УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ СТАТИКИ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

И.В. Киреев[1], Ю.В. Немировский[2]

[1]*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия*
[2]*Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, Новосибирск, Россия*

Предлагается метод построения асимптотических приближений к решению определяющих уравнений линейной теории оболочек вращения, представленных в комплексной гамильтоновой форме. На основе подхода Вазова предложен алгоритм построения симплектических преобразований исходной системы линейных дифференциальных уравнений к каноническому виду. Получены асимптотические разложения решений линейных гамильтоновых систем уравнений статики оболочки вращения.

Ключевые слова: упругость, теория оболочек, гамильтонова система, асимптотический анализ

ASYMPTOTIC INVESTIGATION INTO LINEAR HAMILTONIAN DIFFERENCIAL SYSTEMS OF THE STATICS OF ELASTIC SHELLS OF REVOLUTION

I.V. Kireev[1] and Yu.V. Nemirovskii[2]

[1]*Institute of Computational Modelling SB RAS, Krasnoyarsk, Russia*
[2]*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russia*

We propose a method of constructing the asymptotic approximations to the solution of the governing equations of linear theory of shells of revolution in complex Hamiltonian form. Based on the Wasow approach, an algorithm for constructing symplectic transformations of the original system of linear differential equations in the canonical form is developed. Asymptotic expansions for the solutions of linear Hamiltonian differential systems of the statics of the shell of revolution are constructed.

Key words: elasticity, theory of shells, Hamiltonian system, asymptotic analysis

Исследование замкнутых в окружном направлении оболочек вращения сводится, как показано в [1], к анализу решений краевых задач для гамильтоновых систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Если известна фундаментальная система решений однородной системы, то решение неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений может быть сведено к квадратурам методом неопределённых коэффициентов. Поэтому особое внимание уделяется анализу линейных однородных гамильтоновых систем дифференциальных уравнений.

Аналитическим методам в теории гамильтоновых систем посвящена обширная литература, достаточно полный обзор которой можно найти, например, в работах [2] и [3]. Однако большинство работ ориентировано на нелинейные задачи и использует, как правило, технику канонических преобразований, определяемых через производящие функции, удовлетворяющие уравнению Гамильтона–Якоби. Для линейных задач эта техника, как будет показано в данной работе, может быть значительно упрощена, если использовать методику получения асимптотических разложений решений обыкновенных дифференциальных уравнений, описанную в монографии [4].

1. Линейные гамильтоновы системы обыкновенных дифференциальных уравнений: основные свойства и определения

Рассмотрим однородную гамильтонову систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{C}^{2n}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}, \mathbf{p} \in \mathbb{C}^{n} \tag{1}$$

с гамильтоновой матрицей $\mathbf{H}$: $\mathbf{J}_n\mathbf{H} + \mathbf{H}^*\mathbf{J}_n = \mathbf{0}$. Здесь $\mathbf{J}_n = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{E}_n \\ \mathbf{E}_n & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{uu} & \mathbf{H}_{up} \\ \mathbf{H}_{pu} & \mathbf{H}_{pp} \end{pmatrix}$; $\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{2n}$ — унитарные пространства со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$; «$*$» — операция сопряжения матрицы. Гамильтоновость матрицы $\mathbf{H}$ эквивалентна тому, что её блоки удовлетворяют условиям симметрии: $\mathbf{H}_{pp} = -(\mathbf{H}_{uu})^*$, $\mathbf{H}_{up} = (\mathbf{H}_{up})^*$, $\mathbf{H}_{pu} = (\mathbf{H}_{pu})^*$. Система (1) является условием стационарности функционала Гамильтона $\int \left[\left(\mathbf{J}_n \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \mathbf{x}(t) \right) + \left(-\mathbf{J}_n\mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t) \right) \right] dt$ по вектор-функции $\mathbf{x}(t)$. Отметим, что каждое слагаемое в подынтегральном выражении всегда вещественно; второе слагаемое к тому же называют функцией Гамильтона [2] или гамильтонианом исходной механической системы.

Для собственных чисел и собственных векторов гамильтоновой матрицы справедливы утверждения, являющиеся следствиями известной теоремы Вильямсона (Williamson J., 1936) [2], которые сформулируем в виде теоремы:

Теорема 1. Собственные числа вещественной гамильтоновой матрицы бывают четырёх типов: вещественные пары $\{a, -a\}$, чисто мнимые пары $\{ib, -ib\}$, четвёрки $\{\pm a, \pm ib\}$ и нулевые собственные числа; жордановы клетки, соответствующие двум членам пары или четырем членам четвёрки, имеют одинаковую структуру; если $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ — собственные векторы, отвечающие разным собственным значениям λ_1 и λ_2, причём $\lambda_1 + \overline{\lambda_2} \neq 0$, то скалярное в $\mathbb{C}^{2n}$ произведение $(\mathbf{x}_1, \mathbf{J}_n\mathbf{x}_2) = 0$; если же рассматривать скалярное в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ произведение, то $(\mathbf{x}_1, \mathbf{J}_n\mathbf{x}_2) = 0$ при $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$.

В статье [1] показано, что комплекснозначная гамильтонова система (1) эквивалентна вещественной системе с дополнительной симметрией, и предложена соответствующая процедура овеществления. Поэтому при построении как численных, так и аналитических методов анализа линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений целесообразно ориентироваться не только на гамильтонову, но и на другие случаи симметрии. В результате приходим к следующему определению, являющемуся прямым обобщением определения гамильтоновости системы: квадратная комплекснозначная матрица $\mathbf{G}$ называется $\mathbf{J}$-симметричной, если для неё выполнимо равенство

$$\mathbf{J}\mathbf{G} + \mathbf{G}^*\mathbf{J} = \mathbf{0}, \tag{2}$$

где $\mathbf{J}$ — невырожденная матрица той же размерности, что и $\mathbf{G}$; линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений называется $\mathbf{J}$-симметричной, если её матрица $\mathbf{J}$ симметрична. Ниже, для краткости, $\mathbf{J}$-симметричные матрицы и системы будем называть $\mathbf{J}$-матрицами и $\mathbf{J}$-системами соответственно.

Множество всех $\mathbf{J}$-симметричных матриц $\mathfrak{M}_\mathbf{J}$ является матричной алгеброй Ли [5], которой соответствует матричная группа Ли $\mathfrak{I}_\mathbf{J}$. Для любого элемента $\mathbf{T}$ группы $\mathfrak{I}_\mathbf{J}$ должны выполняться равенства:

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{T}^*\mathbf{J}, \qquad \det(\mathbf{T}) = 1. \tag{3}$$

Это эквивалентно тому, что при преобразовании пространства $\mathbb{C}^m$ элементами группы $\mathfrak{I}_\mathbf{J}$ значения квадратичной формы с матрицей $\mathbf{J}$ не изменяются. В случае, когда $\mathfrak{M}_\mathbf{J}$ совпадает с алгеброй гамильтоновых матриц, группа Ли $\mathfrak{I}_\mathbf{J}$ является симплектической, элементы которой есть симплектические матрицы. Матрица $\mathbf{S}$ порядка $2n\times 2n$ называется симплектической [1], если она удовлетворяет соотношениям $\mathbf{S}^{-1} = -\mathbf{J}_n\mathbf{S}^*\mathbf{J}_n$, $\det(\mathbf{S}) = 1$. Целесообразность сделанных определений подтверждается следующим утверждением:

Лемма 1. Если на отрезке $[t_l, t_r]$ для $\mathbf{J}$-симметричной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \mathbf{G}(t)\mathbf{z}(t), \qquad \mathbf{z}\in\mathbb{C}^m \tag{4}$$

существует фундаментальная матрица решений $\mathbf{Z}(t)$, то она принадлежит группе $\mathfrak{I}_\mathbf{J}$.

Доказательство. Покажем, что матричная функция $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Z}^*(t)\mathbf{J}\,\mathbf{Z}(t)$ тождественно равна $\mathbf{J}$. Поскольку $\mathbf{Z}(t)$ — фундаментальное решение системы (4) на отрезке $[t_l, t_r]$, то найдётся такая точка $t_0\in[t_l, t_r]$, что $\mathbf{Z}(t_0) = \mathbf{E}_m$, и тогда $\mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{J}$. Кроме того, $\frac{d}{dt}\mathbf{Z}(t) = \mathbf{G}(t)\mathbf{Z}(t)$ и $\frac{d}{dt}\mathbf{Z}^*(t) = \mathbf{Z}^*(t)\mathbf{G}^*(t)$. Поэтому, в силу $\mathbf{J}$-симметричности матрицы $\mathbf{G}$, $\frac{d}{dt}\mathbf{Y}(t) = \frac{d}{dt}\left[\mathbf{Z}^*(t)\right]\mathbf{J}\,\mathbf{Z}(t) + \mathbf{Z}^*(t)\frac{d}{dt}\left[\mathbf{J}\,\mathbf{Z}(t)\right] = \mathbf{Z}^*\mathbf{G}^*(t)\mathbf{J}\mathbf{Z} + \mathbf{Z}^*\mathbf{J}\mathbf{G}(t)\mathbf{Z} =$ $= \mathbf{Z}^*\left[\mathbf{G}^*(t)\mathbf{J} + \mathbf{J}\mathbf{G}(t)\right]\mathbf{Z} \equiv \mathbf{0}$, то есть $\mathbf{Y}(t)\equiv\mathbf{J}$ на отрезке $[t_l, t_r]$, что и доказывает лемму.

Традиционное упрощение [3] исходной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (4) заключается в переходе от неё посредством линейного преобразования

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{y}(t), \qquad \mathbf{z}, \mathbf{y}\in\mathbb{C}^m \tag{5}$$

к системе

$$\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{F}(t)\mathbf{y}(t), \qquad \mathbf{y}\in\mathbb{C}^m, \tag{6}$$

матрица которой

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{T}^{-1}(t)\left[\mathbf{G}(t)\mathbf{T}(t) - \frac{d}{dt}\mathbf{T}(t)\right] \tag{7}$$

имеет блочно-диагональную структуру $\mathbf{F} = \begin{pmatrix}\mathbf{F}_{11} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{22}\end{pmatrix}$. При этом желательно, чтобы преобразованная система (6) сохраняла основные свойства, которыми обладает исходная линейная система уравнений (1); подобные процедуры называют процессами нормализации. В этой связи является полезной следующая лемма:

Лемма 2. Преобразование (5) при $\mathbf{T}(t) \in \mathfrak{I}_{\mathbf{J}}$ переводит $\mathbf{J}$-систему (4) в $\mathbf{J}$-симметричную систему (6).

Доказательство. Соотношение (7) получается после подстановки (5) в уравнение (4) с последующим разрешением его относительно производной $\dot{\mathbf{y}}(t)$. Для доказательства $\mathbf{J}$-симметричности матрицы $\mathbf{F}(t)$ достаточно показать, что таковыми являются матрицы $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{GT}$ и $\mathbf{T}\dot{\mathbf{T}}$. В силу (2) и (3) имеем: $\mathbf{J}\left(\mathbf{T}^{-1}\dot{\mathbf{T}}\right)+\left(\mathbf{T}^{-1}\dot{\mathbf{T}}\right)^{*}\mathbf{J}=$ $=\mathbf{T}^{*}\mathbf{J}\dot{\mathbf{T}}+\mathbf{T}^{*}\mathbf{J}\mathbf{T}=\dfrac{d}{dt}\left(\mathbf{T}^{*}\mathbf{J}\mathbf{T}\right)\equiv\mathbf{0}$ и $\mathbf{J}\left(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{GT}\right)+\left(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{GT}\right)^{*}\mathbf{J}=\mathbf{T}^{*}\left(\mathbf{JG}+\mathbf{G}^{*}\mathbf{J}\right)\mathbf{T}\equiv\mathbf{0}$.

Из этой леммы следует, что при построении матрицы преобразования $\mathbf{T}(t)$ можно ограничиться только элементами группы $\mathfrak{I}_{\mathbf{J}}$. Например, в силу леммы 1, $\mathbf{T}(t)$ можно представить в виде экспоненты некоторой матрицы из алгебры $\mathfrak{M}_{\mathbf{J}}$ [5], так что задача определения $\mathbf{T}(t)$ будет сведена к поиску такой $\mathbf{J}$-матрицы, экспонента которой обеспечивает переход от системы (4) к системе (6). К сожалению, в этом случае придётся иметь дело с трансцендентными матричными соотношениями. Поэтому ниже используется предложенное в середине прошлого века английским математиком Кэли (Ceyly) представление матриц из группы $\mathfrak{I}_{\mathbf{J}}$ матрицами алгебры $\mathfrak{M}_{\mathbf{J}}$, приводящее к алгебраическим матричным уравнениям.

Будем предполагать, что алгебра $\mathbf{J}$-матриц $\mathfrak{M}_{\mathbf{J}}$ разлагается в прямую сумму

$$\mathfrak{M}_{\mathbf{J}}=\mathfrak{M}_{\mathbf{J}}^{d}\oplus\mathfrak{M}_{\mathbf{J}}^{c}, \tag{8}$$

где $\mathfrak{M}_{\mathbf{J}}^{d}$ — подалгебра блочно-диагональных $\mathbf{J}$-матриц $\mathbf{G}^{d}=\begin{pmatrix}\mathbf{G}_{11} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{22}\end{pmatrix}$, а $\mathfrak{M}_{\mathbf{J}}^{c}$ — подпространство $\mathbf{J}$-матриц вида $\mathbf{G}^{c}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{G}_{12}\\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$. Это разложение порождено блочно-диагональным видом матрицы $\mathbf{F}(t)$; все матрицы с индексами «11» и «22» имеют размерность $m_1\times m_1$ и $m_2\times m_2$ соответственно; блоки с индексами «12» и «21» имеют размерность $m_1\times m_2$ и $m_2\times m_1$: $m_1+m_2=m.$ В таком случае матрицу $\mathbf{T}(t)$ целесообразно искать как образ $\mathbf{J}$-симметричной матрицы $\mathbf{C}(t)\in\mathfrak{M}_{\mathbf{J}}^{c}$ при преобразовании Кэли [5]

$$\mathbf{T}(t)=\frac{\mathbf{E}_m+\mathbf{C}(t)}{\mathbf{E}_m-\mathbf{C}(t)},\quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{C}_{12}\\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{0}\end{pmatrix}. \tag{9}$$

Блочная структура матрицы $\mathbf{C}(t)$ выбрана специальным образом, по аналогии с подобными построениями из монографии [4]; предполагается, что все сингулярные числа [6] блоков $\mathbf{C}_{12}$ и $\mathbf{C}_{21}$ меньше единицы. Покажем, что тогда матрица $\mathbf{T}(t)$ принадлежит группе $\mathfrak{I}_{\mathbf{J}}$, то есть выполняется равенство (3). Имеем: $\mathbf{J}^{-1}\,\mathbf{T}^{*}(t)\,\mathbf{J}=\mathbf{J}^{-1}\left[\mathbf{E}_m-\mathbf{C}^{*}(t)\right]^{-1}\left[\mathbf{E}_m+\mathbf{C}(t)^{*}\right]\mathbf{J}=\mathbf{J}^{-1}\left[\mathbf{E}_m+\mathbf{J}\,\mathbf{C}(t)\,\mathbf{J}^{-1}\right]^{-1}\left[\mathbf{E}_m-\mathbf{J}\,\mathbf{C}(t)\,\mathbf{J}^{-1}\right]\mathbf{J}=$ $=\left[\mathbf{E}_m+\mathbf{C}(t)\right]^{-1}\cdot\left[\mathbf{E}_m-\mathbf{C}(t)\right]=\mathbf{T}^{-1}(t).$ Считаем, что матрицы $\mathbf{G}(t)$ и $\mathbf{T}(t)$ обладают блочной структурой того же типа, что и матрицы $\mathbf{F}(t)$ и $\mathbf{C}(t)$:

$$\mathbf{G}=\begin{pmatrix}\mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12}\\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22}\end{pmatrix}=\mathbf{G}^{d}+\mathbf{G}^{c},\quad \mathbf{T}=\begin{pmatrix}\mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12}\\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22}\end{pmatrix}. \tag{10}$$

Из (9) после несложных выкладок получаем:

$$\begin{gathered}\mathbf{T}_{11}(t)=\left[\mathbf{E}_{m_1}+\mathbf{C}_{12}(t)\mathbf{C}_{21}(t)\right]\left[\mathbf{E}_{m_1}-\mathbf{C}_{12}(t)\mathbf{C}_{21}(t)\right]^{-1},\\ \mathbf{T}_{12}(t)=2\mathbf{C}_{12}(t)\left[\mathbf{E}_{m_2}-\mathbf{C}_{21}(t)\mathbf{C}_{12}(t)\right]^{-1},\quad \mathbf{T}_{21}(t)=2\mathbf{C}_{21}(t)\left[\mathbf{E}_{m_1}-\mathbf{C}_{12}(t)\mathbf{C}_{21}(t)\right]^{-1},\\ \mathbf{T}_{22}(t)=\left[\mathbf{E}_{m_2}+\mathbf{C}_{21}(t)\mathbf{C}_{12}(t)\right]\left[\mathbf{E}_{m_2}-\mathbf{C}_{21}(t)\mathbf{C}_{12}(t)\right]^{-1}.\end{gathered} \tag{11}$$

В силу сделанных выше допущений о спектрах матриц $\mathbf{C}_{12}$ и $\mathbf{C}_{21}$ диагональные блоки $\mathbf{T}_{11}$ и $\mathbf{T}_{22}$ матрицы $\mathbf{T}$ обратимы. Поэтому матричное соотношение (7), после некоторых алгебраических преобразований, распадается на две группы:

$$\mathbf{F}_{11}=-\mathbf{T}_{11}^{-1}\dot{\mathbf{T}}_{11}+\mathbf{T}_{11}^{-1}\mathbf{G}_{11}\mathbf{T}_{11}+\mathbf{T}_{11}^{-1}\mathbf{G}_{12}\mathbf{T}_{21},\qquad \mathbf{F}_{22}=-\mathbf{T}_{22}^{-1}\dot{\mathbf{T}}_{22}+\mathbf{T}_{22}^{-1}\mathbf{G}_{22}\mathbf{T}_{22}+\mathbf{T}_{22}^{-1}\mathbf{G}_{21}\mathbf{T}_{12}, \tag{12}$$

$$\dot{\mathbf{X}}_{12}=\mathbf{G}_{12}+\mathbf{G}_{11}\mathbf{X}_{12}-\mathbf{X}_{12}\mathbf{G}_{22}-\mathbf{X}_{12}\mathbf{G}_{21}\mathbf{X}_{12},\quad \dot{\mathbf{X}}_{21}=\mathbf{G}_{21}+\mathbf{G}_{22}\mathbf{X}_{21}-\mathbf{X}_{21}\mathbf{G}_{11}-\mathbf{X}_{21}\mathbf{G}_{12}\mathbf{X}_{21}, \tag{13}$$

где матрицы $\mathbf{X}_{12}$ и $\mathbf{X}_{21}$ следующим образом связаны с матрицей $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{T}_{12}=\mathbf{X}_{12}\mathbf{T}_{22},\qquad \mathbf{T}_{21}=\mathbf{X}_{21}\mathbf{T}_{11}. \tag{14}$$

Учитывая равенства (11), в последних соотношениях переходим от блоков матрицы $\mathbf{T}$ к блокам матрицы $\mathbf{C}$:

$$2\mathbf{C}_{12}(t)=\mathbf{X}_{12}(t)\left[\mathbf{E}_{m_2}-\mathbf{C}_{21}(t)\mathbf{C}_{12}(t)\right],\quad 2\mathbf{C}_{21}(t)=\left[\mathbf{E}_{m_2}-\mathbf{C}_{21}(t)\mathbf{C}_{12}(t)\right]\mathbf{X}_{21}(t). \tag{15}$$

При условии, что матрицы $\mathbf{X}_{12}$ и $\mathbf{X}_{21}$ известны, выражения (15) рассматриваем как систему матричных уравнений относительно блоков $\mathbf{C}_{12}$ и $\mathbf{C}_{21}$. Если все сингулярные числа матриц $\mathbf{X}_{12}$ и $\mathbf{X}_{21}$ меньше единицы, то можно показать [6], что эта система имеет решения. Одно из них можно представить в виде:

$$\mathbf{C}_{12}(t)=\mathbf{X}_{12}(t)\left[\mathbf{E}_{m_2}+\mathbf{X}_{22}(t)\right]^{-1},\quad \mathbf{C}_{21}(t)=\left[\mathbf{E}_{m_2}+\mathbf{X}_{22}(t)\right]^{-1}\mathbf{X}_{21}(t), \tag{16}$$

где

$$\mathbf{X}_{22}(t)=\sqrt{\mathbf{E}_{m_2}-\mathbf{X}_{21}(t)\mathbf{X}_{12}(t)}\,. \tag{17}$$

Здесь выражение $\sqrt{\mathbf{E}_m-\mathbf{X}}$ обозначает сходящийся степенной ряд $\sqrt{\mathbf{E}_m-\mathbf{X}}=$ $=\mathbf{E}_m-\frac{1}{2}\mathbf{X}-\frac{1}{8}\mathbf{X}^2-\ldots-\frac{(2k-3)!!}{2^k k!}\mathbf{X}^k-\ldots,$ коэффициенты которого совпадают с коэффициентами разложения в ряд Маклорена производящей функции — арифметической ветви квадратного корня $\sqrt{1-x}$. Такой выбор производящей функции гарантирует невырожденность матриц $\mathbf{E}_{m_1}+\mathbf{X}_{11}(t)$ и $\mathbf{E}_{m_2}+\mathbf{X}_{22}(t)$, поскольку при сделанных предположениях о спектрах матриц $\mathbf{X}_{12}$ и $\mathbf{X}_{21}$ все собственные числа блоков $\mathbf{X}_{11}(t)$ и $\mathbf{X}_{22}(t)$ имеют положительные действительные части. Подставляя (16) в (11), получаем выражение матриц $\mathbf{T}_{11}(t)$ и $\mathbf{T}_{22}(t)$ через матрицы $\mathbf{X}_{12}(t)$ и $\mathbf{X}_{21}(t)$:

$$\mathbf{T}_{11}(t)=\left[\mathbf{X}_{11}(t)\right]^{-1},\quad \mathbf{T}_{22}(t)=\left[\mathbf{X}_{22}(t)\right]^{-1}, \tag{18}$$

где $\mathbf{X}_{11}(t)=\sqrt{\mathbf{E}_{m_1}-\mathbf{X}_{12}(t)\mathbf{X}_{21}(t)}$, которые, совместно с (14), дают представление матрицы $\mathbf{T}(t)$ через решения $\mathbf{X}_{12}(t)$ и $\mathbf{X}_{21}(t)$ уравнений (13). В результате приходим к утверждению:

Теорема 2. Пусть $\mathbf{X}_{12}(t)$ и $\mathbf{X}_{21}(t)$ — решения системы (13) на отрезке $[t_l,\, t_r]$ такие, что все их сингулярные числа меньше единицы. Тогда матрица $\mathbf{T}(t)$, определяемая соотношениями (14), (17) и (18), порождает преобразование (5), переводящее систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (4) в систему (6) с блочно-диагональной матрицей $\mathbf{F}(t)$ (12). В случае, если исходная система является $\mathbf{J}$-симметричной и для алгебры $\mathfrak{M}_{\mathbf{J}}$ имеет место разложение (8), то $\mathbf{J}$-симметричной является и преобразованная система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, если только хотя бы в одной из точек промежутка $[t_l,\, t_r]$ матрица $\mathbf{T}(t)$ принадлежит группе $\mathfrak{I}_{\mathbf{J}}$ (в этом случае $\mathbf{T}(t)$ принадлежит группе $\mathfrak{I}_{\mathbf{J}}$ на всём промежутке).

Доказательство. По существу, это утверждение доказано выше. Осталось доказать лишь, что при сделанных предположениях преобразование $\mathbf{T}(t)$ принадлежит группе $\mathfrak{I}_{\mathbf{J}}$. Для этого, в силу определения преобразования Кэли, достаточно показать, что матрица $\mathbf{C}$ из (9) является $\mathbf{J}$-симметричной. Но согласно (15) матрица $\mathbf{C}$ порождает матрицу $\mathbf{X}$: $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{X}_{12}\\ \mathbf{X}_{21} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$, $\mathbf{X}=2\left(\mathbf{E}_m-\mathbf{C}^2\right)^{-1}\mathbf{C}$; второе из этих соотношений — матричный аналог зависимостей (15) между блоками $\mathbf{C}$ и $\mathbf{X}$. Покажем, что $\mathbf{J}$-симметричность матрицы $\mathbf{C}$ эквивалентна $\mathbf{J}$-симметричности $\mathbf{X}$.

Действительно, из условия теоремы следует, что матрица $\mathbf{E}_m-\mathbf{C}^2$ обратима и потому $\mathbf{X}$ может быть представлена в виде сходящегося ряда $\mathbf{X}=2\left(\mathbf{C}+\mathbf{C}^3+\mathbf{C}^5+\cdots+\mathbf{C}^{2k+1}+\cdots\right)$. В силу $\mathbf{J}$-симметричности матрицы $\mathbf{C}$ имеем $\mathbf{J}^{-1}\left(\mathbf{C}^*\right)^{2k+1}\mathbf{J}=\mathbf{J}^{-1}\left(\mathbf{C}^*\right)^{2k}\mathbf{J}\,\mathbf{J}^{-1}\left(\mathbf{C}^*\right)\mathbf{J}= \;=-\mathbf{J}^{-1}\left(\mathbf{C}^*\right)^{2k}\mathbf{J}\,\mathbf{C}=\cdots=-\mathbf{C}^{2k+1}$. Поэтому $\mathbf{X}+\mathbf{J}^{-1}\mathbf{X}^*\mathbf{J}=\mathbf{0}$, то есть, если $\mathbf{C}$ есть $\mathbf{J}$-матрица, то таковой будет и матрица $\mathbf{X}$. Обратное утверждение доказывается аналогично на основе связи $\mathbf{C}=\left(\mathbf{E}_m+\sqrt{\mathbf{E}_m-\mathbf{X}^2}\right)^{-1}\mathbf{X}$, вытекающей из (16).

И для завершения доказательства теоремы покажем, что введённая в (13), (14) матрица $\mathbf{X}$ является $\mathbf{J}$-матрицей. Поскольку её блоки удовлетворяют системе матричных дифференциальных уравнений (13), которые можно представить в виде

$$\dot{\mathbf{X}}(t)=\mathbf{G}^c(t)+\mathbf{G}^d(t)\mathbf{X}(t)-\mathbf{X}(t)\mathbf{G}^d(t)-\mathbf{X}(t)\mathbf{G}^c(t)\mathbf{X}(t), \tag{19}$$

то из $\mathbf{J}$-симметричности матрицы $\mathbf{G}$ и уравнения (19) следует, что матрица $\mathbf{Y}(t)=\mathbf{X}(t)+\mathbf{J}^{-1}\mathbf{X}^*(t)\mathbf{J}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Риккати

$$\dot{\mathbf{Y}}(t)=\left(\mathbf{G}^d-\mathbf{X}\mathbf{G}^d\right)\mathbf{Y}-\mathbf{Y}\left(\mathbf{G}^d+\mathbf{G}^d\mathbf{X}\right)+\mathbf{Y}\mathbf{G}^c\mathbf{Y}. \tag{20}$$

Задача Коши для системы (20) имеет единственное решение [4], вследствие этого выполнение равенства $\mathbf{Y}=\mathbf{0}$ хотя бы в одной точке отрезка $[t_l,\, t_r]$ означает, что $\mathbf{Y}(t)\equiv\mathbf{0}$ на всём промежутке. Теорема доказана.

Непосредственное применение этой теоремы при исследовании гамильтоновых систем позволяет перейти от исходной системы (1) лишь к системам вида $\dfrac{d\mathbf{y}(t)}{dt}=\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & -\mathbf{A}^*\end{pmatrix}\mathbf{y}(t),$ где $\mathbf{A}(t)$ — некоторая квадратная матрица порядка n. Это связано с тем, что алгебра $\mathfrak{M}_{\mathbf{J}_n}$ не содержит подалгебр блочно-диагональных матриц иной, отличной от приведённой, блочной структуры. Поэтому, если гамильтонову систему (1) требуется свести к двум гамильтоновым системам меньших размерностей n_1 и n_2, $n_1+n_2=n$, то необходимо сделать промежуточное преобразование

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{B}_{n_1n_2}\mathbf{z}(t)\,,\qquad \mathbf{B}_{n_1,n_2}=\begin{pmatrix}\mathbf{E}_{n_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E}_{n_2} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{n_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E}_{n_2}\end{pmatrix}. \tag{21}$$

В результате приходим к $\mathbf{J}_{n_1,n_2}$-системе (4), где $\mathbf{J}_{n_1,n_2}=\begin{pmatrix}\mathbf{J}_{n_1} & \mathbf{0}\\ 0 & \mathbf{J}_{n_2}\end{pmatrix}$. Легко показать, что возникающая алгебра $\mathfrak{M}_{\mathbf{J}_{n_1,n_2}}$, изоморфная алгебре гамильтоновых матриц, будет содержать подалгебру блочно-диагональных матриц, блоки которых являются гамильтоновыми. При этом, если $\mathbf{G}\in\mathfrak{M}_{\mathbf{J}_{n_1,n_2}}$, то для блочного представления (10) матрицы $\mathbf{G}$ имеем: $\mathbf{J}_{n_1}\mathbf{G}_{11}+\mathbf{G}_{11}^*\mathbf{J}_{n_1}=\mathbf{0}$, $\mathbf{J}_{n_1}\mathbf{G}_{12}+\mathbf{G}_{21}^*\mathbf{J}_{n_2}=\mathbf{0}$, $\mathbf{J}_{n_2}\mathbf{G}_{21}+\mathbf{G}_{12}^*\mathbf{J}_{n_1}=\mathbf{0}$, $\mathbf{J}_{n_2}\mathbf{G}_{22}+\mathbf{G}_{22}^*\mathbf{J}_{n_2}=0$. Это означает, что в рассматриваемом случае для решения задачи нормализации достаточно определить из уравнений (13) только одну из матриц, $\mathbf{X}_{12}$ или $\mathbf{X}_{21}$, поскольку $\mathbf{X}_{12}=\mathbf{J}_{n_1}\mathbf{X}_{21}^*\mathbf{J}_{n_2}$. Доказательство этого факта почти дословно повторяет доказательство $\mathbf{J}$-симметричности матрицы $\mathbf{X}$ (см. теорему 2).

В заключение раздела приведём основные выражения, согласно которым осуществляется преобразование нормализации для $\mathbf{J}$-систем:

$$\begin{gathered}
\frac{d\mathbf{z}}{dt}=\mathbf{G}(t)\mathbf{z}\,,\qquad \mathbf{z}=\mathbf{T}(t)\mathbf{y}\,;\qquad \frac{d\mathbf{y}}{dt}=\mathbf{F}(t)\mathbf{y}\qquad \mathbf{z},\mathbf{y}\in\mathbb{C}^m\,;\\
\mathbf{G}=\begin{pmatrix}\mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12}\\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22}\end{pmatrix},\qquad \mathbf{T}=\begin{pmatrix}\mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12}\\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22}\end{pmatrix},\qquad \mathbf{F}=\begin{pmatrix}\mathbf{F}_{11} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{22}\end{pmatrix},\\
\dot{\mathbf{X}}_{\alpha\beta}=\mathbf{G}_{\alpha\beta}+\mathbf{G}_{\alpha\alpha}\mathbf{X}_{\alpha\beta}-\mathbf{X}_{\alpha\beta}\mathbf{G}_{\beta\beta}-\mathbf{X}_{\alpha\beta}\mathbf{G}_{\beta\alpha}\mathbf{X}_{\alpha\beta},\\
\mathbf{T}_{\alpha\alpha}=\left(\mathbf{E}_{m_\alpha}-\mathbf{X}_{\alpha\beta}\mathbf{X}_{\beta\alpha}\right)^{-1/2},\qquad \mathbf{T}_{\alpha\beta}=\mathbf{X}_{\alpha\beta}\mathbf{T}_{\beta\beta}=\mathbf{T}_{\alpha\alpha}X_{\alpha\beta},\\
\mathbf{F}_{\alpha\alpha}=\mathbf{T}_{\alpha\alpha}^{-1}\left(\mathbf{G}_{\alpha\alpha}\mathbf{T}_{\alpha\alpha}+\mathbf{G}_{\alpha\beta}\mathbf{T}_{\beta\alpha}-\dot{\mathbf{T}}_{\alpha\alpha}\right),\ \left(\alpha,\,\beta=1,\,2,\quad \alpha\neq\beta\right).
\end{gathered}\tag{22}$$

Здесь не показана связь (16) блоков $\mathbf{C}_{\alpha\beta}$ и $\mathbf{X}_{\alpha\beta}$ между собой, поскольку в окончательных соотношениях преобразование Кэли явно не используется.

2. Асимптотические разложения решения задачи нормализации линейных $\mathbf{J}$-симметричных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Непосредственное использование теоремы 2 для анализа $\mathbf{J}$-систем приводит, вообще говоря, к задаче более сложной чем исходная, поскольку возникает проблема интегрирования нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка. Однако, если анализируемая линейная $\mathbf{J}$-система обладает некоторыми особенностями, то удаётся построить сравнительно простые соотношения, дающие хорошее приближение к решению задачи нормализации [4].

Пусть, например, коэффициенты уравнений линейной $\mathbf{J}$-системы зависят от некоторого малого параметра ε, причём эта зависимость имеет по ε лишь особенности типа полюса. Таковыми являются полученные в [1] уравнения статики замкнутых в окружном направлении оболочек вращения, где в качестве малого параметра ε выступает толщина оболочки. Иными словами, будем рассматривать дифференциальную $\mathbf{J}$-систему вида

$$\varepsilon^k \frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \mathbf{G}(t,\varepsilon)\,\mathbf{z}(t), \qquad \mathbf{z} \in \mathbb{C}^m \,, \tag{23}$$

где $k > 0$ — целое число. Следуя [4], считаем, что функция $\mathbf{G}(t,\varepsilon)$ допускает аналитическое продолжение по переменным t и ε на некоторые области комплексных плоскостей t и ε. Для асимптотического анализа по малому параметру $\mathbf{J}$-симметричных систем такого типа полезна следующая теорема, аналогичная теореме 26.2 из [4]:

Теорема 3. Пусть $\mathbf{G}(t,\varepsilon) \in \mathfrak{M}_{\mathbf{J}}$ — матричная функция, аналитическая по совокупности переменных t, ε при $|t| \le t_*$ и ε из некоторого сектора Σ_* в плоскости ε, причём $|\varepsilon| \le \varepsilon_*$ (здесь t_*, ε_* — положительные вещественные числа), обладает асимптотическим разложением вида

$$\mathbf{G}(t,\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{G}_j(t)\varepsilon^j, \tag{24}$$

равномерным по t при $|t| \le t_*$, $\mathbf{G}_0(t) \in \mathfrak{M}_{\mathbf{J}}^d$ и ни одно собственное значение диагонального блока $\mathbf{G}_{011}(t)$ матрицы $\mathbf{G}_0(t)$ в представлении $\mathbf{G}_0(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{011}(t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{022}(t) \end{pmatrix}$ не совпадает ни с одним собственным значением блока $\mathbf{G}_{022}(t)$. Предположим, что преобразование

$$\mathbf{G} \;\to\; \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G}^c\,\mathbf{J} \tag{25}$$

пространства $\mathfrak{M}_{\mathbf{J}}$ — множества всех квадратных $\mathbf{J}$-матриц порядка m, переводит в себя $\mathfrak{M}_{\mathbf{J}}^c$ — подпространство всех квадратных $\mathbf{J}$-матриц порядка m, имеющих вид $\mathbf{G}^c = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, где $\mathbf{G}_{ij}$ — прямоугольные матрицы $m_i \times m_j$, $m_1 + m_2 = m$. Тогда существует матричная функция $\mathbf{T}(t,\varepsilon) \in \mathfrak{I}_{\mathbf{J}}$, аналитичная по совокупности переменных в некоторой подобласти области аналитичности функции $\mathbf{G}(t,\varepsilon)$, имеющая в секторе $\Sigma_{**} \subseteq \Sigma_*$ асимптотическое при $\varepsilon \to 0$ разложение $\mathbf{T}(t,\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{T}_j(t)\varepsilon^j$, $\mathbf{T}_0(t) \equiv \mathbf{E}_m$,

$|t| \le t_{**} \le t_*$, равномерное по t, и такая, что преобразование $\mathbf{z}(t) = \mathbf{T}(t,\varepsilon)\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{z}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^m$ приводит дифференциальное уравнение (23) к виду:

$$\varepsilon^k \frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{F}(t,\varepsilon)\mathbf{y}(t). \tag{26}$$

Здесь матрица $\mathbf{F}(t,\varepsilon) \in \mathfrak{M}_{\mathbf{J}}^d$ разлагается в секторе Σ_{**} в асимптотический ряд по степеням ε: $\mathbf{F}(t,\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{F}_j(t)\varepsilon^j$, $\mathbf{F}_0(t) \equiv \mathbf{G}_0(t)$, $|t| \le t_{**} \le t_*$.

Доказательство. Согласно теореме 2 преобразование $\mathbf{T}(t,\varepsilon)$, переводящее систему (23) в систему (26), однозначно определяется соотношениями (22), в которых вместо матриц $\mathbf{G}(t)$ и $\mathbf{F}(t)$ надо подставить матрицы систем (23) и (26) соответственно, то есть $\varepsilon^{-k}\mathbf{G}(t,\varepsilon)$ и $\varepsilon^{-k}\mathbf{F}(t,\varepsilon)$. Поскольку по условию теоремы матрица $\mathbf{G}(t,\varepsilon)$ обладает асимптотическим разложением (24), то матрицы $\mathbf{X}_{12}(t,\varepsilon)$ и $\mathbf{X}_{21}(t,\varepsilon)$ будем искать в виде разложений: $\mathbf{X}_{\alpha\beta}(t,\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{X}_{j\alpha\beta}(t)\varepsilon^j$, $\mathbf{X}_{0\alpha\beta}(t) \equiv \mathbf{0}$ $(\alpha,\beta = 1,2)$. Их подстановка в (22) и несложные преобразования приводят к системе рекуррентных соотношений для блоков матриц $\mathbf{X}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{F}$:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{X}_{0\alpha\beta} = \mathbf{0},\\
&\mathbf{G}_{0\alpha\alpha}\mathbf{X}_{l\alpha\beta} - \mathbf{X}_{l\alpha\beta}\mathbf{G}_{0\beta\beta} = \dot{\mathbf{X}}_{(l-k)\alpha\beta} + \sum_{i=1}^{l-1}\left(\mathbf{X}_{(l-i)\alpha\beta}\mathbf{G}_{i\beta\beta} - \mathbf{G}_{l\alpha\alpha}\mathbf{X}_{(l-i)\alpha\beta}\right) - \mathbf{G}_{l\alpha\beta} + \sum_{i,j=1}^{l}\mathbf{X}_{i\alpha\beta}\mathbf{G}_{(l-i-j)\beta\alpha}\mathbf{X}_{j\alpha\beta},\\
&2\mathbf{T}_{l\alpha\alpha} = \sum_{i=1}^{l-1}\left(\mathbf{T}_{i\alpha\beta}\mathbf{T}_{(l-i)\beta\alpha} - \mathbf{T}_{i\alpha\alpha}\mathbf{T}_{(l-i)\alpha\alpha}\right), \qquad \mathbf{T}_{0\alpha\alpha} = \mathbf{E}_{m_\alpha},\\
&\mathbf{T}_{l\alpha\beta} = \mathbf{X}_{l\alpha\beta} + \sum_{i=1}^{l-1}\mathbf{T}_{i\alpha\alpha}\mathbf{X}_{(l-i)\alpha\beta}, \qquad \mathbf{T}_{0\alpha\beta} = \mathbf{0},\\
&\mathbf{F}_{l\alpha\alpha} = \mathbf{G}_{l\alpha\alpha} + \sum_{i=0}^{l-1}\left(\mathbf{G}_{i\alpha\alpha}\mathbf{T}_{(l-i)\alpha\alpha} + \mathbf{G}_{i\alpha\beta}\mathbf{T}_{(l-i)\beta\alpha}\right) - \sum_{i=1}^{l}\mathbf{T}_{i\alpha\alpha}\mathbf{F}_{(l-i)\alpha\alpha} - \dot{\mathbf{T}}_{(l-k)\alpha\alpha}, \quad (\alpha,\beta = 1,2,\ \ \alpha \ne \beta).
\end{aligned} \tag{27}$$

Здесь, как и всюду в работе, считаем, что все величины с отрицательными индексами равны нулю, а индекс l пробегает значения $0, 1, 2, \ldots$.

Поскольку матрицы $\mathbf{G}_{011}$ и $\mathbf{G}_{022}$, согласно предположению теоремы, не имеют общих собственных значений, то первое уравнение из соотношений (27) однозначно разрешимо относительно $\mathbf{X}_{l\alpha\beta}$ [7]. Это означает, что если ввести в рассмотрение матрицы $\mathbf{X}_l = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{X}_{l12} \\ \mathbf{X}_{l21} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, то они будут удовлетворять алгебраическому уравнению

$$\mathbf{G}_0^d\mathbf{X}_l - \mathbf{X}_l\mathbf{G}_0^d = \dot{\mathbf{X}}_{(l-k)} + \sum_{i=1}^{l-1}\left(\mathbf{X}_{(l-i)}\mathbf{G}_i^d - \mathbf{G}_l^d\mathbf{X}_{(l-i)}\right) - \mathbf{G}_l^c + \sum_{i,j=1}^{i,j=l}\mathbf{X}_i\mathbf{G}_{(l-i-j)}^c\mathbf{X}_j, \quad \mathbf{X}_0 = \mathbf{0}, \tag{28}$$

аналогичному (19), использованному при доказательстве теоремы 2. Покажем, что $\mathbf{X}_l \in \mathfrak{M}_{\mathbf{J}}^c$ для $l = 1, 2, \ldots$.

В силу сказанного выше уравнение (28) может иметь только одно решение на подпространстве $\mathfrak{M}_{\mathbf{J}}^{c}$. Но тогда и уравнение относительно матрицы $\mathbf{Y}_l$

$$\mathrm{G}_0^d \mathrm{Y}_l - \mathrm{Y}_l \mathrm{G}_0^d = \dot{\mathrm{Y}}_{(l-k)} + \sum_{i=1}^{l-1} \left(\mathrm{Y}_{(l-i)} \mathrm{G}_i^d - \mathrm{G}_l^d \mathrm{Y}_{(l-i)} \right) + \sum_{i,j=1}^{l} \left(\mathrm{X}_i \mathrm{G}_{(l-i-j)}^d \mathrm{Y}_j + \mathrm{Y}_i \mathrm{G}_{(l-i-j)}^d \mathrm{X}_j - \mathrm{Y}_i \mathrm{G}_{(l-i-j)}^c \mathrm{Y}_j \right)$$

будет иметь, при известной матрице $\mathbf{X}_l$, единственное решение, принадлежащее $\mathfrak{M}_{\mathbf{J}}^{c}$. Это уравнение является следствием уравнения (28), если в качестве $\mathbf{Y}_l$ взять

$$\mathbf{Y}_l = \mathbf{X}_l + \mathbf{J}^{-1} \mathbf{X}_l^* \mathbf{J} . \tag{29}$$

Тогда $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{0}$ и, в силу инвариантности $\mathfrak{M}_{\mathbf{J}}^{c}$ относительно преобразования (25), $\mathbf{Y}_l \in \mathfrak{M}_{\mathbf{J}}^{c}$. Таким образом, все $\mathbf{Y}_l$ из (29) равны нулю, что означает $\mathbf{J}$-симметричность матриц $\mathbf{X}_l$ и, следовательно, $\mathbf{J}$-симметричность матриц $\mathbf{F}_l$.

Доказательство того, что существует решение $\mathbf{X}_{\alpha\beta}$ уравнений (22), имеющее построенное асимптотическое разложение, почти дословно повторяет доказательство аналогичного утверждения из работы [4].

Другой случай, интересный с практической точки зрения, связан с наличием у коэффициентов уравнений линейной $\mathbf{J}$-системы особенностей типа полюса. Такого рода задачи возникают при анализе поведения на бесконечности решений системы дифференциальных уравнений с аналитическими коэффициентами и связаны, как правило, с иррегулярно особыми точками [4]. Поэтому, в соответствии с теорией иррегулярно особых точек, поместим особенность в бесконечно удалённую точку комплексной плоскости t, то есть рассмотрим дифференциальную $\mathbf{J}$-систему вида

$$t^{-k} \frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \mathbf{G}(t)\mathbf{z}(t), \qquad \mathbf{z} \in \mathbb{C}^m, \tag{30}$$

где $k > 0$ — целое число; матрица $\mathbf{G}(t)$ аналитична по t при $t_* \le |t| < \infty$ и обладает по t асимптотическим разложением [4] вида

$$\mathbf{G}(t) \underset{t\to\infty}{\sim} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{G}_j t^{-j}, \tag{31}$$

которое справедливо в некотором секторе комплексной плоскости t. Для асимптотического анализа по t $\mathbf{J}$-симметричных систем такого типа полезна следующая теорема, аналогичная теореме 12.2 из работы [4]:

Теорема 4. Пусть Σ — открытый сектор комплексной плоскости t с вершиной в точке $t = 0$ и положительным центральным углом, не превосходящим $\pi/(k+1)$, содержащий положительную вещественную полуось. Предположим, что $\mathbf{G}(t) \in \mathfrak{M}_{\mathbf{J}}$, аналитичная по t при $t \in \Sigma$ и $t_* \le |t|$, обладает асимптотическим разложением вида (31), где $\mathbf{G}_0 \in \mathfrak{M}_{\mathbf{J}}^{d}$, и ни одно собственное значение диагонального блока $\mathbf{G}_{011}$ матрицы $\mathbf{G}_0$ в представлении $\mathbf{G}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{011} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{022} \end{pmatrix}$ не совпадает ни с одним собственным значением блока $\mathbf{G}_{022}$. И пусть преобразование (25) пространства $\mathfrak{M}_{\mathbf{J}}$ оставляет подпространство $\mathfrak{M}_{\mathbf{J}}^{c} \subset \mathfrak{M}_{\mathbf{J}}$ инвариантным. Тогда существует матричная функция $\mathbf{T}(t) \in \mathfrak{I}_{\mathbf{J}}$, аналитичная для $t \in \Sigma,\quad t_{**} \le |t| < \infty$ (здесь $t_{**} \ge t_*$ — положительные вещественные числа), имеющая в секторе Σ асимптотическое разложение $\mathbf{T}(t) \underset{t\to\infty}{\sim} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{T}_j t^{-j}$, где $\mathbf{T}_0 = \mathbf{E}_m$, и такая, что преобразование $\mathbf{z}(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{y}(t),\quad \mathbf{z},\mathbf{y} \in \mathbb{C}^m$ приводит дифференциальное уравнение (30) к виду $t^k \dfrac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{F}(t)\mathbf{y}(t)$. Здесь матрица $\mathbf{F}(t) \in \mathfrak{M}_{\mathbf{J}}^d$ разлагается в области Σ в асимптотический при $t \to \infty$ ряд по степеням $1/t$: $\mathbf{F}(t) \underset{t\to\infty}{\sim} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{F}_j t^{-j},\quad \mathbf{F}_0 = \mathbf{G}_0$.

По существу эта теорема является следствием предыдущей, поскольку доказательство $\mathbf{J}$-симметричности матрицы $\mathbf{F}(t)$ почти дословно повторяет аналогичные построения из теоремы 3 данной работы и теоремы 12.2 [4]. Поэтому приведём лишь систему рекуррентных соотношений для блоков матриц $\mathbf{G},\ \mathbf{X},\ \mathbf{T},\ \mathbf{F}$:

$$\begin{gathered}
\mathbf{G}_{0\alpha\alpha}\mathbf{X}_{l\alpha\beta} - \mathbf{X}_{l\alpha\beta}\mathbf{G}_{0\beta\beta} = \sum_{i=1}^{l-1}\left(\mathbf{X}_{(l-i)\alpha\beta}\mathbf{G}_{i\beta\beta} - \mathbf{G}_{l\alpha\alpha}\mathbf{X}_{(l-i)\alpha\beta}\right) - \mathbf{X}_{(l-k-1)\alpha\beta} - \\
-\mathbf{G}_{l\alpha\beta} + \sum_{i,j=1}^{l}\mathbf{X}_{i\alpha\beta}\mathbf{G}_{(l-i-j)\beta\alpha}\mathbf{X}_{j\alpha\beta}, \qquad \mathbf{X}_{0\alpha\beta} = \mathbf{0}, \\
2\mathbf{T}_{l\alpha\alpha} = \sum_{i=1}^{l-1}\left(\mathbf{T}_{i\alpha\beta}\mathbf{T}_{(l-i)\beta\alpha} - \mathbf{T}_{i\alpha\alpha}\mathbf{T}_{(l-i)\alpha\alpha}\right), \qquad \mathbf{T}_{0\alpha\alpha} = \mathbf{E}_{m_\alpha}, \\
\mathbf{T}_{l\alpha\beta} = \mathbf{X}_{l\alpha\beta} + \sum_{i=1}^{l-1}\mathbf{T}_{i\alpha\alpha}\mathbf{X}_{(l-i)\alpha\beta}, \qquad \mathbf{T}_{0\alpha\beta} = \mathbf{0}, \\
\mathbf{F}_{l\alpha\alpha} = \mathbf{G}_{l\alpha\alpha} + \sum_{i=0}^{l-1}\left(\mathbf{G}_{i\alpha\alpha}\mathbf{T}_{(l-i)\alpha\alpha} + \mathbf{G}_{i\alpha\beta}\mathbf{T}_{(l-i)\beta\alpha}\right) - \sum_{i=1}^{l}\mathbf{T}_{i\alpha\alpha}\mathbf{F}_{(l-i)\alpha\alpha} + (l-k)\mathbf{T}_{(l-k)\alpha\alpha},\ \left(\alpha,\beta = 1,2,\ \alpha \ne \beta\right).
\end{gathered} \tag{32}$$

Данные рекуррентные соотношения справедливы лишь в предположении, что степень $k > 0$. В случае $k < 0$ матрица коэффициентов уравнений линейной $\mathbf{J}$-системы (30) не имеет особенностей в бесконечно удалённой точке, то есть точка $t = \infty$ является обыкновенной.

Случай $k = 0$ сводится преобразованием $t \to 1/t$ к рассмотрению $\mathbf{J}$-системы

$$t\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \mathbf{G}(t)\mathbf{z}(t), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{C}^m, \tag{33}$$

с регулярной в нуле особенностью в предположении аналитичности матричной функции $\mathbf{G}(t)$ в некоторой окрестности начала координат комплексной плоскости t, то есть точка $t = 0$ является полюсом первого порядка для коэффициентов этой системы. Решение задачи нормализации для $\mathbf{J}$-систем такого типа может быть получено в виде сходящихся рядов:

Теорема 5. Пусть Σ — некоторый сектор плоскости t с вершиной в точке $t = 0$, в которой матрица коэффициентов $\mathbf{G}(t)$ системы (33) обладает асимптотическим разложением

$$\mathbf{G}(t) \underset{t\to 0}{\sim} \sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{G}_j t^j, \quad t \in \Sigma, \tag{34}$$

и аналитична в Σ при $|t| \le t_*$. Пусть $\mathbf{G}(t) \in \mathfrak{M}_{\mathbf{J}}$, а $\mathbf{G}_0 \in \mathfrak{M}_{\mathbf{J}}^d$ и ни одно собственное значение диагонального блока $\mathbf{G}_{011}$ матрицы $\mathbf{G}_0$ в представлении $\mathbf{G}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{011} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{022} \end{pmatrix}$ не отличается от любого собственного значения блока $\mathbf{G}_{022}$ на целое число, а преобразование (25) пространства $\mathfrak{M}_{\mathbf{J}}$ оставляет подпространство $\mathfrak{M}_{\mathbf{J}}^c \subset \mathfrak{M}_{\mathbf{J}}$ инвариантным. Тогда существует матричная функция $\mathbf{T}(t) \in \mathfrak{I}_{\mathbf{J}}$, аналитичная для $t \in \Sigma$ при $|t| \le t_*$, имеющая в секторе Σ асимптотическое разложение $\mathbf{T}(t) \underset{t\to 0}{\sim} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{T}_j t^j, \quad \mathbf{T}_0 = \mathbf{E}_m,$ и такая, что преобразование $\mathbf{z}(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{y}(t), \ \mathbf{z}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^m$ приводит дифференциальное уравнение (33) к виду $t\dfrac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{F}(t)\mathbf{y}(t).$ Здесь матрица $\mathbf{F}(t) \in \mathfrak{M}_{\mathbf{J}}^d$ и разлагается в области Σ в асимптотический при $t \to 0$ ряд по степеням t: $\mathbf{F}(t) \underset{t\to 0}{\sim} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{F}_j t^j, \ t \to 0$, где $\mathbf{F}_0 = \mathbf{G}_0$. Если разложение (34) является сходящимся при $|t| \le t_*$, то таковыми являются и все другие разложения при $|t| \le t_{**}$ для любого положительного числа $t_{**} \le t_*$.

Теоремы, аналогичные этой, подробно исследованы в [4] (см. теоремы 5.5 и 17.2), а доказательство $\mathbf{J}$-симметричности матрицы $\mathbf{F}(t)$ аналогично доказательству $\mathbf{J}$-симметричности из теоремы 3. Поэтому, как и раньше, приведём только систему рекуррентных соотношений, связывающих между собой блоки матриц $\mathbf{G}, \mathbf{X}, \mathbf{T}, \mathbf{F}$:

$$\mathbf{G}_{0\alpha\alpha}\mathbf{X}_{l\alpha\beta} - \mathbf{X}_{l\alpha\beta}\left(\mathbf{G}_{0\beta\beta} - l\mathbf{E}_{m_\beta}\right) = \sum_{i=1}^{l-1}\left(\mathbf{X}_{(l-i)\alpha\beta}\mathbf{G}_{i\beta\beta} - \mathbf{G}_{l\alpha\alpha}\mathbf{X}_{(l-i)\alpha\beta}\right) - \mathbf{G}_{l\alpha\beta} + \sum_{i,j=1}^{l}\mathbf{X}_{i\alpha\beta}\mathbf{G}_{(l-i-j)\beta\alpha}\mathbf{X}_{j\alpha\beta},$$

$$\mathbf{X}_{0\alpha\beta} = \mathbf{0}, \qquad 2\mathbf{T}_{l\alpha\alpha} = \sum_{i=1}^{l-1}\left(\mathbf{T}_{i\alpha\beta}\mathbf{T}_{(l-i)\beta\alpha} - \mathbf{T}_{i\alpha\alpha}\mathbf{T}_{(l-i)\alpha\alpha}\right), \qquad \mathbf{T}_{0\alpha\alpha} = \mathbf{E}_{m_\alpha},$$

$$\mathbf{T}_{l\alpha\beta} = \mathbf{X}_{l\alpha\beta} + \sum_{i=1}^{l-1}\mathbf{T}_{i\alpha\alpha}\mathbf{X}_{(l-i)\alpha\beta}, \qquad \mathbf{T}_{0\alpha\beta} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{F}_{l\alpha\alpha} = \mathbf{G}_{l\alpha\alpha} + \sum_{i=0}^{l-1}\left(\mathbf{G}_{i\alpha\alpha}\mathbf{T}_{(l-i)\alpha\alpha} + \mathbf{G}_{i\alpha\beta}\mathbf{T}_{(l-i)\beta\alpha}\right) - \sum_{i=1}^{l}\mathbf{T}_{i\alpha\alpha}\mathbf{F}_{(l-i)\alpha\alpha} - (l+1)\mathbf{T}_{(l+1)\alpha\alpha}, \ \left(\alpha, \beta = 1, 2;\ \alpha \ne \beta\right).$$

Опираясь на указанные теоремы, перейдём к анализу упругого осесимметричного состояния замкнутой в окружном направлении оболочки вращения; начнём с наиболее простой задачи — задачи кручения.

3. Асимптотический анализ однородной системы дифференциальных уравнений задачи осесимметричного кручения; коническая оболочка

Ограничимся исследованием однородной укороченной системы уравнений кручения (44), полученной в [1]. Матрица этой системы зависит от двух малых параметров: обезразмеренной толщины оболочки ε и величины δ, характеризующей её сдвиговую жесткость. Вводя новый параметр

$$\xi = \varepsilon\big/\sqrt{\delta}\,, \tag{35}$$

который считаем малым (то есть $\xi \to 0$ при $\varepsilon \to 0$), приходим к сингулярно возмущённой системе уравнений с единственным параметром ξ. Но для получения асимптотических при $\xi \to 0$ разложений решений модифицированной однородной системы уравнений здесь нельзя воспользоваться результатами предыдущего раздела, поскольку не выполняются ограничения теоремы 3 на матрицу, соответствующую $\mathbf{G}_0(t)$. Для исправления ситуации разработаны срезающие преобразования [4], применение которых в рассматриваемом случае приводит к замене $\mathbf{y}_t(t) = \begin{pmatrix} (\xi/r)^{0,5} & 0 \\ 0 & (\xi/r)^{-0,5} \end{pmatrix} \mathbf{z}_t(t)$, содержащей дробные степени малого параметра ξ. После умножения обеих частей преобразованных уравнений на ξ приходим к однородной системе

$$\xi \frac{d\mathbf{z}_t(t)}{dt} = \left[\mathbf{H}_{t0}(t) + \xi \mathbf{H}_{t1}(t)\right] \mathbf{z}_t(t), \tag{36}$$

где $\mathbf{H}_{t0} = \begin{pmatrix} 0 & D_\gamma^0 / \Delta_\gamma \\ f_{\varphi\varphi} & 0 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{H}_{t1} = \dfrac{3\dot{r}}{2r} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Условия теоремы 3 для системы (36) будут выполнены, если у гамильтоновой матрицы $\mathbf{H}_{t0}$ собственные значения различны. Но если λ — собственное значение матрицы $\mathbf{H}_{t0}$, то оно удовлетворяет характеристическому уравнению

$$\lambda^2 = f_{\varphi\varphi} D_\gamma^0 / \Delta_\gamma . \tag{37}$$

Покажем, что правая часть этого уравнения отделена от нуля положительной константой, не зависящей от функционального параметра f_φ. Для этого воспользуемся следующей леммой, являющейся, по существу, модификацией известного неравенства Фридрихса [8]:

Лемма 3. Пусть функция $p(x)$ неотрицательна и интегрируема на отрезке $[x_l,\, x_r]$. Тогда для любой дифференцируемой на этом отрезке функции $f(x)$, квадрат производной которой интегрируем на $[x_l,\, x_r]$ и такой, что $\int\limits_{x_l}^{x_r} p(x) f(x) dx = 0,$ справедливо неравенство $C \le \int\limits_{x_l}^{x_r} \left(f'(x)\right)^2 dx \Big/ \int\limits_{x_l}^{x_r} p(x) f^2(x) dx$, где константа C зависит только от функции $p(x)$ и удовлетворяет неравенству $C \ge \left[\dfrac{1}{2} \int\limits_{x_l}^{x_r} \left(\int\limits_{x_l}^{x} p(t)dt \int\limits_{x}^{x_r} p(t)dt \right)^{0,5} dx \right]^{-1} \ge$ $\ge \left[\dfrac{x_r - x_l}{4} \int\limits_{x_l}^{x_r} p(x)dx \right]^{-1}$, а на последовательности функций $f_k'(x) = \sin\left(k\pi \dfrac{x - x_l}{x_r - x_l} \right)$ отношение $\int\limits_{x_l}^{x_r} \left(f'(x)\right)^2 dx \Big/ \int\limits_{x_l}^{x_r} p(x) f^2(x) dx$ стремится к бесконечности при $k \to \infty$.

Доказательство. В силу условия леммы и неравенства Коши–Буняковского [8] имеем $\int\limits_{x_l}^{x_r} p(x) f^2(x) dx = -\int\limits_{x_l}^{x_r} \left(\int\limits_{x_l}^{x} p(t) f(t) dt \right) f'(x) dx \le \left[\int\limits_{x_l}^{x_r} \left(\int\limits_{x_l}^{x} p(t) f(t) dt \right)^2 dx \int\limits_{x_l}^{x_r} (f'(x))^2 dx \right]^{0,5}$. Но в то же время, $\left|\int_{x_l}^{x} p(t)f(t)dt\right| \le \left(\int_{x_l}^{x} pdt \int_{x_l}^{x} pf^2dt\right)^{0,5}$ и $\left|\int_{x_l}^{x} p(t)f(t)dt\right| \le \left(\int_{x}^{x_r} pdt \int_{x}^{x_r} pf^2dt\right)^{0,5}$. Отсюда и из неравенств о среднем арифметическом и среднем геометрическом следует первая часть утверждения леммы, поскольку $\left(\int_{x_l}^{x} p(t)f(t)dt\right)^2 \le \left(\int_{x_l}^{x} pdt \int_{x}^{x_r} pdt\right)^{0,5} \left(\int_{x_l}^{x} pf^2dt \int_{x}^{x_r} pf^2dt\right)^{0,5} \le$ $\le \frac{1}{2}\left(\int_{x_l}^{x} pdt \int_{x}^{x_r} pdt\right)^{0,5} \int_{x_l}^{x_r} pf^2dt \le \frac{1}{4}\int_{x_l}^{x_r} pdt \int_{x_l}^{x_r} pf^2dt.$ То, что бесконечность достигается на данной последовательности функций $f_k(x)$, легко проверяется непосредственным вычислением. Лемма доказана.

Теперь воспользуемся доказанным утверждением. В силу определений (30) и (42) из [1], имеем: $\Delta_\gamma = D_\gamma^0 D_\gamma^{\varphi\varphi} - \left(D_\gamma^{\varphi}\right)^2 = D_\gamma^0 \int_{\nu_l}^{\nu_r} D_\gamma(\nu)\left[\mu_\varphi(\nu) - \frac{D_\gamma^\varphi}{D_\gamma^0}\right]^2 d\nu$. Поэтому, вводя $dx = \frac{d\nu}{D_\varphi}$, $x_l = 0$, $x_r = \int_{\nu_l}^{\nu_r} \frac{d\nu}{D_\varphi}$, $p(x) = D_\gamma D_\varphi$, $f(x) = \mu_\varphi(\nu) - \frac{D_\gamma^\varphi}{D_\gamma^0}$ и учитывая (26) из [1], получаем: $\frac{d}{dx}f(x) = f_\varphi(\nu)$, $\int_{\nu_l}^{\nu_r} p(x)f(x)dx = 0$ и $f_{\varphi\varphi} = \int_{\nu_l}^{\nu_r} \frac{f_\varphi^2(\nu)}{D_\varphi}d\nu = \int_{x_l}^{x_r} (f'(x))^2 dx$. Тогда уравнение (37) принимает вид $\lambda^2 = \int_{x_l}^{x_r} \left[f'(x)\right]^2 dx \Big/ \int_{x_l}^{x_r} p(x)f^2(x)dx$, а из леммы 3 следует: $\lambda^2 \ge 4\left[\int_{\nu_l}^{\nu_r} \frac{d\nu}{D_\varphi} \int_{\nu_l}^{\nu_r} D_\gamma(\nu)d\nu\right]^{-1}$. Это означает, что уравнение (37) всегда имеет два различных корня, и, согласно теореме 1, посредством симплектического преобразования матрица $\mathbf{H}_{t0}$ приводится к диагональному виду с неравными друг другу диагональными элементами. Таким образом, для асимптотического анализа этой системы можно применить теорему 3, и в результате этого приходим к утверждению:

Следствие 1. Однородная система разрешающих уравнений (36) задачи кручения симплектическим преобразованием $\mathbf{y}_t(t) = \mathbf{S}_t(t,\xi)\,\mathbf{z}_t(t)$ приводится к виду $\xi\frac{d\mathbf{z}_t(t)}{dt} = \begin{pmatrix}\lambda(t,\xi) & 0 \\ 0 & -\lambda(t,\xi)\end{pmatrix}\mathbf{z}_t(t)$; здесь $\mathbf{S}_t(t,\xi) \underset{\xi\to 0}{\sim} \sum_{i=0} \mathbf{S}_{ti}(t)\xi^{i-0,5}$, $\lambda(t,\xi) \underset{\xi\to 0}{\sim} \sum_{i=0} \lambda_i(t)\xi^i$, а $\lambda_0(t)$ — положительное решение уравнения (37). Отсюда, в частности, следует, что поведение решения задачи кручения в окрестности торцов оболочки вращения соответствует поведению решения для погранслоя с характерным размером, пропорциональным величине ξ^{-1}. Причём, в силу леммы 3, коэффициент пропорциональности ограничен сверху и может быть сколь угодно малым. Последнее произойдет в том случае, если функция $f_\varphi(\nu)$, отвечающая, согласно (11) из [1], за распределение поперечных компонент тензоров напряжений и деформаций по толщине оболочки, будет быстро осциллирующей.

Проведённый асимптотический анализ справедлив для таких оболочек вращения, у которых введённый безразмерный параметр $\xi = \varepsilon\delta^{-1/2}$ является бесконечно малым при $\varepsilon \to 0$, т.е. $\xi \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Если это условие не выполняется, то для анализа поведения решений задачи кручения необходимо использовать другие, более точные уравнения равновесия, поскольку в рассматриваемых уравнениях все коэффициенты получены с относительной погрешностью порядка ε (вследствие тонкостенности рассматриваемых оболочек).

Теоремы, приведённые в предыдущем разделе, позволяют исследовать поведение решения задачи кручения и в окрестности особых точек, которые в задачах для неограниченных оболочек и для оболочек, у которых срединная поверхность пересекает ось вращения, возникают естественным образом. Простейшим примером оболочки, имеющей такого рода особенности, является коническая оболочка вращения.

Поместим начало O координатной системы (см. раздел 1 [1]) в вершину конуса, а ось X направим по его оси. Тогда, если ψ — угол раствора конуса, а t — обезразмеренное (см. раздел 4 [1]) расстояние от рассматриваемой точки до вершины, то в соотношениях (48) из [1] учитываем, что

$$r(t) = t\sin\psi\,, \qquad b_\varphi = -\frac{\operatorname{ctg}\psi}{t}\,, \tag{38}$$

и тогда модифицированная однородная система дифференциальных уравнений в задаче кручения (36) приобретает вид: $\dfrac{d\mathbf{z}_t(t)}{dt} = \left(\dfrac{1}{\xi}\mathbf{H}_{t0} + \dfrac{1}{t}\mathbf{H}_{t1}\right)\mathbf{z}_t(t)$, где $\mathbf{H}_{t0} = \begin{pmatrix} 0 & D_\gamma^0/\Delta_\gamma \\ f_{\varphi\varphi} & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_{t1} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 0 \\ 0 & -1{,}5 \end{pmatrix}$. Здесь параметр ξ определён соотношением (35). Так как точка $t = \infty$ является иррегулярной особенностью этой системы, то поведение её решения на бесконечности может быть проанализировано при помощи теоремы 4, и поскольку собственные значения гамильтоновой матрицы системы при $t = \infty$ различны (это следует из леммы 3), то приходим к утверждению:

Следствие 2. Фундаментальная система решений однородной системы уравнений в задаче осесимметричного кручения конической оболочки вращения имеет асимптотическое при $t \to \infty$ представление вида $\mathbf{Y}_t(t) \sim \begin{pmatrix} t^{-0.5} & 0 \\ 0 & t^{0.5} \end{pmatrix}\mathbf{S}_t(t)\begin{pmatrix} \exp\lambda t & 0 \\ 0 & \exp(-\lambda t) \end{pmatrix}$; здесь $\mathbf{S}_t(t) \underset{t\to\infty}{\sim} \sum\limits_{i=0} \mathbf{S}_{ti} t^{-i}$, а λ — положительное решение уравнения $\lambda^2 = \dfrac{f_{\varphi\varphi} D_\gamma^0}{\xi^2 \Delta_\gamma}$, аналогичного (37).

Как видно из выражений для коэффициентов однородной системы задачи кручения конической оболочки, точка $t = 0$ является регулярно особой точкой. Однако собственные значения матрицы $\mathbf{H}_{t1}$, равные $\pm 3/2$, разнятся друг от друга на целое число, что не позволяет провести дальнейшие упрощения при помощи теоремы 5. Тем не менее, срезающие преобразования [4] позволяют получить ответ: любое решение однородных уравнений кручения конической оболочки в окрестности точки $t = 0$ представимо в виде сходящихся разложений $\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} t^{-0{,}5} & 0 \\ 0 & t^{0{,}5} \end{pmatrix} \sum\limits_{i=0} \left[t^{1{,}5}\left(1 + c\ln t\right)\mathbf{c}_i + t^{-1{,}5}\mathbf{d}_i \right] t^i$, где $\mathbf{c}_i$ и $\mathbf{d}_i$ — некоторые постоянные векторы из $\mathbb{R}^2$, а c — константа.

Гораздо более сложной проблемой является аналитическое исследование задачи изгиба. Начнём с наиболее трудоёмкой её части — асимптотического анализа зависимости решений от малых параметров ε и δ, характеризующих толщину и податливость материала оболочки.

4. Асимптотический анализ решений однородной системы уравнений осесимметричного изгиба оболочки вращения

Ранее установлено, что напряжённо-деформированное состояние оболочки при её изгибе осесимметричными усилиями определяется гамильтоновой системой обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка (см. [1], соотношения (48)). Коэффициенты этой системы зависят от двух малых параметров, входящих в формулы (26) (см. [1]): обезразмеренной толщины ε и отношения тангенциальной и нормальной жесткостей материала оболочки δ. На практике параметры ε и δ имеют следующие диапазоны изменения: $\varepsilon \sim 10^{-3} \div 10^{-1}$; $\delta \sim 10^{-2} \div 1$; в классической теории оболочек обычно предполагается, что $\delta(\varepsilon)$ не является величиной бесконечно малой при $\varepsilon \to 0$.

Удобно от параметра ε перейти к параметру ξ (35), что было сделано и при аналитическом исследовании задачи кручения. Тогда, следуя работам [9], [10], величину δ можно оценить по ξ–шкале при $\xi \to 0$ и таким образом перейти от двух параметров к одному. В полном объёме асимптотический анализ зависимости решения данной системы от малого параметра ξ проведён в работе [11], здесь же ограничимся рассмотрением лишь классического случая, то есть будем считать, что существуют конечные пределы $\lim\limits_{\xi\to 0}\delta(\xi) \neq 0$ и $\lim\limits_{\xi\to 0}\dfrac{\varepsilon(\xi)}{\xi} \neq 0$.

В системе (48) (см. [1]) сделаем симплектическое срезающее преобразование:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{v}_{b1}=\left(\frac{\xi}{r}\right)^{-0,5}\mathrm{u}_{b1}; \quad \mathrm{q}_{b1}=\left(\frac{\xi}{r}\right)^{0,5}\mathrm{p}_{b1}; \quad v_{b2}=\left(\frac{\xi}{r}\right)^{0,5}\mathrm{u}_{b2};\\
&\mathrm{q}_{b2}=\left(\frac{\xi}{r}\right)^{-0,5}\mathrm{p}_{b2}; \quad \mathrm{v}_{b3}=\left(\frac{\xi}{r}\right)^{0,5}\mathrm{u}_{b3}; \quad \mathrm{q}_{b3}=\left(\frac{\xi}{r}\right)^{-0,5}\mathrm{p}_{b3}.
\end{aligned}
\tag{39}
$$

Умножая модифицированную однородную гамильтонову систему уравнений на ξ, приходим к однородной системе

$$
\xi\frac{d\mathbf{x}_b(t)}{dt}=\left[\mathbf{H}_0(t)+\frac{\xi}{r}\mathbf{H}_1(t)+\left(\frac{\xi}{r}\right)^2\mathbf{H}_2(t)\right]\mathbf{x}_b(t), \tag{40}
$$

где $\mathbf{x}_b=\begin{pmatrix}\mathbf{u}_b\\ \mathbf{p}_b\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^6$, а у гамильтоновых матриц $\mathbf{H}_\alpha(t)=\begin{pmatrix}\mathbf{H}_{\alpha uu} & \mathbf{H}_{\alpha up}\\ \mathbf{H}_{\alpha pu} & \mathbf{H}_{\alpha pp}\end{pmatrix}$ $(\alpha=0,1,2)$ ненулевыми являются следующие блоки: $\mathbf{H}_{0uu}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -A_1^2 & 0 & 0\\ -A_2^1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_{0up}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & A^{22} & A^{23}\\ 0 & A^{32} & A^{33}\end{pmatrix}$,

$$
\mathbf{H}_{0pu}=\begin{pmatrix}A_{11} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & f_{ss}\end{pmatrix},\ \mathbf{H}_{1uu}=\dot r\begin{pmatrix}-0,5 & 0 & 0\\ 0 & 0,5 & 0\\ 0 & 0 & 0,5\end{pmatrix}-\dot r\begin{pmatrix}A_1^1 & 0 & 0\\ 0 & A_2^2 & A_3^2\\ 0 & A_2^3 & A_3^3\end{pmatrix}+\frac{rb_\varphi}{\sqrt{\delta}}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ \mathbf{H}_{1up}=\dot r\begin{pmatrix}0 & A^{12} & A^{13}\\ A^{21} & 0 & 0\\ A^{31} & 0 & 0\end{pmatrix},
$$

$$
\mathbf{H}_{1pu}=\dot r\begin{pmatrix}0 & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & 0 & 0\\ A_{31} & 0 & 0\end{pmatrix},\ \mathbf{H}_{2uu}=-\dot r^2\begin{pmatrix}0 & A_1^2 & A_1^3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ \mathbf{H}_{2up}=\dot r^2\begin{pmatrix}A^{11} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ \mathbf{H}_{2pu}=\dot r^2\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & A_{22} & A_{23}\\ 0 & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix}.
$$

Величины A^{ij}, A_i^j, A_{ij} определены ранее в [1] (см. соотношения (45)).

Если некоторые собственные значения матрицы $\mathbf{H}_0$ различны по модулю, то для асимптотического анализа данной системы по малому параметру ξ можно применить теорему 3. Анализируя спектральную задачу для гамильтоновой матрицы $\mathbf{H}_0$, находим, что нуль является её собственным значением кратности 4, а два других собственных значения удовлетворяют уравнению

$$\lambda^2 = f_{ss} A^{33}. \tag{41}$$

Покажем, что правая часть этого уравнения всегда больше нуля. Отправляясь от соотношений (45) из [1], прямыми вычислениями получаем $A^{33} = \left[A_{33}^s - \frac{\left(A_{13}^s\right)^2}{A_{11}^s} - \frac{\left(A_{11}^s A_{23}^s - A_{12}^s A_{13}^s\right)^2}{A_{11}^s \left[A_{11}^s A_{22}^s - \left(A_{12}^s\right)^2 \right]} \right]^{-1} \geq \left[A_{33}^s - \frac{\left(A_{33}^s\right)^2}{A_{11}^s} \right]^{-1}$, поскольку матрица $\mathbf{A}^s$ положительно определена. Поэтому правая часть уравнения (41) удовлетворяет неравенствам

$$f_{ss} A^{33} \geq f_{ss} \left[A_{33}^s - \frac{\left(A_{33}^s\right)^2}{A_{11}^s} \right]^{-1} = \int_{\nu_l}^{\nu_r} \frac{f_s^2 d\nu}{D_s} \cdot \left[\int_{\nu_l}^{\nu_r} D_{ss} \left(\mu_s - \frac{D_{ss}^s}{D_{ss}^0} \right)^2 d\nu \right]^{-1} \geq 4 \left(\int_{\nu_l}^{\nu_r} \frac{d\nu}{D_s} \right)^{-1} \cdot \left(\int_{\nu_l}^{\nu_r} D_{ss} d\nu \right)^{-1} > 0;$$

последнее неравенство является следствием леммы 3 и доказывается аналогично соответствующему неравенству из предыдущего параграфа. Итак, для любой непрерывной функции $f_s(\nu)$, отвечающей за распределение поперечных компонент тензора напряжений по толщине оболочки, уравнение (41) имеет два ненулевых решения: $\pm\lambda_F$, $\lambda_F = \sqrt{f_{ss} A^{33}}$. Более того, как следует из той же леммы, для быстро осциллирующей функции $f_s(\nu)$ число λ_F тем больше, чем выше частота осцилляций.

Симплектическая матрица перехода к каноническому базису [6] из корневых векторов матрицы $\mathbf{H}_0$, отвечающих нулевым собственным значениям, и из собственных векторов, соответствующих ненулевым собственным значениям $\pm\lambda_F$, имеет вид:

$$\mathbf{P}_F = \frac{1}{k_F} \begin{pmatrix} k_F & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_F & A^{23} & 0 & 0 & -A^{23} \\ 0 & 0 & A^{33} & 0 & 0 & -A^{33} \\ 0 & 0 & A_1^3 & k_F & 0 & -A_1^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_F & 0 \\ k_F \frac{A_1^3}{A^{33}} & 0 & \lambda_F & 0 & -k_F \frac{A^{23}}{A^{33}} & \lambda_F \end{pmatrix}, \text{ где } k_F = \sqrt{2\lambda_F A^{33}}.$$

Теперь систему (40) запишем не для искомого вектора $\mathbf{x}_b$, а для вектора неизвестных $\mathbf{z}_b$:

$$\mathbf{x}_b(t) = \mathbf{P}_F \mathbf{B}_{2,1} \mathbf{z}_b(t), \tag{42}$$

где матрица $\mathbf{B}_{i,j}$ введена соотношениями (21). В результате приходим к $\mathbf{J}_{2,3}$ – симметричной системе

$$\xi \frac{d\mathbf{z}_b(t)}{dt} = \left[\mathbf{H}_0(t) + \frac{\xi}{r} \mathbf{H}_1(t) + \left(\frac{\xi}{r} \right)^2 \mathbf{H}_2(t) \right] \mathbf{z}_b(t), \tag{43}$$

у которой ненулевые блоки матриц $\mathbf{H}_0$ и $\mathbf{H}_1$, входящие в блочные представления $\mathbf{H}_\alpha = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{\alpha 11} & \mathbf{H}_{\alpha 12} \\ \mathbf{H}_{\alpha 21} & \mathbf{H}_{\alpha 22} \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_{\alpha 11} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{\alpha 11}^{11} & \mathbf{H}_{\alpha 11}^{12} \\ \mathbf{H}_{\alpha 11}^{21} & \mathbf{H}_{\alpha 11}^{22} \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_{\alpha 12} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{\alpha 12}^{1} \\ \mathbf{H}_{\alpha 12}^{2} \end{pmatrix}$ имеют вид:

$$\mathbf{H}_{011}^{11} = \frac{A^{23}A_1^3 - A^{33}A_1^2}{A^{33}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_{011}^{12} = \frac{A^{22}A^{33} - \left(A^{23}\right)^2}{A^{33}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_{011}^{21} = \frac{A^{11}A^{33} + \left(A_1^3\right)^2}{A^{33}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}_{022} = \lambda_F \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_{111}^{12} = \dot{r}\, \frac{A^{12}A^{33} - A^{13}A^{23}}{A^{33}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_{111}^{21} = \dot{r}\, \frac{A_{12}A^{33} + A_1^3 A_2^3}{A^{33}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_{122} =$$

$$= \frac{rb_\varphi A_1^3 A^{23}}{\lambda_F \sqrt{\delta} A^{33}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{A_2^3 A^{23} - A_1^3 A^{13}}{A^{33}} + A_3^3 - \frac{1}{2} \right) \begin{pmatrix} 0 & \dot{r} \\ \dot{r} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_{111}^{11} = \begin{pmatrix} \dot{r}\left(\frac{A_1^3 A_3^1}{A^{33}} - \frac{1}{2} - A_1^1 \right) & \frac{rb_\varphi}{\sqrt{\delta}} \\ 0 & \dot{r}\left(\frac{A_2^3 A^{23}}{A^{33}} + \frac{1}{2} - A_2^2 \right) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}_{111}^{11} = \begin{pmatrix} \dot{r}\left(\frac{A_1^3 A_3^1}{A^{33}} - \frac{1}{2} - A_1^1 \right) & \frac{rb_\varphi}{\sqrt{\delta}} \\ 0 & \dot{r}\left(\frac{A_2^3 A^{23}}{A^{33}} + \frac{1}{2} - A_2^2 \right) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_{112} = \frac{rb_\varphi}{k_F \sqrt{\delta}} \begin{pmatrix} A^{23} & -A^{23} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -A_1^3 & A_1^3 \end{pmatrix} + \frac{\dot{r}A^{13}}{A^{33}k_F} \begin{pmatrix} A^{33}\lambda_F & A^{33}\lambda_F \\ -A_1^3 A^{23} & A_1^3 A^{23} \\ -\left(A_1^3\right)^2 & \left(A_1^3\right)^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{\dot{r}A^{23}}{k_F} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{A_2^3 A^{23}}{A^{33}} - A_2^2 + A_3^3 & -\frac{A_2^3 A^{23}}{A^{33}} + A_2^2 + A_3^3 \\ \frac{A_1^3 A_2^3}{A^{33}} + A_{12} & -\frac{A_1^3 A_2^3}{A^{33}} - A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\dot{r}}{k_F} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_1^3 A^{21} - A_3^2 A^{33} & -A_1^3 A^{21} + A_3^2 A^{33} \\ A_1^1 A_1^3 + A_1^3 A_3^3 + A_{13} A^{33} & -A_1^1 A_1^3 - A_1^3 A_3^3 - A_{13} A^{33} \\ \lambda_F A_1^3 & \lambda_F A_1^3 \end{pmatrix};$$

матрицы $\mathbf{H}_{l\alpha\alpha}, \mathbf{H}_{l\alpha\beta}$ удовлетворяют соотношениям, следующим из гамильтоновости матриц $\mathbf{H}_l$: $\mathbf{H}_{l\alpha\alpha} = \mathbf{J}_\alpha \mathbf{H}_{l\alpha\alpha}^* \mathbf{J}_\alpha$; $\mathbf{H}_{l12} = \mathbf{J}_2 \mathbf{H}_{l21}^* \mathbf{J}_1$ $(\alpha = 1,2;\ l = 0,1,2)$. Матрица $\mathbf{H}_0$ этой $\mathbf{J}_{2,3}$-системы является блочно-диагональной с блоками из гамильтоновых матриц $\mathbf{H}_{011}$ и $\mathbf{H}_{022}$, которые не имеют совпадающих собственных значений, что позволяет использовать для её анализа теорему 3.

Применяя соотношения (27), в которых полагаем $\varepsilon = \xi$, $k = 1$, $\mathbf{G}_{l\alpha\beta}(t) = (r(t))^{-l}\,\mathbf{H}_{l\alpha\beta}(t)$ $(l = 0,1,2)$, получаем асимптотическое разложение матрицы преобразования $\mathbf{z}_b = \mathbf{T}(t,\xi)\begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{pmatrix}$, где $\mathbf{y}_1(t,\xi) \in \mathbb{R}^4$, $\mathbf{y}_2(t,\xi) \in \mathbb{R}^2$, и блочно-диагональной матрицы $\mathbf{F}(t,\xi) = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{11}(t,\xi) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{22}(t,\xi) \end{pmatrix}$, с которой связаны две гамильтоновых системы:

$$\begin{gathered} \xi \frac{d\mathbf{y}_\alpha}{dt} = \mathbf{F}_{\alpha\alpha}(t,\xi)\mathbf{y}_\alpha, \quad \mathbf{F}_{\alpha\alpha}(t,\xi) \underset{\xi\to 0}{\sim} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{F}_{j\alpha\alpha}(t)\xi^j, \quad \mathbf{F}_{0\alpha\alpha}(t) = \mathbf{H}_{0\alpha\alpha}(t), \\ \mathbf{F}_{1\alpha\alpha}(t) = \frac{1}{r(t)} \mathbf{H}_{1\alpha\alpha}(t) \quad (\alpha = 1,2). \end{gathered} \tag{44}$$

Поскольку собственные числа матрицы $\mathbf{H}_{022}$ равны $\pm\lambda_F$, а согласно доказанному выше при любом выборе функционального параметра $f_s(\nu)$ обязательно выполнение неравенства $\lambda_F > 0$, то повторное применение теоремы 3 к гамильтоновой дифференциальной системе уравнений $(\alpha = 2)$, из которой определяем вектор-функцию $\mathbf{y}_2$, позволяет утверждать, что существует симплектическое преобразование, переводящее эту систему в гамильтонову систему с диагональной матрицей. Собственные значения этой матрицы имеют асимптотическое представление вида $\pm\frac{\lambda_F}{\xi}(1+\lambda_b(t,\xi))$, где $\lambda_b(t,\xi)$ равномерно по t из некоторого промежутка и обладает конечным, отличным от нуля пределом при $\xi \to 0$. В случае необходимости асимптотические разложения для матрицы последнего преобразования и для собственных значений можно получить аналогично тому, как это проделано выше для системы (40).

Далее рассмотрим вторую $(\alpha = 1)$ из гамильтоновых систем (44) относительно вектор-функции $\mathbf{y}_1$. Непосредственные вычисления показывают, что гамильтонова матрица $\mathbf{F}_{011}(t)$ имеет только нулевые собственные значения. Поэтому для дальнейшего упрощения задачи в системе (44) необходимо сделать срезающее преобразование, подобное (39): $\mathrm{v}_{11}=\xi^{0,25}\mathrm{u}_{11}$, $\mathrm{q}_{11}=\xi^{-0,25}\mathrm{p}_{11}$, $\mathrm{v}_{12}=\xi^{-0,25}\mathrm{u}_{12}$, $\mathrm{q}_{12}=\xi^{0,25}\mathrm{p}_{12}$. Здесь $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix}\mathbf{u}_1\\ \mathbf{p}_1\end{pmatrix}$, $\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix}\mathbf{v}_1\\ \mathbf{q}_1\end{pmatrix}$, причем $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1 \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^4$. В результате деления обеих частей преобразованной однородной системы уравнений (44) на $\sqrt{\xi}$ приходим к гамильтоновой системе

$$\sqrt{\xi}\,\frac{d\mathbf{x}_1(t)}{dt} = \mathbf{F}(t,\xi)\mathbf{x}_1(t), \tag{45}$$

матрица которой $\mathbf{F}(t,\xi)$ имеет асимптотическое представление $\mathbf{F}(t,\xi) \underset{\xi\to 0}{\sim} \sum_{j=0}\mathbf{F}_j(t)\xi^{0,5j}$, в котором слагаемое $\mathbf{F}_0(t) = \begin{pmatrix}\mathbf{F}_{011} & \mathbf{F}_{012}\\ \mathbf{F}_{021} & \mathbf{F}_{022}\end{pmatrix}$ определено соотношениями: $\mathbf{F}_{022} = -\left(\mathbf{F}_{011}\right)^*$, $\mathbf{F}_{011} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{rb_\varphi}{\sqrt{\delta}} \\ \dfrac{A^{23}A_1^3}{A^{33}} - A_1^2 & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{F}_{012} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A^{22} - \dfrac{(A^{23})^2}{A^{33}}\end{pmatrix}$, $\mathbf{F}_{021} = \begin{pmatrix} A^{11} + \dfrac{(A_1^3)^2}{A^{33}} & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Непосредственными вычислениями получаем, что собственные значения λ матрицы $\mathbf{F}_0$ удовлетворяют уравнению: $\left[\lambda^2 + \dfrac{rb_\varphi}{\sqrt{\delta}}\left(A_1^2 - \dfrac{A^{23}A_1^3}{A^{33}}\right)\right]^2 + \left(\dfrac{rb_\varphi}{\sqrt{\delta}}\right)^2\left[A^{22} - \dfrac{\left(A^{23}\right)^2}{A^{33}}\right]\left[A^{11} + \dfrac{\left(A_1^3\right)^2}{A^{33}}\right] = 0$. Поскольку матрица $\left(A^{ij}\right)$ положительно определена, то величины A^{11} и $A^{22} - \left(A^{23}\right)^2 \big/ A^{33}$ всегда положительны для любого функционального параметра $f_s(\nu)$. Поэтому рассматриваемая точка t не будет точкой поворота [4] тогда и только тогда, когда величина $r(t)b_\varphi(t)$ не обращается в нуль в окрестности точки t. Иными словами, если рассматриваемая точка t не является точкой перегиба образующей оболочки вращения [5], то характеристическое уравнение имеет четыре различных комплексных корня. Подводя итог всего изложенного в этом разделе, приходим к утверждению, вытекающему из теоремы 3:

Следствие 3. Если в окрестности рассматриваемой точки t отсутствуют точки перегиба образующей базовой поверхности оболочки вращения, то однородная система уравнений в задаче осесимметричного изгиба в результате симплектического преобразования $\mathbf{y}_b(t)=\mathbf{S}_b(t,\xi)\mathbf{z}_b(t)$, матрица которого имеет асимптотическое представление вида $\mathbf{S}_b(t,\xi) \underset{\xi\to 0}{\sim} \xi^{-0,75}\sum_{j=0}\mathbf{S}_{bj}(t)\xi^{0,25j}$, приводится к блочно-диагональной гамильтоновой системе

$$\frac{d\mathbf{z}_b(t)}{dt}=\begin{pmatrix}\mathbf{D}_b(t,\xi) & 0\\ 0 & -\overline{\mathbf{D}_b(t,\xi)}\end{pmatrix}\mathbf{z}_b(t),\qquad \mathbf{D}_b(t,\xi)=\begin{pmatrix}\Lambda_K(t,\xi) & 0 & 0\\ 0 & \overline{\Lambda_K(t,\xi)} & 0\\ 0 & 0 & \Lambda_F(t,\xi)\end{pmatrix},$$ где

$$\Lambda_K(t,\xi) \underset{\xi\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\xi}}\lambda_K+\sum_{j=1}\lambda_{Kj}(t)\xi^{j/2},\qquad \Lambda_F(t,\xi) \underset{\xi\to 0}{\sim} \frac{1}{\xi}\lambda_F+\sum_{j=1}\lambda_{Fj}(t)\xi^{j},\qquad \lambda_F=\sqrt{f_{ss}A^{33}},$$

$$\lambda_K=\sqrt{\frac{rb_\varphi}{\sqrt{\delta}}\left\{-A_1^2+\frac{A^{23}A_1^3}{A^{33}}+i\sqrt{\left[A^{22}-\frac{\left(A^{23}\right)^2}{A^{33}}\right]\left[A^{11}+\frac{\left(A_1^3\right)^2}{A^{33}}\right]}\right\}}.$$ Здесь $i^2=-1$, а под символом «$\sqrt{\ }$» понимается арифметическая ветвь квадратного корня.

Доказательство. Преобразование (42) можно рассматривать как симплектический переход от $\mathbf{x}_b$ к вектору неизвестных $\mathbf{B}_{2,1}\mathbf{z}_b$, которому соответствует однородная гамильтонова система уравнений. Вводя в рассмотрение вектор неизвестных $\mathbf{y}_h=\mathbf{B}_{2,1}\begin{pmatrix}\mathbf{y}_1\\ \mathbf{y}_2\end{pmatrix}$, приходим к гамильтоновому аналогу однородных систем (44). Переход от аналога к окончательной диагональной гамильтоновой системе уравнений осуществим при помощи блочно-диагональной симплектической матрицы.

Анализ поведения решения однородной системы (48) из [1] в окрестности точки поворота требует подробной информации о характере точки перегиба, и проводить подобное исследование в общем случае нецелесообразно. Частный случай этой проблемы, связанный с исследованием задачи изгиба круглой пластины, будет рассмотрен в следующем разделе.

5. Асимптотический анализ решений однородной системы уравнений осесимметричного изгиба пластины и конической оболочки вращения

Как и раньше, поместим начало координатной системы O в вершину конуса, а ось X направим по оси вращения; тогда осесимметричный изгиб конической оболочки описывается системой (48) из [1], в которой, согласно (38) данной работы, положим $r(t)=t\sin\psi$, $\dot r(t)=\sin\psi$, $r(t)b_\varphi(t)=-\cos\psi$. Тогда анализ соотношений (48) из [1] позволяет заключить: точка $t=0$ является полюсом первого порядка для матричной функции $\mathbf{H}_b(t)$, то есть вершина конуса $t=0$ — это регулярная особая точка, и поведение решения в её окрестности может быть исследовано на основании теоремы 5, если известны спектральные характеристики матрицы $\mathbf{H}_b(t)$ в точке $t=0$.

С целью упрощения выкладок полезно сделать преобразование в системе (48) из [1]: $\mathrm{v}_{b1}=(\sin\psi)^{0,5}\mathrm{u}_1$, $\mathrm{q}_{b1}=(\sin\psi)^{-0,5}\mathrm{p}_1$, $\mathrm{v}_{b2}=(\sin\psi)^{-0,5}\mathrm{u}_2$, $\mathrm{q}_{b2}=(\sin\psi)^{0,5}\mathrm{p}_2$, $\mathrm{v}_{b3}=(\sin\psi)^{-0,5}\mathrm{u}_3$, $\mathrm{q}_{b3}=(\sin\psi)^{0,5}\mathrm{p}_3$. После умножения преобразованной системы на t приходим к системе, однородная часть которой имеет вид: $t\dfrac{d\mathbf{x}(t)}{dt}=\left[\mathbf{G}_0+t\mathbf{G}_1(t)+t^2\mathbf{G}_2(t)\right]\mathbf{x}(t)$, где $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{p}\end{pmatrix}$,

$\mathbf{G}_\alpha = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{\alpha uu} & \mathbf{G}_{\alpha up} \\ \mathbf{G}_{\alpha pu} & \mathbf{G}_{\alpha pp} \end{pmatrix}$. Здесь матрицы $\mathbf{G}_\alpha$ ($\alpha = 0,1,2$) определены в [1] (см. соотношения (45)), а их ненулевые элементы равны $G^{ij}_{0uu} = -A^i_j$, $G^{ij}_{0up} = A^{ij}$, $G^{ij}_{0up} = A_{ij}$, $G^{12}_{1uu} = -\dfrac{\cos\psi}{\varepsilon\sin\psi}$, $G^{33}_{2pu} = \dfrac{\delta\sin\psi}{\varepsilon^2}$ $(i, j = 1,2,3)$. Если в этих уравнениях положить $\sin\psi = 1$, $\cos\psi = 0$, то получим однородную систему, связанную с центрально симметричной задачей изгиба пластины. При этом, как видно из приведённых выше соотношений, изменения коснутся только матриц $\mathbf{G}_1$ и $\mathbf{G}_2$. Это означает, что характер поведения решений преобразованной однородной системы, отвечающей изгибу, в вершине конуса асимптотически (при $t \to 0$) не зависит от угла раствора и полностью определяется матрицей $\mathbf{G}_0$.

Характеристическое уравнение $\det\left(\mathbf{G}_0 - \lambda\mathbf{E}_6\right) = 0$ несложными преобразованиями можно привести к виду

$$\det\left[\left(A^{ij}\right)\left(A_{ij}\right) + \left(A^{ij}\right)\mathbf{A}^{s\varphi}\left(A^{ij}\right)\mathbf{A}^{s\varphi} - \lambda^2\mathbf{E}_3\right] = 0 . \tag{46}$$

Поскольку, согласно определениям (45) из [1], матрицы $\left(A_{ij}\right)$ и $\left(A^{ij}\right)$, соответственно, неотрицательно и положительно определены, то из соотношения (46) данной работы следует, что все корни характеристического уравнения вещественны. Отсюда, на основании теоремы 5, можно сделать вывод, что при отсутствии кратных корней у характеристического уравнения (46) фундаментальную систему решений однородной системы уравнений в задаче изгиба конической оболочки (в частности изгиба пластины) образуют решения вида $t^{\lambda_k}\sum\limits_{j=0}\mathbf{x}_j t^j$, где λ_k — один из корней уравнения (46). Как следует из общей теории [4], для рассматриваемого класса оболочек вращения этот ряд является сходящимся с бесконечным радиусом сходимости. Если же у характеристического уравнения (46) имеются кратные корни, то часть решений однородной системы уравнений изгиба представима в виде рядов с бесконечным радиусом сходимости $t^\lambda \sum\limits_{k=0}^{k_\lambda}\sum\limits_{j=0}\mathbf{x}_{kj}(\ln t)^k t^j$; здесь $1 + k_\lambda$ — кратность решения λ уравнения (46), и всегда $k_\lambda \le 2$.

Заметим, что формулировать результаты проведённого анализа в виде некоторого утверждения о симплектическом переходе к простейшей из возможных гамильтоновых систем подобно тому, как это сделано выше, нецелесообразно, поскольку существует более эффективный путь численной реализации полученных соотношений [12], [13]. Установленные выше типы решений однородных уравнений позволяют искать решения однородной задачи в виде разложений данного вида с неопределёнными коэффициентами. В результате получается система рекуррентных векторных уравнений, которую реализовать на ЭВМ проще, чем матричные соотношения.

Перейдём к рассмотрению поведения решений однородных уравнений изгиба конической оболочки на бесконечности. По сложности эта задача сопоставима с асимптотическим по малому параметру ξ анализом уравнений изгиба, проведённым ранее. Исследуем далее не исходную гамильтонову систему дифференциальных уравнений (40), а модифицированную $\mathbf{J}_{2,3}$-симметричную систему (43). Учитывая соотношения (38), придём к системе

$$\frac{d\mathbf{z}_b(t)}{dt}=\left(\mathbf{G}_{b0}+\frac{1}{t}\mathbf{G}_{b1}+\frac{1}{t^2}\mathbf{G}_{b2}\right)\mathbf{z}_b(t),\quad \mathbf{G}_{b0}=\frac{1}{\xi}\mathbf{H}_0,$$
$$\mathbf{G}_{b1}=\frac{1}{\sin\psi}\mathbf{H}_1,\quad \mathbf{G}_{b2}=\frac{\xi}{\sin^2\psi}\mathbf{H}_2, \tag{47}$$

где элементы постоянных по t матриц $\mathbf{H}_0$ и $\mathbf{H}_1$ определены соотношениями (43). Поскольку матрица $\mathbf{G}_{b0}$ уже имеет блочно-диагональный вид, то для дальнейшего упрощения этой системы можно воспользоваться теоремой 4.

Применяя соотношения (32) к системе (47), построим преобразование $\mathbf{z}_b=\mathbf{T}(t)\begin{pmatrix}\mathbf{y}_1\\ \mathbf{y}_2\end{pmatrix}$, $\mathbf{y}_1(t)\in\mathbb{R}^4$, $\mathbf{y}_2(t)\in\mathbb{R}^2$, $\mathbf{T}(t)\underset{t\to\infty}{\sim}\mathbf{E}_6+\sum_{j=2}^{\infty}\mathbf{T}_j t^{-j}$, переводящее систему (47) в $\mathbf{J}_{2,3}$-симметричную систему, которая, подобно (44), распадается на две гамильтоновых:

$$\frac{d\mathbf{y}_\alpha}{dt}=\mathbf{F}_{\alpha\alpha}(t)\mathbf{y}_\alpha,\ \mathbf{F}_{\alpha\alpha}(t)\underset{t\to\infty}{\sim}\sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{F}_{j\alpha\alpha}t^{-j},\ \mathbf{F}_{0\alpha\alpha}=\frac{1}{\xi}\mathbf{H}_{0\alpha\alpha};\ \mathbf{F}_{1\alpha\alpha}=\frac{1}{\sin\psi}\mathbf{H}_{1\alpha\alpha}\ (\alpha=1,2). \tag{48}$$

Как и в случае, рассмотренном в разделе 4, собственные значения матрицы $\mathbf{F}_{022}$ всегда различны, а потому на основании теоремы 4 заключаем, что фундаментальная система решений однородной гамильтоновой системы уравнений второго порядка, которой удовлетворяет вектор-функция $\mathbf{y}_2$ $(\alpha=2)$, имеет асимптотическое при $t\to\infty$ представление вида $\left[\mathbf{E}_2+\sum_{j=1}\mathbf{S}_{22j}t^{-j}\right]\exp\begin{pmatrix}t\lambda_F/\xi & 0\\ 0 & -t\lambda_F/\xi\end{pmatrix}$, где матрица, стоящая в квадратных скобках, является симплектической.

При анализе второй $(\alpha=1)$ однородной гамильтоновой системы относительно вектор-функции $\mathbf{y}_1$, как отмечено ранее, возникают два принципиально разных случая: $b_\varphi>0$ и $b_\varphi=0$. Первый из них связан с собственно конической оболочкой, когда $\cos\psi>0$, а второй $(\cos\psi=0)$ описывает центрально симметричный изгиб круглой пластины.

В случае $\cos\psi>0$ в системе (48) $(\alpha=1)$ делаем срезающее преобразование $\mathrm{v}_{11}=t^{-0,25}\mathrm{u}_{11}$, $\mathrm{v}_{12}=t^{0,25}\mathrm{u}_{12}$, $\mathrm{q}_{11}=t^{0,25}\mathrm{p}_{11}$, $\mathrm{q}_{12}=t^{-0,25}\mathrm{p}_{12}$ и после перехода от независимой переменной t к аргументу $\tau=\sqrt{t}$ получаем однородную систему

$$\frac{d\mathbf{x}_1(\tau)}{d\tau}=\mathbf{F}_c(\tau)\mathbf{x}_1(\tau),\quad \mathbf{F}_c(\tau)\underset{\tau\to\infty}{\sim}\sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{F}_{cj}\tau^{-j},\quad \mathbf{F}_{cj}=\begin{pmatrix}\mathbf{F}_{cj11} & \mathbf{F}_{cj12}\\ \mathbf{F}_{cj21} & \mathbf{F}_{cj22}\end{pmatrix}, \tag{49}$$

где $\mathbf{F}_{c011}=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{-\mathrm{ctg}\psi}{\sqrt{\delta}}\\ \dfrac{A^{23}A_1^3-A^{33}A_1^2}{\xi A^{33}} & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{F}_{c012}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \dfrac{A^{22}A^{33}-(A^{23})^2}{\xi A^{33}}\end{pmatrix}$, $\mathbf{F}_{c021}=\begin{pmatrix}\dfrac{A^{11}A^{33}+(A_1^3)^2}{\xi A^{33}} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Собственные числа λ матрицы $\mathbf{F}_{c0}$ удовлетворяют соотношениям:

$$\lambda = \lambda_K \sqrt{\frac{\mathrm{ctg}\psi}{\xi\sqrt{\delta}}}\,, \qquad \left[\lambda_K^2 - \left(A_1^2 - \frac{A^{23}A_1^3}{A^{33}}\right)\right]^2 + \left[A^{22} - \frac{\left(A^{23}\right)^2}{A^{33}}\right]\left[A^{11} + \frac{\left(A_1^3\right)^2}{A^{33}}\right] = 0. \qquad (50)$$

Поскольку, в силу определения (45) из [1], матрица $\left(A^{ij}\right)$ положительно определена и в рассматриваемом случае $\mathrm{ctg}\psi > 0$, то характеристическое уравнение имеет четыре различных комплексных корня. Это означает, что фундаментальная система решений однородной гамильтоновой системы уравнений второго порядка, которой удовлетворяет вектор-функция $\mathbf{y}_1$, состоит из решений, имеющих асимптотическое при $t \to \infty$ представление вида $\exp\left(\lambda_K \sqrt{t\dfrac{\mathrm{ctg}\psi}{\xi\sqrt{\delta}}}\right)\sum\limits_{j=0} \mathbf{c}_j t^{-0,25j}$, где λ_K — решение уравнения (50), а $\mathbf{c}_j \in \mathbb{C}^4$ — постоянные векторы.

Эти решения по характеру зависимости от параметра ξ совпадают с решениями системы (45) вне окрестности точки поворота. Различие между поведением решений в окрестности точки поворота и за её пределами можно почувствовать, сравнивая между собой полученные выше решения с решениями однородной системы уравнений центрально симметричного изгиба круглой пластины.

В последнем случае срезающее преобразование, в результате которого получена система (49), не приводит к упрощению задачи, поскольку $\cos\psi = 0$. Поэтому в системе (48) при ($\alpha = 1$) делаем следующее преобразование: $\mathrm{v}_{11} = t^{-0,5}\mathrm{u}_{11}$, $\mathrm{v}_{12} = t^{0,5}\mathrm{u}_{12}$, $\mathrm{q}_{11} = t^{0,5}\mathrm{p}_{11}$, $\mathrm{q}_{12} = t^{-0,5}\mathrm{p}_{12}$; тогда после замены независимой переменной t на $\tau = 1/t$ приходим к однородной гамильтоновой системе $\tau\dfrac{d\mathbf{x}_1(\tau)}{d\tau} = \mathbf{F}_p(\tau)\mathbf{x}_1(\tau)$, $\mathbf{F}_p(\tau) \underset{\tau\to\infty}{\sim} \sum\limits_{j=0}^{\infty}\mathbf{F}_{pj}\tau^j$, где

$$\mathbf{F}_{p0} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{p011} & \mathbf{F}_{p012} \\ \mathbf{F}_{p021} & \mathbf{F}_{p022} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F}_{p011} = \frac{1}{\xi A^{33}}\begin{pmatrix} 0 & \xi\left(A_1^3 A_3^1 - A_1^1 A^{33}\right) \\ A^{23}A_1^3 - A^{33}A_1^2 & \xi\left(A_2^3 A^{23} - A_2^2 A^{33}\right) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F}_{p012} = \frac{1}{\xi A^{33}}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} 0 & \xi\left(A^{12}A^{33} - A^{13}A^{23}\right) \\ \xi\left(A^{12}A^{33} - A^{13}A^{23}\right) & A^{22}A^{33} - \left(A^{23}\right)^2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F}_{p021} = \frac{1}{\xi A^{33}}\begin{pmatrix} A^{11}A^{33} + \left(A_1^3\right)^2 & \xi\left(A_{12}A^{33} + A_1^3 A_2^3\right) \\ \xi\left(A_{12}A^{33} + A_1^3 A_2^3\right) & 0 \end{pmatrix},$$

то есть точка $t = \infty$ — это регулярная особая точка для системы (48) при $\alpha = 1$.

Собственные числа λ матрицы F_{p0} являются решениями одного из уравнений:

$$\left(A^{33}\right)^2\lambda^2 \pm \lambda A^{33}\left(A_1^3 A_3^1 - A_2^3 A^{23} - A_1^1 A^{33} + A_2^2 A^{33}\right) +$$
$$+\left(A_1^3 A_3^1 - A_1^1 A^{33}\right)\left(A_2^2 A^{33} - A_2^3 A^{23}\right) - \left(A^{12}A^{33} - A^{13}A^{23}\right)\left(A_{12}A^{33} + A_1^3 A_2^3\right) = 0\,, \qquad (51)$$

и любое решение системы (48) в случае задачи осесимметричного изгиба круглой пластины имеет асимптотическое при $t \to \infty$ представление вида $t^{\lambda}\sum\limits_{k=0}^{k_\lambda}\sum\limits_{j=0}\mathbf{y}_{1kj}(\ln t)^k t^{-0,5j}$, где $1 + k_\lambda$ — кратность решения λ уравнения (51), и всегда $k_\lambda \le 1$. Сравнивая эти решения с решениями аналогичной системы для конической оболочки, видим, что экспоненциальный характер решений однородной системы уравнений изгиба трансформировался в степенной. Подытожим всё изложенное в этом разделе в виде следствия из теорем 4 и 5:

Следствие 4. Решения однородной системы уравнений осесимметричного изгиба как конической оболочки, так и круговой пластины в окрестности геометрически особой точки (вершины конуса или центра круга) представимы в виде рядов с бесконечным радиусом сходимости $t^{\lambda}\sum_{k=0}^{k_\lambda}\sum_{j=0}\mathbf{x}_{0kj}(\ln t)^k t^j$; здесь $1+k_\lambda$ — кратность вещественного корня λ уравнения (46) и $k_\lambda \le 2$; коэффициенты разложений зависят от угла раствора конуса ψ. В окрестности бесконечно удалённой точки фундаментальная система решений однородных уравнений изгиба конической оболочки состоит из двух вектор–функций, имеющих асимптотические при $t\to\infty$ представления вида $\exp\left[(-1)^k\lambda_F\, t/\xi\right]\sum_{j=0}\mathbf{x}_{\infty kj}t^{-j}$, где $\lambda_F=\sqrt{f_{ss}A^{33}}$ и $k=0,1$, и четырёх вектор-функций типа $\exp\left(\lambda_K\sqrt{t\dfrac{\operatorname{ctg}\psi}{\xi\sqrt{\delta}}}\right)\sum_{j=0}\mathbf{c}_j t^{-0,25j}$, где λ_K — одно из решений характеристического уравнения (50). Если конус вырождается в пластину $(\psi=\pi/2)$, то решения второй группы заменяются на решения вида $t^{\lambda}\sum_{k=0}^{k_\lambda}\sum_{j=0}\mathbf{y}_{1kj}(\ln t)^k t^{-0,5j}$, где $1+k_\lambda$ — кратность решения λ уравнения (51) и $k_\lambda\le 1$.

6. Асимптотические представления решений краевых задач осесимметричного деформирования оболочек вращения

Информация о характере решений однородных уравнений статики оболочек вращения, полученная в разделах 3, 4 и 5, позволяет сделать некоторые качественные выводы о представлении решения краевой задачи осесимметричного деформирования замкнутой в окружном направлении оболочки вращения. Так на основании следствия 1 можно сделать вывод, что для оболочки вращения с образующей, обладающей достаточной гладкостью на конечном промежутке $[t_l,t_r]$ и не имеющей общих точек с осью вращения, решение любой краевой задачи с естественными краевыми условиями [1] асимптотически при $\xi\to 0$ может быть представлено в виде $\sum_{j=0}\mathbf{y}_{t0j}(t)\xi^{j-0,5}+e^{(t_l-t)/\Delta_T}\sum_{j=0}\mathbf{y}_{tlj}(t)\xi^{j-0.5}+e^{(t-t_r)/\Delta_T}\sum_{j=0}\mathbf{y}_{trj}(t)\xi^{j-0,5}$, где согласно (37) $\Delta_T=\xi\sqrt{\Delta_\gamma}\Big/\sqrt{f_{\varphi\varphi}D_\gamma^0}$.

Первая сумма в этом соотношении является асимптотическим разложением частного решения неоднородной системы уравнений кручения (44) из [1]. Её вид определяется характером зависимости правой части исходной системы уравнений от параметра $\xi=\varepsilon/\sqrt{\delta}$ и характером асимптотического разложения по параметру ξ нормализирующего преобразования из следствия 1.

Вторую и третью суммы называют погранслойными функциями [12]: они описывают краевые эффекты вблизи торцов и не возникают при решении задачи кручения в рамках классической теории оболочек [14]–[16]. По-видимому, впервые погранслойные функции такого типа рассматривались в работе [17], и в некоторых публикациях их называют погранслойными функциями Фридрихса. Погранслойная функция очень быстро затухает при удалении от края оболочки, в окрестности которого она описывает краевой эффект. Число Δ_T характеризует линейный размер пограничного слоя: чем это число больше, тем менее чётко выражен краевой эффект. В силу леммы 3 размер пограничного слоя в задаче кручения ограничен сверху константой, обуславливаемой только механическими характеристиками материала оболочки и параметром ξ; если же функциональный параметр $f_\varphi(\nu)$ является быстро осциллирующей функцией нормальной координаты ν, то зона пограничного слоя может стать сколь угодно малой. Это означает, что напряжённо-деформированное состояние вблизи краёв оболочки, определяемое по рассматриваемой в этой работе модели, может значительно изменяться в зависимости от выбора функционального параметра $f_\varphi(\nu)$, отвечающего за распределение поперечных компонент тензора напряжений по толщине оболочки.

Качественно более разнообразная картина наблюдается при асимптотическом анализе краевых задач осесимметричного изгиба оболочки вращения. Согласно следствию 3 решение любой краевой задачи с естественными краевыми условиями асимптотически при $\xi \to 0$ может быть представлено в виде

$$\sum_{j=0} \mathbf{y}_{b0j}(t)\xi^{(j-3)/4} + e^{(t_l-t)/\Delta_F}\sum_{j=0} \mathbf{y}_{blj}(t)\xi^{(j-3)/4} + e^{(t-t_r)/\Delta_F}\sum_{j=0} \mathbf{y}_{brj}(t)\xi^{(j-3)/4} + e^{(t_l-t)/\Delta_K}\sum\left[\sin\left(\frac{t_l-t}{\Delta_S}\right)\mathbf{y}_{slj}(t) + \right.$$

$$\left. + \cos\left(\frac{t_l-t}{\Delta_S}\right)\mathbf{y}_{clj}(t)\right]\xi^{(j-3)/4} + e^{(t-t_r)/\Delta_K}\sum_{j=0}\left[\sin\left(\frac{t_l-t}{\Delta_S}\right)\mathbf{y}_{srj}(t) + \cos\left(\frac{t_l-t}{\Delta_S}\right)\mathbf{y}_{crj}(t)\right]\xi^{(j-3)/4},$$

где в обозначениях из следствия 3 раздела 4 имеют место равенства: $\Delta_F = \dfrac{\xi}{\lambda_F}$, $\Delta_K + i\Delta_S = \dfrac{\sqrt{\xi}}{\lambda_K}$ (λ_F, λ_K — корни алгебраических уравнений из следствия 3).

Первая сумма, как и в случае задачи кручения, даёт представление о характере асимптотического разложения частного решения неоднородной системы уравнений изгиба (48) из [1]. Вторая группа слагаемых асимптотически отвечает в задаче изгиба за краевые эффекты типа Фридрихса, которые, как и в задаче кручения, зависят от выбора функционального параметра $f_s(\nu)$ и не возникают в Кирхгофовской модели оболочки. Функции этого типа не «размазываются», а локализуются вблизи края в некоторой окрестности, максимальный размер которой зависит только от толщины оболочки и жесткостных свойств её материала.

Что же касается оставшихся двух сумм, то они описывают погранслои, присущие решениям классической теории оболочек вращения, основанной на гипотезах Кирхгофа–Лява. Погранслои этого типа возникают при условии, что края оболочки $t = t_l$ и $t = t_r$ не являются точками поворота — точками перегиба образующей базовой поверхности оболочки вращения. Иначе, как показано в разделе 5, происходит перестройка погранслойных функций.

К сожалению, полученные разложения трудно реализуются на ЭВМ, ибо для их построения необходимо уметь дифференцировать функции, описывающие как геометрию оболочки, так и действующие на неё нагрузки. Кроме того, очень непросто оценить реально возникающую погрешность, поскольку разложения являются асимптотическими при $\xi \to 0$, а коэффициенты этих рядов представляют собой функции независимой переменной t. Если ограничиться определённым классом поверхностей вращения и действующих нагрузок, то можно построить асимптотические разложения решений краевых задач аналогично тому, как получены разложения для конической оболочки вблизи и вдали от её вершины. Для подобных разложений разработаны надёжные методы оценки точности по числу удерживаемых членов асимптотического ряда [12], [13]. Основным недостатком представленного подхода к решению краевых задач являются сильные ограничения на геометрию оболочки и на характер её нагружения. Поэтому необходимы эффективные алгоритмы решения краевых задач для оболочек вращения, свободные от чрезмерных ограничений как на коэффициенты системы линейных дифференциальных уравнений, так и на вектор правых частей и позволяющие оценивать действительную точность полученного приближённого решения. Один из возможных подходов к решению этой проблемы готовится авторами настоящей работы к опубликованию.

Литература

1. *Киреев И.В., Немировский Ю.В.* Гамильтонова формализация определяющих соотношений линейной теории оболочек вращения // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2010. – Т. 3, № 4. – С. 29-52.
2. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. – М. Наука, 1989. – 472 с.
3. *Гребенников Е.А*. Метод усреднения в прикладных задачах. – М.: Наука, 1986. – 256 с.
4. *Вазов В*. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – *М.: Мир, 1968. – 464 с.*
5. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия: Методы и приложения. – М.: Наука, 1979. – 760 с.
6. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 538 с.
7. *Белман Р.* Введение в теорию матриц. *– М.: Наука, 1976. – 352 с.*
8. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 742 с.
9. *Stenger F.* Error Bounds for Asymptotic Solutions of Differential Equations, I. The Distinct Eigenvalue Case // J. Res. NBS, Math. and Math. Phys. – 1966. – V. 70B. – P. 167-186.
10. *Stenger F.* Error Bounds for Asymptotic Solutions of Differential Equations, II The General Case // J. Res. NBS, Math. and Math. Phys. – 1976. – V. 70B. – P. 187-210.
11. *Киреев И.В, Немировский Ю.В.* Асимптотический анализ упругого осесимметричного состояния тонкой многослойной ортотропной оболочки вращения: Препр. № 5 / ВЦ СО АН СССР. Красноярск, 1985. – 29 с.
12. *Васильева А.Б.* Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных // УМН. – 1962. – Т. 17, № 4. – С. 225-231.
13. *Лизарев А.Д., Клёнов В.И.* Аналитические решения одного класса уравнений с полиномиальными коэффициентами // Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т. 14, № 12. – С. 2158-2173.
14. *Бидерман В.Л.* Механика тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1977. – 488 с.
15. *Черных К.Ф.* Линейная теория оболочек. – Л.: Изд. ЛГУ, 1962. – Ч. 1. – 274 с.
16. *Черных К.Ф.* Линейная теория оболочек. – Л.: Изд. ЛГУ, 1964. – Ч. 2. – 296 с.
17. *Friedrics K.O., Dressler R.F.* Boundary-layer theory for elastic plates // Comm. Pure & Appl. Math. – 1961. – V. 14. – P. 1-33.

Поступила в редакцию 15.06.10

Сведения об авторах

Киреев Игорь Валериевич, кфмн, нс, Институт вычислительного моделирования СО РАН (ИВМ СО РАН), 660036, Красноярск, Академгородок, 50, строение 44; E-mail: kiv@icm.krasn.ru

Немировский Юрий Владимирович, дфмн, проф., гнс, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН ((ИТПМ СО РАН), 630090, Новосибирск, ул. Институтская, д. 4/1; E-mail: nemirov@itam.nsc.ru