v^{m-1} \tau_m \cdot \lambda, \\ \tilde{S}_i^m &= S_i^{m-1} - \alpha \frac{(S_i^{m-1})^2}{S_0(x_i^m)} (1 + \sigma_i^{m-1}) H(-1 - \sigma_i^{m-1}) \tau_m \cdot \lambda, \quad 0 < \lambda < 1. \end{aligned}$$

В формулах (7) и (8) также делаем соответствующие замены: от  $S(x_i^m, t_m) = S_i^m$  переходим к  $\tilde{S}_i^m$ . Значение вычислительного параметра  $\lambda$  подбираем опытным путем.

Уравнения (9–11) рассматриваем как единую систему линейных алгебраических уравнений, соответствующую режиму деформирования  $SLS$ ,

$$A^m \Sigma^m = B^m,$$

где  $\Sigma^m = (\sigma_1^m, \sigma_2^m, \dots, \sigma_N^m)^T$  — вектор значений напряжения в узлах пространственной сетки  $m$ -го временного слоя;  $A^m = (a_{ij})$  — трехдиагональная матрица, ненулевые элементы и элементы столбца правых частей  $B^m = (b_i)$  которой находятся по следующим правилам:

- в точках  $x_i^m$  зоны I для номеров  $1 \leq i \leq n_1^m$

$$a_{ii} = 1, \quad b_i = \sigma_0(x_i^m, t_m, x_{n_1^m}^m, -k(\tilde{X}^m - \tilde{U}_1^m)H(\tilde{X}^m - \tilde{U}_1^m) / \tilde{S}_1^m);$$

- во внутренних точках  $x_i^m$  вязкопластической зоны для номеров  $n_1^m < i < n_2^m$

$$\begin{aligned} a_{ii-1} &= \frac{\tilde{S}_{i-1}^m}{h_i^m + h_{i+1}^m} \left( \frac{2}{h_i^m} + \frac{S_0(x_{i+1}^m) - S_0(x_{i-1}^m)}{S_0(x_i^m)(h_i^m + h_{i+1}^m)} \right), & a_{ii} &= -\frac{2\tilde{S}_i^m}{h_i^m h_{i+1}^m} - \frac{S_0(x_i^m)}{\tau_m}, \\ a_{ii+1} &= \frac{\tilde{S}_{i+1}^m}{h_i^m + h_{i+1}^m} \left( \frac{2}{h_{i+1}^m} - \frac{S_0(x_{i+1}^m) - S_0(x_{i-1}^m)}{S_0(x_i^m)(h_i^m + h_{i+1}^m)} \right), & b_i &= -\frac{\sigma_i^{m-1} S_0(x_i^m)}{\tau_m}; \end{aligned}$$

- в точках  $x_i^m$  зоны II для номеров  $n_2^m \leq i \leq N$



$$a_{ii} = 1, \quad b_i = \sigma_1(x_i^m, t_m, x_{n_2^m}^m, -1).$$

Формулы для режимов  $S$ ,  $L$ ,  $SL$  и  $LS$  являются частными случаями приведенных формул.

### 3.3. Аппроксимация условий сопряжения на границах раздела зон

Исходя из формул (7) и (8) для вычисления напряжений в жестких зонах записываем выражения для аппроксимации условий сопряжения на 2-й границе (6):

$$\sigma_{n_1^m+1}^m = \sigma_0(x_{n_1^m+1}^m, t_m, x_{n_1^m}^m, \sigma_1^m), \quad \sigma_{n_2^m-1}^m = \sigma_1(x_{n_2^m-1}^m, t_m, x_{n_2^m}^m, -1). \quad (12)$$

## 4. Алгоритм численного решения

На рисунке 2 обозначены блоки алгоритма, то есть основные математические операции и логические действия, выполняемые в процессе его реализации на шаге  $m$ .



Рис. 2. Блок-схема алгоритма

**Блок 1.** Формирование множества версий относительно положения разделительных границ и вектора пространственных шагов  $H^m$ . Версией называем высказывание о предполагаемых пространственных номерах разделительных узлов  $n_1^m$ ,  $n_2^m$  и векторе шагов  $H^m$ , то есть о том, сколько имеется разделительных узлов на  $m$ -м временном слое, какие пространственные номера им соответствуют, и каковы пространственные шаги. Принимаем во внимание только те версии, которые входят во множество допустимых версий. Версию считаем допустимой, если номера  $n_1^m$  и  $n_2^m$  входят в наборы  $\{n_1^{m-1} + 1, n_1^{m-1}, n_1^{m-1} - 1\}$  и  $\{n_2^{m-1} + 1, n_2^{m-1}, n_2^{m-1} - 1\}$  соответственно, а вектор шагов  $H^m$  входит в допустимое множество шагов  $H_{дон}^m$ , которое формируем следующим образом. Для пространственных шагов вблизи разделительных линий полагаем

$$h_{n_1^m+1}^m \leq h_{n_1^{m-1}+1}^{m-1}, \quad h_{n_1^m}^m = h_{n_1^m+1}^{m-1} + h_{n_1^m}^{m-1} - h_{n_1^m+1}^m; \quad h_{n_2^m}^m \leq h_{n_2^{m-1}}^{m-1}, \quad h_{n_2^m+1}^m = h_{n_2^m+1}^{m-1} + h_{n_2^m-1}^{m-1} - h_{n_2^m}^m.$$

Остальные пространственные шаги берем равными соответствующим шагам с предыдущего временного слоя.

Блок 2. Выдвижение версии, то есть выбор конкретной версии, в рамках которой выполняем дальнейшие действия.

Блок 3. Решение системы уравнений. Пространственные шаги, которые примыкают к разделительным узлам, в  $H_{дон}^m$  заданы не в виде конкретных величин, а как диапазон возможных значений. Чтобы учесть этот факт, вводим обозначения  $h_{n_1^m+1}^m = z$ ,  $h_{n_2^m}^m = y$  и записываем соответствующий вектор  $H^m$  как  $H^m(z, y)$ . Тогда формулы связи пространственных координат разделительных узлов  $m$ -го слоя с координатами узлов (в общем случае не обязательно разделительных) предыдущего слоя принимают вид:

$$x_{n_1^m}^m = x_{n_1^{m-1}}^{m-1} - z, \quad x_{n_2^m}^m = x_{n_2^{m-1}}^{m-1} + y.$$

В рамках выдвинутой версии элементы матрицы  $A^m$  и столбца  $B^m$  выражаем через узловое значения искомого величин, а также через пространственные шаги сетки на предыдущем временном слое и неизвестные пространственные шаги  $z$  и  $y$ . В результате решения системы линейных уравнений получаем решение в виде функции этих переменных

$$\Sigma^m = \Sigma^m(z, y).$$

В частности, находим функциональные выражения для следующих узловых значений напряжения:

$$\sigma_1^m = \sigma_1^m(z, y), \quad \sigma_{n_1^m+1}^m = \sigma_{n_1^m+1}^m(z, y), \quad \sigma_{n_2^m-1}^m = \sigma_{n_2^m-1}^m(z, y). \quad (13)$$

Блок 4. Решение системы уравнений сопряжения. Подставляя правые части соотношений (13) в условия сопряжения (12), получаем систему из двух уравнений

$$\sigma_{n_1^m+1}^m(z, y) = \sigma_0(x_{n_1^m+1}^{m-1}, t_m, x_{n_1^m+1}^{m-1} - z, \sigma_1^m(z, y)), \quad \sigma_{n_2^m-1}^m(z, y) = \sigma_1(x_{n_2^m-1}^{m-1}, t_m, x_{n_2^m-1}^{m-1} + y, -1).$$

Ее численное решение приводит к конкретным значениям  $z = \hat{z}$ ,  $y = \hat{y}$ .

Блок 5. Проверка истинности версии и выработка тактики дальнейших действий. Об истинности версии судим на основании истинности включения  $H^m(\hat{z}, \hat{y}) \in H_{дон}^m$ . Если вектор пространственных шагов  $H^m(\hat{z}, \hat{y})$  не входит в число допустимых, то выдвигаем следующую версию и повторяем блоки алгоритма, начиная с Блока 2.

Блок 6. Корректировка шага. Если все версии ложны, то корректируем шаг  $\tau_m$  в сторону уменьшения и переходим снова к Блоку 1.

Блок 7. Конкретизация сетки и определение напряжений. В результате перебора версий и, возможно, корректировки временного шага находим истинную версию. За номера разделительных узлов на  $m$ -м временном слое принимаем те, которые фигурируют в формулировке истинной версии. Полагаем

$$H^m = H^m(\hat{z}, \hat{y}), \quad \Sigma^m = \Sigma^m(\hat{z}, \hat{y}).$$

Другие характеристики деформирования стержня и движения ударяющего тела вычисляем по формулам:

$$V^m = V^{m-1} - \alpha \frac{k}{M} (X^{m-1} - U_1^{m-1}) H(X^{m-1} - U_1^{m-1}) \tau_m, \quad X^m = \tilde{X}^m + \alpha V^m \tau_m (1 - \lambda);$$

$$v_N^m = 0, \quad v_i^m = v_{i+1}^m - h_{i+1}^m (1 + \sigma_i^m) H(-1 - \sigma_i^m) \quad (i = N-1, N=2, \dots, 1);$$

$$U_i^m = \tilde{U}_i^{m-1} + \alpha v_i^m \tau_m (1 - \lambda);$$

$$S_i^m = \tilde{S}_i^{m-1} - \alpha \frac{(\tilde{S}_i^{m-1})^2}{S_0(x_i^m)} (1 + \sigma_i^m) H(-1 - \sigma_i^m) \tau_m (1 - \lambda) \quad (i \neq n_1^m, n_2^m).$$

Узловые значения  $S_{n_1^m}^m$ ,  $S_{n_2^m}^m$ ,  $U_{n_1^m}^m$  и  $U_{n_2^m}^m$  находим с помощью линейной интерполяции по значениям в соседних узлах  $m$ -го временного слоя.

Итак, все, что требовалось сделать на  $m$ -ом временном слое, сделано: найдена величина временного шага, определены номера разделительных узлов, значения всех пространственных шагов, узловые значения напряжения, вычислены узловые значения других характеристик движения вязкопластического стержня. Переходим на следующий слой.

**З а м е ч а н и е.** Основная идея алгоритма заключается в переборе версий. Поэтому далее предлагаемый численный метод будем именовать методом версий.

## 5. Результаты численного моделирования

Далее представлены результаты расчетов для случая деформирования цилиндрического стержня при следующих значениях безразмерных параметров моделирования:

$$M = 1000, \quad k = 50, \quad \alpha = 100, \quad \text{Sen} = 10, \quad X_{\max} = 0,5.$$

Расчеты показали, что деформирование стержня в процессе удара происходит по сценарию (стрелка указывает на переход от режима к режиму; цифра соответствует времени смены режима):

$$S \xrightarrow{0,002} L \xrightarrow{0,021} SL \xrightarrow{0,043} L \xrightarrow{0,048} SL \xrightarrow{0,077} SLS \xrightarrow{0,081} S.$$

По окончании удара длина стержня становится равной 0,394, площадь ударяемого и опорного торцов — 2,574 и 2,962 соответственно, минимальная площадь сечения — 2,148.

На рисунке 3 приведено несколько кадров анимационного изображения, иллюстрирующих динамику изменения формы стержня. Серым цветом отмечена вязкопластическая зона, пунктиром изображена первоначальная форма стержня; ударяющее тело и упругая прокладка не показаны.

Рисунок 4 содержит распределения скоростей и напряжений в стержне для нескольких моментов времени.

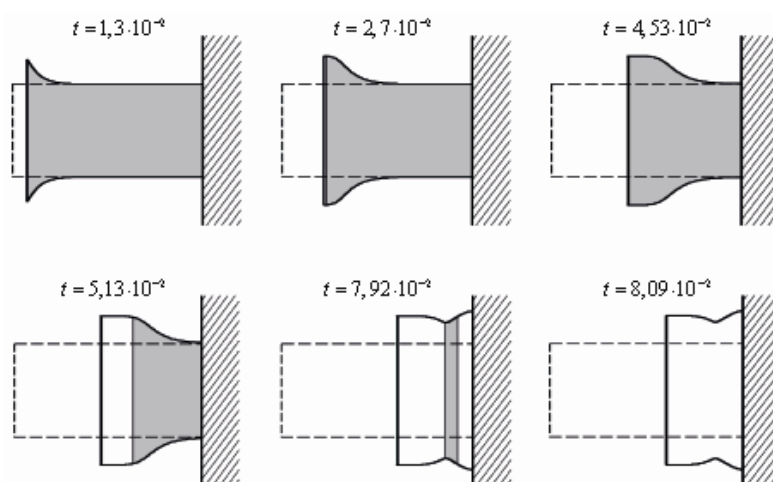
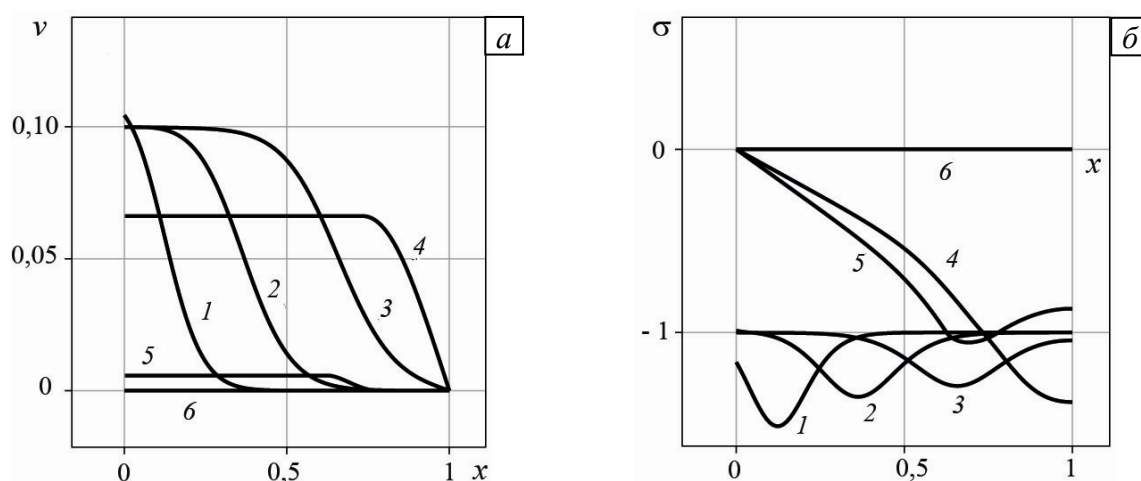


Рис. 3. Изменение формы стержня в процессе удара

Рис. 4. Распределения скоростей (а) и напряжений (б) по сечениям стержня; графики 1–6 соответствуют моментам времени  $t$ : 0,013; 0,027; 0,045; 0,051; 0,079; 0,081

## 6. Сравнение с результатами экспериментов

В тридцатые годы прошлого столетия под руководством А.А. Ильюшина проводились экспериментальные работы по изучению вязкопластических свойств различных металлов [1]. В указанной работе под вязкопластическим телом понимается однородное несжимаемое тело, для которого имеют место следующие две гипотезы (далее используются обозначения и терминология, принятые в работе [1]):

1. Направления максимальных скоростей скольжения совпадают с направлениями максимальных касательных напряжений в каждой точке тела.

2. Максимальное касательное напряжение  $T$  при течении тела всегда больше некоторой постоянной  $K$  и является линейной функцией максимальной скорости скольжения  $U$ :  $T = K + \mu U$  ( $\mu$  — коэффициент динамической вязкости).

В экспериментах абсолютно твердое тело (поршень) массой  $M^*$  с высокой скоростью  $V_0$  ударяло по одному из торцов цилиндрического образца. Другой торец образца опирался на гладкую неподвижную плиту. Основная цель экспериментов заключалась в определении коэффициента  $\mu$ . Было установлено, что при ударе сохраняется цилиндрическая форма образца и наблюдается параллельность траекторий

главных напряжений. Исходя из этого, А.А. Ильюшин сделал предположение об однородности деформаций в процессе удара и показал, что компонента напряжения  $\sigma_x$  и продольная компонента скорости  $v$  связаны соотношением

$$\sigma_x = -K\sqrt{3} + 3\mu \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (14)$$

В эксперименте с алюминиевым образцом (при плотности  $2700 \text{ кг/м}^3$ , начальной длине  $8 \cdot 10^{-2} \text{ м}$  и начальном радиусе цилиндра  $2,36 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ , скорости поршня в момент удара  $23,9 \text{ м/с}$  и массе  $21,952 \text{ кг}$ ) с высокой точностью были определены коэффициент вязкости  $\mu$  и пластическая постоянная  $K$ , а также закон движения ударяющего тела.

Примечательным является следующий факт: формула (14) переходит в определяющее соотношение (1), предложенное А.Ю. Ишлинским и Г.И. Баренблаттом для описания одномерного деформирования стержней при продольных ударах, если положить  $\sigma_s = K\sqrt{3}$  и  $\eta = 3\mu$ . Данное обстоятельство дает возможность сравнить результаты расчетов, выполненных предлагаемым здесь методом версий, с экспериментальными данными.

Значения предела текучести  $\sigma_s$  и коэффициента вязкости  $\eta$ , вычисленные по полученным в эксперименте значениям пластической постоянной  $K$  и коэффициента вязкости алюминия  $\mu$ , имеют значения  $0,98 \cdot 10^8 \text{ кг/(м} \cdot \text{с}^2)$  и  $0,296 \cdot 10^5 \text{ кг/(м} \cdot \text{с)}$  соответственно. Безразмерные параметры моделирования, найденные по указанным выше данным, составляют  $Sen = 3,700$ ,  $\alpha = 0,214$  и  $M = 58,122$ . Чтобы обеспечить условие жесткого удара и не учитывать наличие ограничителя, безразмерные коэффициент упругости прокладки  $k$  и максимальное смещение тела  $X_{\max}$  были взяты равными  $5000$  и  $1$  соответственно. Полученные результаты свидетельствуют, что при указанных значениях параметров моделирования деформация в процессе удара лишь незначительно отличается от однородной и, как следствие этого, форма стержня после удара остается цилиндрической.

На рисунке 5 представлены графики закона движения ударяющего тела. Первый получен расчетным путем с помощью метода версий, второй — экспериментально. Расхождение между графиками незначительное.

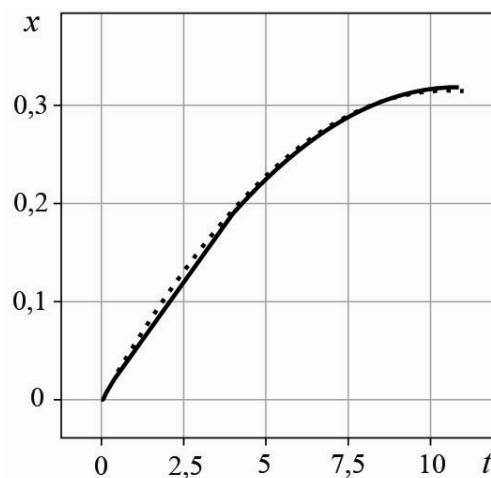


Рис. 5. Экспериментальный (пунктирная линия) и расчетный (сплошная линия) графики закона движения ударяющего тела.

## 7. Заключение

Разработан численный метод моделирования процесса деформирования вязкопластического стержня, один торец которого опирается на гладкую твердую стенку, а по второму производится продольный упругий удар. Метод позволяет находить все характеристики процесса деформирования (поля напряжений и скоростей, форму и длину стержня, положение границ раздела твердых и вязкопластических зон и так далее) для любого момента времени — от начала удара до его конца. Численные эксперименты указывают на возможность существования сложных режимов деформирования, например режима с одной вязкопластической зоной в средней части цилиндра и двумя жесткими зонами, находящимися у его торцов. Результаты расчетов хорошо согласуются с имеющимися экспериментальными и теоретическими результатами других авторов.

Автор выражает благодарность профессору Г.Л. Бровко за содержательную дискуссию и конструктивные замечания.

## Литература

1. *Ильюшин А.А.* Труды. Т.1 (1935–1945) / Составители: Е.А. Ильюшина, Н.Р. Короткина. – М.: Физматлит, 2003. – 352 с.
2. *Баренблатт Г.И., Иилинский А.Ю.* Об ударе вязко-пластического стержня о жесткую преграду // ПММ. – 1962. – Т. 26, вып. 3. – С. 497-502.
3. *Будак Б.М., Соловьева Е.Н., Успенский А.Б.* Разностный метод со сглаживанием коэффициентов для решения задач Стефана // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. – 1965. – Т. 5, № 5. – С. 828-840.
4. *Дарьин Н.А., Мажукин В.И.* Математическое моделирование задачи Стефана на адаптивной сетке // Дифференциальные уравнения. – 1987. – Т. 23, № 7. – С. 1154-1160.
5. *Будак Б.М., Гольдман Н.А., Успенский А.Б.* Разностные схемы с выпрямлением фронтов для решения многофронтных задач типа Стефана // ДАН СССР. – 1966. – Т. 167, № 4. – С. 735-738.
6. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Вычислительная теплотехника. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
7. *Будак Б.М., Васильев Ф.П., Успенский А.Б.* Разностные методы решения некоторых краевых задач типа Стефана // Численные методы в газовой динамике: Сб. работ ВЦ МГУ, вып. IV. – М.: Изд-во МГУ, 1965. – С. 139-183.

*Поступила в редакцию 13.10.10*

---

*Сведения об авторе*

*Окулов Николай Алексеевич, кфмн, доц., Филиал Российского государственного социального университета в г. Наро-Фоминске, 143302, Московская обл., Наро-Фоминск, Киевское шоссе, 5; E-mail: okulovna@ Rambler.ru*