

УДК 531.21

## ПРИМЕНЕНИЕ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ОДНОНАПРАВЛЕННОГО КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА С НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОУПРУГИМ СВЯЗУЮЩИМ

Р.Г. Куликов, Н.А. Труфанов

*Пермский государственный технический университет, Пермь, Россия*

На примере задачи деформирования ячейки периодичности волокнистого композиционного материала с нелинейно вязкоупругим связующим рассматриваются численные аспекты применения итерационного метода решения нелинейных задач вязкоупругости, использующего идеи метода «физического погружения». Реализована численная процедура решения, основанная на сведении исходной задачи неоднородной нелинейной вязкоупругости к итерационной последовательности линейных упругих задач для однородного изотропного материала. Исследованы релаксационные процессы, протекающие в элементарной ячейке волокнистого композита при различных уровнях деформации.

*Ключевые слова:* нелинейная вязкоупругость, итерационный метод, волокнистые композиты, метод конечных элементов

## APPLICATION OF ITERATION METHOD FOR SOLVING THE PROBLEM OF DEFORMATION OF UNIDIRECTIONAL COMPOSITES WITH NONLINEAR VISCOELASTIC MATRIX

R.G. Kulikov and N.A. Trufanov

*Perm State Technical University, Perm, Russia*

Some numerical aspects of an iteration method that is based on the idea of “physical immersion” method and applied to nonlinear viscoelastic problems are examined by solving the problem of deformation of the periodic unit cell of a fiber composite with a nonlinear viscoelastic matrix. A numerical solution procedure, suggesting that the initial nonlinear non-homogeneous viscoelastic problem is reduced to an iterative sequence of linear elastic problems for homogeneous isotropic materials, is realized. Relaxation processes, taking place in the elementary cell of a fiber composite at various deformation levels, are examined.

*Key words:* nonlinear viscoelasticity, iteration algorithm, fiber composites, finite element method

### 1. Введение

Волокнистые композиционные материалы на полимерной основе широко применяются в различных областях техники. Использование этих материалов для изготовления элементов конструкций, испытывающих высокие, в том числе длительные нагрузки, предъявляет особые требования к достоверности определения их деформационных свойств, что обуславливает разработку и использование сложных физически нелинейных моделей описания вязкоупругого поведения полимерных связующих.

Экспериментальное подтверждение нелинейности поведения полимерных связующих представлено, например, в работах [1–5]. Так, для эпоксидно-малеинового связующего установлено [1], что линейность вязкоупругих свойств проявляется при напряжениях, меньших  $0,7\sigma_g$  ( $\sigma_g$  — напряжение разрыва образца), а также сделан

вывод о непостоянстве коэффициента Пуассона. В [2] для полимерного связующего ЭДТ-10 обнаружено, что нелинейность вязкоупругих свойств проявляется при уровнях нагружения свыше  $0,4-0,5\sigma_g$ . Аналогичные результаты получены в [3, 4]. Как следствие, большое внимание уделяется разработке моделей нелинейного вязкоупругого поведения материалов (см. работы [6, 7]). Последние широко используются при проведении инженерных расчетов. В работе [8] рассматривается модель прогнозирования деформаций нелинейной ползучести волокнистых однонаправленных композитов при растяжении вдоль направления армирования. В [9] приведены численные данные анализа поведения анизотропных неоднородных нелинейно-вязкоупругих оболочек с учетом поперечного сдвига.

Решение нелинейных краевых задач вязкоупругости для тел сложной пространственной конфигурации при наличии нескольких независимых вязкоупругих операторов сопряжено с существенными математическими трудностями. Анализ существующих подходов позволяет сделать вывод об актуальности разработки эффективных, предполагающих численную реализацию методов решения задач данного класса.

## 2. Математическая постановка задачи и метод решения

Математическая постановка квазистатической краевой задачи нелинейной вязкоупругости включает [10–12]:

– уравнения равновесия

$$\operatorname{div} \hat{\sigma}(\mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{x} \in V, \quad (1)$$

где  $\hat{\sigma}$  — тензор напряжений,  $\mathbf{u}$  — вектор перемещений,  $\mathbf{x}$  — радиус-вектор точки тела,  $V$  — занимаемая телом область пространства;

– линейные соотношения Коши, задающие связь между тензором деформации  $\hat{\varepsilon}$  и вектором перемещений  $\mathbf{u}$

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T), \quad \mathbf{x} \in V, \quad (2)$$

где  $T$  — знак операции транспонирования;

– граничные условия

$$\hat{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{p} \quad \text{для} \quad \mathbf{x} \in S_p, \quad (3)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} \quad \text{для} \quad \mathbf{x} \in S_u, \quad (4)$$

где  $S_p$  и  $S_u$  — части поверхности, на которых заданы поверхностные силы и перемещения,  $\mathbf{n}$  — вектор единичной внешней нормали к поверхности тела,  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{U}$  — заданные векторы поверхностных сил и перемещений;

– уравнения связи между тензорами напряжений и деформаций, которые можно представить в общем виде

$$\hat{\sigma} = \hat{\mathbf{F}}\{\hat{\varepsilon}\}, \quad \mathbf{x} \in V, \quad (5)$$

где  $\hat{\mathbf{F}}$  — некоторый оператор.

Сложность получения решения рассматриваемой задачи может быть обусловлена различными факторами: неоднородностью и анизотропией материала конструкции, нетривиальностью пространственной конфигурации исследуемого тела, наличием нескольких независимых вязкоупругих операторов, а также нелинейностью соотношений (5). Применяемый в [13] итерационный подход, основанный на идее метода «физического погружения» [14–17], позволяет свести решение физически нелинейной вязкоупругой задачи (1)–(5) к решению последовательности более простых задач, сформулированных в рамках теории упругости для тела той же пространственной конфигурации. Согласно [13] обобщенное решение поставленной краевой задачи вязкоупругости отыскивается в результате реализации итерационной последовательности вариационных задач

$$\int_V \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\{\delta \mathbf{u}^k\} \cdot {}^4\hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\{\mathbf{u}^k\} dV = \int_V \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\delta \mathbf{u}^{k-1}) \cdot \left( {}^4\hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}^{k-1}) - \hat{\mathbf{F}}\{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}^{k-1})\} \right) dV + \int_{S_p} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u}^k dS + \int_{S_p} \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u}^k dS, \quad (6)$$

где  $\delta$  — знак вариации;  ${}^4\hat{\mathbf{C}}$  — тензор упругих констант материала «погружения»;  $S_p$  — поверхность тела, на которую действуют внешние поверхностные нагрузки;  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{p}$  — векторы массовых и поверхностных сил.

В соответствии с [14] для гарантии сходимости итерационной процедуры (6) тензор упругих констант  ${}^4\hat{\mathbf{C}}$  материала погружения следует выбирать так, чтобы обеспечивалась положительная определенность функционала

$$\langle \mathbf{F}\{\mathbf{u}\}, \mathbf{u} \rangle_{\Delta} = \int_V \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) \cdot \left( {}^4\hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) - \hat{\mathbf{F}}\{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u})\} \right) dV$$

при положительной определенности функционала  $\int_V \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{F}}\{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u})\} dV$ . В частности, это

достигается следующим выбором  ${}^4\hat{\mathbf{C}}$ :  ${}^4\hat{\mathbf{C}} \equiv \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{F}}\{0\}}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} h(t) \right)_{t=0} \equiv \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{F}}\{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\}}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} h(t) \right)_{t=0, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}=0}$ ,

$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$ , если материал обладает «мягкой» характеристикой [4], то есть

$0 < \frac{\partial \hat{\mathbf{F}}\{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\}}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} \leq \frac{\partial \hat{\mathbf{F}}\{0\}}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ . При соответствующем задании тензора  ${}^4\hat{\mathbf{C}}$  появляется возможность

перехода от решения задачи для изначально анизотропного кусочно-однородного или даже неоднородного вязкоупругого тела к решению последовательности задач, сформулированных для тела изотропного и однородного, что благоприятным образом должно сказаться на эффективности построенных на основе уравнения (6) численных процедур. Примечательностью такого перехода является и то, что оператор левой части соотношения (6) от итерации к итерации остается неизменным.

### 3. Численное прогнозирование релаксационных свойств волокнистых композитов с нелинейно-вязкоупругим связующим

Проблема создания разнопрочных и разномодульных элементов конструкций, в которых нуждается современная техника, обусловила широкое использование

волокнистых полимерных композиционных материалов. Материал связующего, а также некоторых волокон (например, волокон органического происхождения) обладает ярко выраженными вязкоупругими свойствами. Поведение многих полимерных материалов плохо моделируется линейными соотношениями. Поэтому для описания механических свойств композита требуется определить ядра ряда вязкоупругих операторов с учетом нелинейности вязкоупругих характеристик компонентов.

С целью экспериментального установления требуемых характеристик композиционного материала необходимо проведение большого числа длительных и дорогостоящих испытаний образцов. В то же время свойства материалов связующего и волокон по отдельности хорошо изучены, что позволяет найти характеристики композита на основе численного эксперимента.

В данной работе на примере представительного объема осуществляется численное прогнозирование релаксационных свойств волокнистого однонаправленного армированного стеклопластика, включающего элементы двух фаз: волокна и связующего. Предполагается, что цилиндрические волокна расположены относительно друг друга симметрично в соответствии с тетраэдральной схемой укладки. Пространство между волокнами полностью заполнено материалом связующего. Материал стекловолокна полагается упругим и изотропным. Поведение материала эпоксидного связующего подчиняется нелинейным соотношениям главной кубичной теории вязкоупругости [13].

В качестве представительного объема возьмем элементарную ячейку композита (Рис. 1). Ее геометрические параметры определим в соответствии с объемным содержанием компонент в композите и с учетом симметричности схемы укладки волокон. Предположим, что при деформировании ячейки в направлениях, перпендикулярных ориентации волокон, реализуется плоско-деформированное состояние.

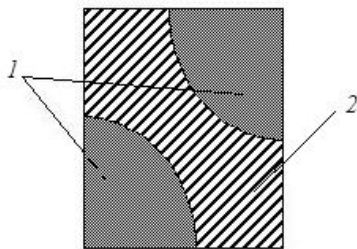


Рис. 1. Ячейка однонаправленного волокнистого композита: 1 – волокно; 2 – связующее

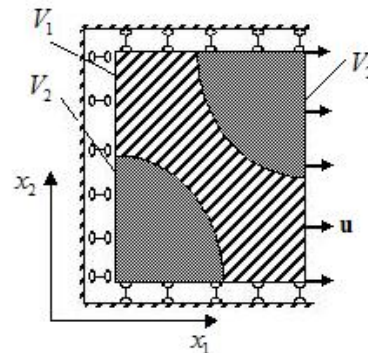


Рис. 2. Расчетная схема

Для обеспечения требуемых условий деформирования и макроскопической однородности нагружения ячейки сформулируем для неё следующие граничные условия (Рис. 2): правая грань смещена вдоль оси  $x_1$  на величину  $u$ , обеспечивающую необходимый уровень средней по ячейке деформации; горизонтальные грани закреплены от смещений по вертикальной оси, а левая грань — от смещений в горизонтальном направлении.

Таким образом, математическая постановка рассматриваемой задачи для представительного объема — ячейки, включает соотношения (1), (2), (4), записанные для случая плоско-деформированного состояния, и определяющие соотношения (5):

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(\mathbf{x}, t) - \sigma(\mathbf{x}, t) \hat{E} &= 2G \hat{e}(\mathbf{x}, \tau) - \int_0^t R_1(t-\tau) \hat{e}(\mathbf{x}, \tau) d\tau - \int_0^t R_2(t-\tau) J_2(\hat{e}(\mathbf{x}, \tau)) \hat{e}(\mathbf{x}, \tau) d\tau, \\ \sigma(\mathbf{x}, t) &= B \theta(\mathbf{x}, t) - \int_0^t R_1^*(t-\tau) \theta(\mathbf{x}, \tau) d\tau - \int_0^t R_2^*(t-\tau) \theta^3(\mathbf{x}, \tau) d\tau, \quad \mathbf{x} \in V_1, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\hat{\sigma} = {}^4\hat{C}_f \cdot \hat{\varepsilon}, \quad \mathbf{x} \in V_2, \quad (8)$$

где  $G, B$  — модули сдвига и объёмного сжатия материала связующего;  $\theta, \sigma$  — средняя деформация и гидростатическое напряжение;  $R_1, R_2, R_1^*, R_2^*$  — ядра вязкоупругих операторов;  $\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \tau)$  — девиатор тензора деформаций;  $J_2(\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \tau))$  — квадратичный инвариант девиатора тензора деформаций;  $\hat{E}$  — единичный тензор;  ${}^4\hat{C}_f$  — тензор четвертого ранга упругих констант изотропного материала стекловолокна:  $\hat{\sigma} = \lambda_f I_1(\hat{\varepsilon}) \hat{E} + 2\mu_f \hat{\varepsilon}$ , где  $\lambda_f, \mu_f$  — модули упругости материала волокна;  $V_1 \cup V_2 = V$ .

При отсутствии объёмных и поверхностных нагрузок обобщенное решение краевой задачи вязкоупругости, согласно выбранному методу, отыскивается в результате реализации итерационной последовательности следующих вариационных задач:

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}^k) \cdot \int_V {}^4\hat{C} \cdot \hat{\varepsilon}(\mathbf{u}^k) dV &= \hat{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}^k) \cdot \int_{V_1} [{}^4\hat{C} \cdot \hat{\varepsilon}(\mathbf{u}^{k-1}) - \mathbf{F}(\hat{\varepsilon}(\mathbf{u}^{k-1}))] dV + \\ &+ \hat{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}^k) \cdot \int_{V_2} [{}^4\hat{C} \cdot \hat{\varepsilon}(\mathbf{u}^{k-1}) - {}^4\hat{C}_f \cdot \hat{\varepsilon}(\mathbf{u}^{k-1})] dV, \end{aligned}$$

где  $\delta$  — знак вариации;  ${}^4\hat{C}$  — тензор упругих констант материала «погружения»;  $k$  — номер итерации.

Свойства материала «погружения» выберем совпадающими со свойствами стекловолокна, упругого и изотропного. В таком случае итерационная схема примет вид:

$$\hat{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}^k) \cdot \int_V {}^4\hat{C} \cdot \hat{\varepsilon}(\mathbf{u}^k) dV = \hat{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}^k) \cdot \int_{V_1} [{}^4\hat{C} \cdot \hat{\varepsilon}(\mathbf{u}^{k-1}) - \mathbf{F}(\hat{\varepsilon}(\mathbf{u}^{k-1}))] dV. \quad (9)$$

#### 4. Конечно-элементная реализация итерационного алгоритма

Рассмотрим использование метода конечных элементов для построения конечномерного аналога краевой задачи при реализации итерационного алгоритма (9). Предположим, что некоторым образом вся область  $V$  разбита на конечные элементы, связанные между собой в узловых точках. В качестве узловых неизвестных выберем перемещения, являющиеся в данной задаче неизвестными функциями времени. В общем случае для произвольного элемента связь вектора перемещений  $\{f(\mathbf{x}, t)\}^T = \{u_1(\mathbf{x}, t), u_2(\mathbf{x}, t)\}$ , имеющего три компоненты, с вектором узловых неизвестных  $\{u^e(t)\}$  можно записать в виде:  $\{f(\mathbf{x}, t)\} = [N^e(\mathbf{x})] \{u^e(t)\}$ , где  $[N^e(\mathbf{x})]$  — матрица функций форм элемента, компоненты которой зависят от координат. Компоненты вектора деформаций  $\{\varepsilon(\mathbf{x}, t)\}^T = \{\varepsilon_{11}(\mathbf{x}, t), \varepsilon_{22}(\mathbf{x}, t), \varepsilon_{12}(\mathbf{x}, t)\}$  вычислим посредством использования соотношений Коши; связь вектора деформаций элемента с вектором узловых неизвестных представим в виде:  $\{\varepsilon(\mathbf{x}, t)\} = [B(\mathbf{x})] \{u^e(t)\}$ , где  $[B(\mathbf{x})]$  — матрица градиентов элемента, компоненты которой в общем случае зависят от координат. Для  $i$ -й компоненты вектора деформаций  $\varepsilon_i(\mathbf{x}, t)$  можем записать

$\varepsilon_i(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^n B_{ik}(\mathbf{x}) u_k^e(t)$ , где  $B_{ik}(\mathbf{x})$ ,  $u_k^e(t)$  обозначают компоненты матрицы градиентов

и вектора узловых перемещений элемента,  $n$  — количество узловых неизвестных в элементе.

Запишем в компонентной форме физические соотношения (7) для обладающего вязкоупругими свойствами эпоксидного связующего:

$$\begin{aligned} s_{ij}(t) &= 2Ge_{ij}(t) - \int_0^t R_1(t-\tau)e_{ij}(\tau)d\tau - \int_0^t R_2(t-\tau)e_{ij}(\tau)e_{kl}(\tau)e_{kl}(\tau)d\tau, \\ \sigma(t) &= B\theta(t) - \int_0^t R_1^*(t-\tau)\theta(\tau)d\tau - \int_0^t R_2^*(t-\tau)\theta^3(\tau)d\tau, \\ \theta &= \varepsilon_{ii}, \quad \sigma = \sigma_{ii}/3. \end{aligned} \quad (10)$$

Для упрощения вводятся следующие гипотезы [18]: развитие деформаций ползучести обуславливается только девиатором напряжений, и шаровой тензор влияет лишь на упругую деформацию; функции влияния  $R_1$  и  $R_2$  одинаковы для линейной и нелинейной составляющих напряжения и не зависят от вида напряженного состояния и величины деформации. С учетом принятых гипотез соотношения (10) преобразуем к виду:

$$\begin{aligned} s_{ij}(t) &= 2G \left( e_{ij}(t) - \int_0^t R(t-\tau)e_{ij}(\tau)d\tau - k \int_0^t R(t-\tau)e_{ij}(\tau)e_{kl}(\tau)e_{kl}(\tau)d\tau \right), \\ \sigma(t) &= B\theta(t). \end{aligned} \quad (11)$$

Для нахождения ядра  $R$  и коэффициента влияния нелинейной составляющей  $k$  воспользуемся экспериментальными данными работы [18], в которой исследована релаксация напряжений в связующем в опытах на сдвиг при различных уровнях деформации. В соответствии с этими данными аппроксимируем ядро суммой экспонент, а величину коэффициента  $k$  находим численно; она составляет  $-125,24$ .

Преобразуем связь между векторами напряжений и деформаций для элементов связующего с учетом соотношений (11):

$$\begin{aligned} \{\sigma(t)\} &= \begin{bmatrix} B + \frac{4}{3}G & B - \frac{2}{3}G & 0 \\ B - \frac{2}{3}G & B + \frac{4}{3}G & 0 \\ 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \{\varepsilon(t)\} - 2G \begin{bmatrix} \mathbf{R}^* & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}^* & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R}^* \end{bmatrix} \{e(t)\} - 2Gk \begin{bmatrix} \mathbf{R}^* & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}^* & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R}^* \end{bmatrix} \times \\ &\times (J_2(\{e(t)\})\{e(t)\}) = [D]\{\varepsilon(t)\} - 2G[\mathbf{R}^*]\{e(t)\} - 2Gk[\mathbf{R}^*](J_2(\{e(t)\})\{e(t)\}), \end{aligned}$$

где через  $\{e(t)\}$  обозначен вектор компонент девиатора тензора деформаций, вычисляемых непосредственно через компоненты вектора деформаций;  $\mathbf{R}^*$  — интегральный оператор.

Представим в матричной форме и физические соотношения для материала волокна (8):  $\{\sigma(\mathbf{x}, t)\} = [C]\{\varepsilon(\mathbf{x}, t)\}$ , где  $[C]$  — симметричная матрица упругих материальных постоянных. Положим, что свойства материала постоянны по объёму конечного элемента, и, следовательно, компоненты матриц  $[\mathbf{R}^*]$  и  $[C]$  не зависят от координат.

С учетом принятых обозначений вариация энергии деформации в объёме тела, характеризующегося жесткостями материала погружения (левая часть уравнения (9)), примет вид

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) \cdot \int_V {}^4\hat{C} \cdot \hat{\varepsilon}(\mathbf{u}) dV = \\ = \sum_e \left\{ \delta u^e(t) \right\}^T \int_{V^e} [B(\mathbf{x})]^T [C] [B(\mathbf{x})] dV \left\{ u^e(t) \right\} = \sum_e \left\{ \delta u^e(t) \right\}^T [k^C] \left\{ u^e(t) \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

и, соответственно, слагаемое в правой части

$$\hat{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) \cdot \int_{V^e} \left[ {}^4\hat{C} \cdot \hat{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathbf{F}(\hat{\varepsilon}(\mathbf{u})) \right] dV = \sum_e \left\{ \delta u^e(t) \right\}^T \left( [k^C] - [\mathbf{k}] \right) \left\{ u^e(t) \right\}, \quad (13)$$

где символ « $\sum_e$ » означает суммирование по всем элементам,  $V^e$  — объём конечного элемента.

Подставив (12) и (13) в (9), получим выражение для вариации полной потенциальной энергии

$$\sum_e \left\{ \delta u^e(t) \right\}^T [k^C] \left\{ u^e(t) \right\}^k = \sum_e \left( \left\{ \delta u^e(t) \right\}^T \left( [k^C] - [\mathbf{k}] \right) \right) \left\{ u^e(t) \right\}^{k-1},$$

которое с учетом произвольности вектора вариации узловых неизвестных можно записать как

$$\sum_e [k^C] \left\{ u^e(t) \right\}^k = \sum_e \left( \left( [k^C] - [\mathbf{k}] \right) \left\{ u^e(t) \right\}^{k-1} \right). \quad (14)$$

После проведения общеизвестной операции формирования глобальной системы для всего ансамбля элементов [19] выражение (14) примет вид:

$$[K^C] \{u(t)\}^k = \left( [K^C] - [\mathbf{K}] \right) \{u(t)\}^{k-1}, \quad (15)$$

где через  $[\mathbf{K}]$ ,  $\{u(t)\}$  обозначены глобальная матрица жесткости рассматриваемой системы и глобальный вектор узловых неизвестных;  $[K^C]$  — глобальная матрица жесткости конструкции, заполненной материалом «погружения». Правая часть выражения (15) содержит слагаемое, значение которого изменяется на каждой итерации. Введём обозначение  $\{F^*\}^{k-1} = \left( [K^C] - [\mathbf{K}] \right) \{u\}^{k-1}$ , назовём вектор  $\{F^*\}$  глобальным вектором фиктивных узловых сил и перепишем выражение (15) в виде:

$$[K^C] \{u\}^k = \{F^*\}^{k-1}. \quad (16)$$

Как видно из (16), решение исходной задачи нелинейной неоднородной вязкоупругости сводится к решению итерационной последовательности задач линейной теории упругости для изотропного однородного материала. На каждой итерации решается система линейных алгебраических уравнений с переменной правой частью,

причем глобальная матрица жесткости  $[K^C]$  остается неизменной в ходе всего решения и формируется только один раз. Вследствие этого при решении системы прямыми методами можно добиться существенного снижения количества операций. Так, например, при решении глобальной системы методом Гаусса прямой ход выполняется один раз, а на каждой итерации требуется выполнение только обратного хода.

В общем случае вид зависимости узловых неизвестных от времени предсказать невозможно, поэтому следует рассмотреть подход пошагового во времени решения поставленной вязкоупругой задачи. Вместо непрерывной области изменения времени введём дискретный набор точек — временную сетку, и таким образом сведём нахождение вектора узловых неизвестных к выполнению на каждом  $i$ -м временном шаге итерационной процедуры (16).

В пределах интервала между узлами временной сетки поведение узловых неизвестных описывается функциями времени конкретного вида. В качестве аппроксимирующей функции выберем степенной полином. В случае использования полиномов первого порядка для  $n$ -й компоненты глобального вектора узловых неизвестных запишем

$$u^n(t) = \tilde{a}_i t + \tilde{b}_i, \quad t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (i = 1, 2, 3 \dots), \quad (17)$$

где  $\tilde{a}_i, \tilde{b}_i$  — коэффициенты полинома, определяемые из условия прохождения функции (17) через точки  $u^n(t_{i-1}), u^n(t_i)$ :

$$\tilde{a}_i = (u^n(t_{i-1}) - u^n(t_i)) / (t_{i-1} - t_i), \quad \tilde{b}_i = u^n(t_i) - \tilde{a}_i t_i.$$

Аналогичным образом аппроксимируются по времени функции деформации элементов.

Глобальный вектор фиктивных узловых сил удобно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$\{F^*\} = \{F_1^*\} + \{F_2^*\}. \quad (18)$$

При этом вектор  $\{F_1^*\}$  учитывает всю историю деформирования до рассматриваемого временного интервала, а вектор  $\{F_2^*\}$  включает историю деформирования только на рассматриваемом временном интервале. На каждом временном шаге в ходе итераций вектор  $\{F_1^*\}$  не меняет своего значения и вычисляется один раз, вектор  $\{F_2^*\}$  переопределяется на каждой итерации. При увеличении числа рассматриваемых временных интервалов основной объём вычислений приходится на формирование вектора  $\{F_1^*\}$ , поэтому использование представления (18) позволяет существенно уменьшить время счета.

В качестве критерия прекращения итераций на каждом временном шаге введём условие выполнения для всех компонент вектора узловых неизвестных на соседних итерациях следующего неравенства:  $\left| (u^k - u^{k-1}) / u_{\max}^k \right| < \delta$ , где  $\delta$  — задаваемая точность,  $u_{\max}^k$  — максимальная по величине компонента вектора узловых неизвестных на  $k$ -й итерации. Величину  $\delta$  примем равной 0,001.

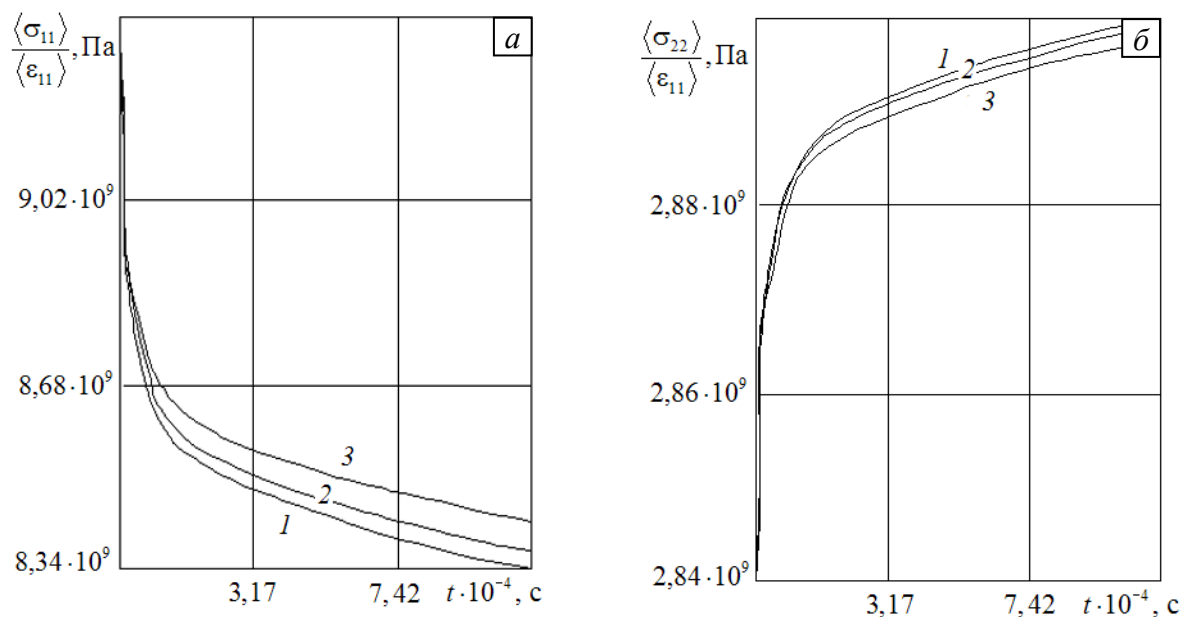


## 5. Результаты численных экспериментов

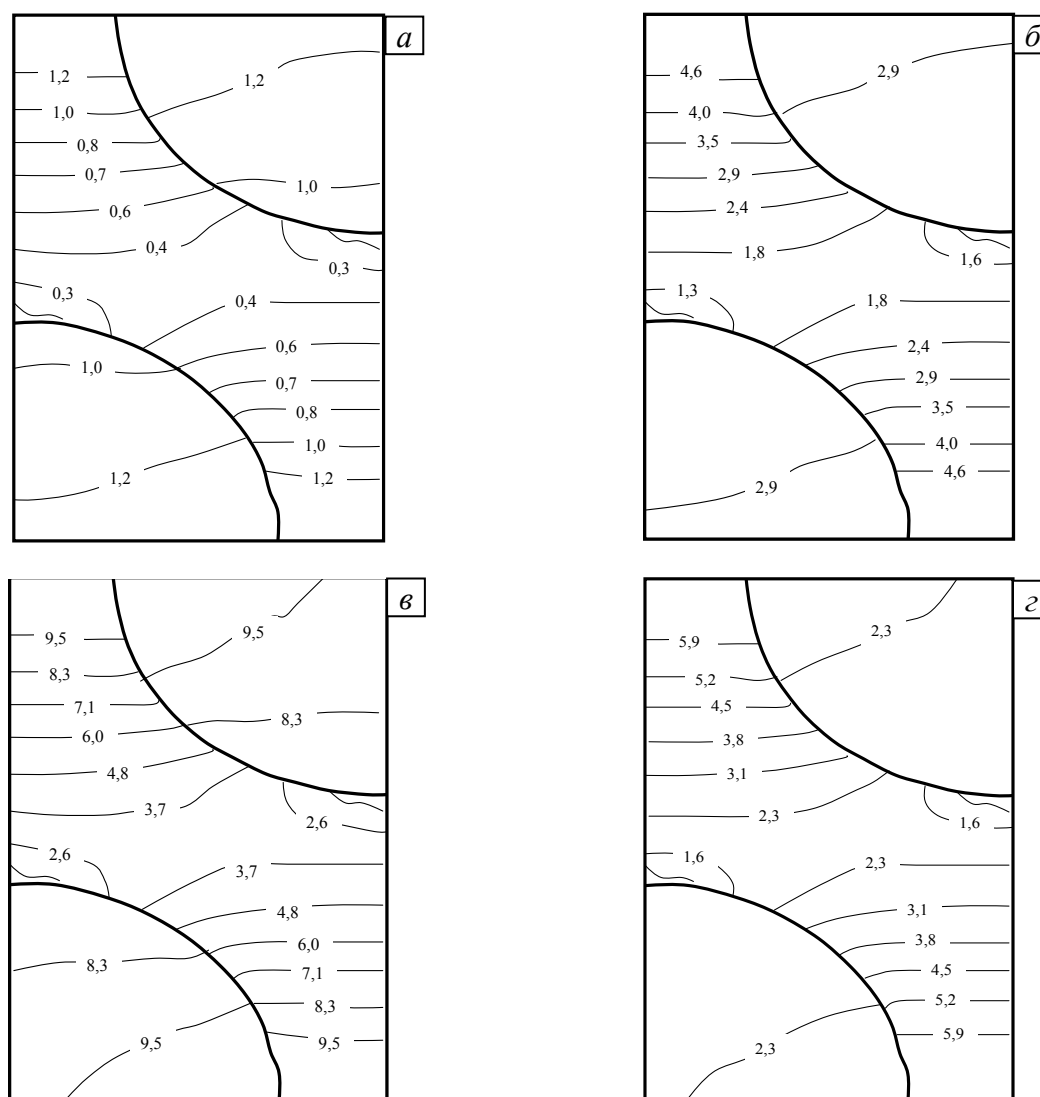
В численных экспериментах исследовались процессы релаксации напряжений в ячейке при различных уровнях деформации. Для дискретизации расчетной области использовался симплекс-элемент с линейной аппроксимацией перемещений. Конечно-элементная реализация метода в данном случае имеет одну особенность, заключающуюся в формировании вектора фиктивных сил с учетом соотношений нелинейной вязкоупругости.

Расчеты выполнялись на сетке, включающей 840 элементов и 912 узловых неизвестных. Объемное содержание волокна составляло 0,47. Диаметр стекловолокна принимался равным  $10^{-6}$  м, модуль упругости — 70 ГПа, коэффициент Пуассона — 0,2. При рассмотрении релаксации на временном интервале 100000 секунд величина временного шага составляла 1000 секунд.

Результаты численных экспериментов представлены на рисунках 3 и 4. На рисунке 3 приведены графики релаксации средних напряжений в ячейке, отнесенных к величине средней деформации. Существенное различие кривых говорит о невозможности описания свойств композита линейными соотношениями вязкоупругости. На рисунке 4 изображены изолинии распределения напряжений  $\sigma_{11} \cdot 10^{-8}$  Па и  $\sigma_{22} \cdot 10^{-7}$  Па при относительной деформации ячейки, равной 0,005, в начальный момент времени  $t = 0$  и в момент времени  $t = 100000$  с. Установлено, что при изменении величины относительной деформации ячейки качественная картина распределения напряжений во времени не меняется.



**Рис. 3.** Релаксация средних напряжений  $\langle \sigma_{11} \rangle$  (а) и  $\langle \sigma_{22} \rangle$  (б) в ячейке, отнесенных к величине средней деформации  $\langle \epsilon_{11} \rangle$ , при различных значениях деформации ячейки  $\epsilon_{11}$ : 0,005 (кривая 1); 0,01 (2); 0,015 (3)



**Рис.4.** Распределение напряжений в ячейке  $\sigma_{11} \cdot 10^{-8}$  Па (а, в) и  $\sigma_{22} \cdot 10^{-7}$  Па (б, г) в начальный момент времени  $t = 0$  (а, б) и в момент  $t = 100000$  с (в, г)

## 6. Заключение

На примере задачи деформирования ячейки периодичности волокнистого композиционного материала с нелинейно вязкоупругим связующим проиллюстрировано использование итерационного метода решения нелинейных задач вязкоупругости [13] применительно к определению релаксационных свойств волокнистых композитов с нелинейно-вязкоупругим связующим.

Реализована численная процедура решения, основанная на сведении исходной задачи неоднородной нелинейной вязкоупругости к итерационной последовательности задач линейной теории упругости для однородного изотропного материала, свойства которого в данном случае были выбраны совпадающими со свойствами волокна. В предложенной схеме построения итерационной процедуры оператор в левой части не меняется от итерации к итерации, поэтому его обращение выполняется однократно, а основные вычислительные затраты приходятся на формирование правых частей.

Релаксационные процессы, протекающие в элементарной ячейке волокнистого композита, исследованы при различных уровнях деформации.

## Литература

1. *Ван Фо Фы Г.А.* Конструкции из армированных пластмасс. – Киев: Техника, 1971. – 220 с.
2. *Максимов Р.Д.* Длительная ползучесть органопластика // *Механика композитных материалов.* – 2001. – № 4. – С. 435-450.
3. *Erickson R.H.* Room temperature creep of Kevlar 49 Epoxy composites // *Composites.* – 1976. – V. 7, № 3. – P. 189-194.
4. *Sturgeon J.B.* Creep of fiber reinforced thermosetting resins // *Creep engineering materials.* – 1978. – P. 175-195.
5. Определение нелинейных вязко-упругих характеристик наполненных полимерных материалов // *Космонавт. и ракетостр.* – 2002. – № 28. – С. 202-214.
6. *Быков Д.Л., Коновалов Д.Н.* Нелинейная эндохронная теория стареющих вязкоупругих материалов // *Изв. РАН. Мех. тверд. тела.* – 2002. – № 4. – С. 63-76.
7. *Победра Б.Е.* Об обобщенной термодинамике в механике композитов. // *Изв. РАН. Мех. тверд. тела.* – 2003. – № 4. – С. 145-156.
8. *Голуб В.П., Кобзарь Ю.М., Фернати П.П.* Нелинейная ползучесть волокнистых однонаправленных композитов при растяжении в направлении армирования // *Прикл. мех.* – 2007. – № 5. – С. 20-34.
9. *Саркисян В.С., Безоян Э.К., Григорян М.Г.* К теории неоднородных анизотропных нелинейно-вязкоупругих тел // *Прикл. пробл. прочн. и пластич.* – 2000. – № 61. – С. 12-17.
10. *Арутюнян Н.Х., Колмановский В.В.* Теория ползучести неоднородных тел. – М.: Наука, 1983. – 336 с.
11. *Бугаков И.И.* Ползучесть полимерных материалов (теория и приложения). – М.: Наука, 1973. – 288 с.
12. *Ильюшин А.А., Победра Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости – М.: Наука, 1970. – 280 с.
13. *Куликов Р.Г., Труфанов Н.А.* Итерационный метод решения квазистатических нелинейных задач вязкоупругости // *Вычисл. мех. сплош. сред.* – 2009. – Т. 2, № 3. – С. 44-56.
14. *Шардаков И.Н., Труфанов Н.А., Матвеев В.П.* Метод геометрического погружения в теории упругости. – Екатеринбург: УрО РАН, 1999. – 298 с.
15. *Светаишков А.А.* Определение эффективных характеристик неоднородных вязкоупругих тел // *Вычислительные технологии.* – 2001. – Т. 6, № 1. – С. 52-64.
16. *Павлов С.М., Светаишков А.А.* Итерационный метод решения задач линейной вязкоупругости // *Известия ВУЗов. Физика.* – 1993. – Т. 36, № 4. – С. 129-137.
17. *Шардаков И.Н.* Теоретические положения метода геометрического погружения для краевых задач упругопластического тела // *Общие задачи и методы исследования пластичности и вязкоупругости материалов и конструкций.* – Свердловск, 1986. – С. 123-127.
18. *Малмейстер А.А., Янсон Ю.О.* Прогнозирование релаксационных свойств эпоксидного связующего ЭД10 при сложном напряженном состоянии // *Механика композиционных материалов.* – 1983. – № 5. – С. 889-894.
19. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.

Поступила в редакцию 18.11.10

---

### Сведения об авторах

*Куликов Роман Георгиевич*, кфмн, доц., Пермский государственный технический университет (ПГТУ), 614990, Пермь, Комсомольский проспект, д.29; E-mail: krg@cpl.pstu.ac.ru

*Труфанов Николай Александрович*, дтн, проф., зав.каф. ПГТУ; E-mail: nat@pstu.ru