

УДК 539.3

## ЭФФЕКТИВНЫЕ ЖЕСТКОСТИ ГОФРИРОВАННОЙ ПЛАСТИНЫ

С.В. Шешенин, О.А. Ходос

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

Представлена численная реализация метода осреднения для гофрированных пластин, периодических в плане. Разработанная методика позволяет рассчитать продольные и изгибные жесткости, а также жесткости взаимного влияния. В вычислительном смысле данная проблема достаточно трудна, поскольку в одной и той же пластине жесткости различаются на несколько порядков. Преимущество осредненной модели заключается в существенной экономии вычислительных ресурсов. Для анализа напряженно-деформированного состояния в первом приближении достаточно вычислить все эффективные жесткости для периодической ячейки и затем с ними решить задачу изгиба плоской пластины. Точность решения методом осреднения в большой степени зависит от характера решения задачи: так, для плавно изменяющейся поперечной нагрузки и больших размеров пластины она достаточно высокая. Проведена верификация разработанной программы вычисления эффективных жесткостей.

*Ключевые слова:* периодическая гофрированная пластина, метод осреднения, эффективные жесткости

## EFFECTIVE STIFFNESS OF CORRUGATED PLATE

S.V. Sheshenin and O.A. Hodos

*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

This paper presents a homogenization technique applied to periodic in-plane corrugated plates. The developed method allows the calculation of the tension stiffness, the bending stiffness and the tension-bending coupled stiffness. This problem is computationally difficult because the stiffness values differ by several orders of magnitude in one and the same plate. The use of the model permits a substantial saving in computing resources. For the stress-strain analysis of the plate in a first approximation, it is sufficient to compute all the effective stiffness values for a periodic cell and then to use these values in the solution of the flat plate bending problem. The accuracy of the solution depends on the character of the problem. For a smoothly varying transverse load and a large-size plate, the accuracy is high enough. The validity of the computer program developed for calculating the effective stiffness of corrugated plates has been verified.

*Keywords:* periodic corrugated plate, method of homogenization, effective stiffness

Целью данной работы является численная реализация методики осреднения [1] в приложении к задаче изгиба упругих гофрированных пластин, периодических в плане. Использование метода осреднения позволяет вычислить не только эффективные жесткости гофрированной пластины, но и все характеристики напряженно-деформированного состояния благодаря сочетанию решения локальных задач — задач для ячеек периодичности, с решением глобальной задачи для осредненной плоской пластины.

Историю развития асимптотического анализа деформирования неоднородных линейно упругих пластин можно проследить по работам [2–7]. Применение асимптотического метода к задаче изгиба плоской слоистой пластины приводит в первом приближении к уравнениям классической теории слоистых пластин [8], а в случае однородной пластины — к уравнениям теории тонких оболочек Кирхгоффа–Лява. Методика осреднения, совмещенная с линеаризацией, получила распространение на случай нелинейных определяющих соотношений [9].

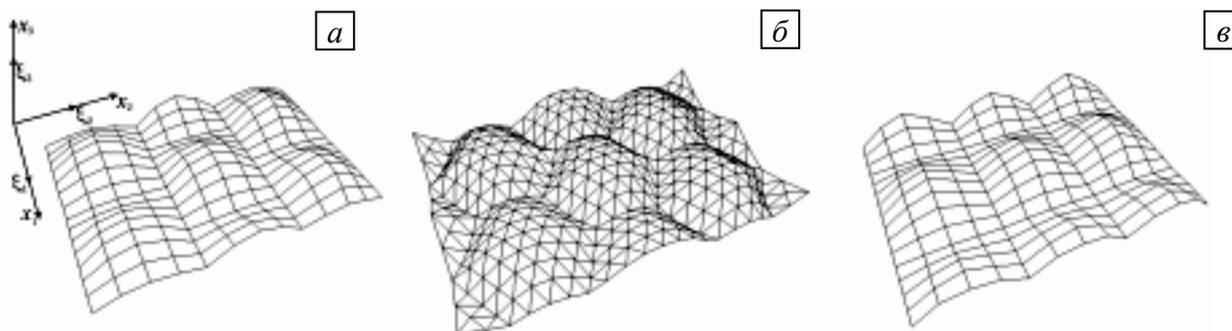


Рис. 1. Периодические в плане пластины: со смещенной четырехугольной ячейкой (а), сотовая (б), с четырехугольной ячейкой (в)

Вообще говоря, в гофрированных пластинах периодичность касается не только формы, но и свойств, однако далее в настоящей работе материал рассматриваемых пластин (Рис. 1) полагается однородным. Прежде всего для таких пластин встает вопрос определения эффективных жесткостей. Частично подобная проблема решалась численно и экспериментально в [10] для пластины с шестиугольной ячейкой периодичности. Численное решение получалось путем конечно-элементного моделирования всей пластины, состоящей из большого числа ячеек периодичности. Следует учесть, что у гофрированной пластины жесткости растяжения, изгиба и взаимного влияния различаются на порядки, и, чтобы меньшие из них вычислялись с приемлемой точностью, требуется достаточно мелкая конечно-элементная сетка. Метод осреднения является двухсеточным и позволяет решать как локальную задачу на ячейке периодичности, так и осредненную глобальную задачу для всей пластины, обеспечивая одинаковую точность их решения. Поскольку в методе осреднения для вычисления всех жесткостей периодической пластины достаточно осуществить процедуру расчета только для одной ячейки, использование мелкой сетки не приводит к чрезмерным вычислительным затратам.

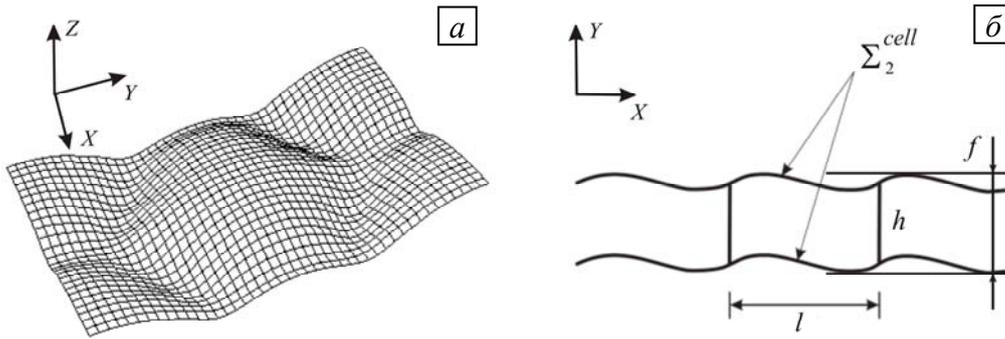
Существуют два подхода к осреднению для тонкой упругой гофрированной пластины, периодической в плане. Во-первых, осреднение может применяться к уравнениям трехмерной теории упругости, во-вторых, — к уравнениям теории оболочек. Возможна также комбинация этих подходов. Далее рассматривается только первый подход.

Необходимо отметить, что методика осреднения, применяемая к пластинам, отличается от методики для трехмерной или двумерной периодической среды [11]. Отличительная особенность заключается в том, что в случае пластин необходимо выполнять граничные условия на лицевых поверхностях пластины.

Формально видоизменение метода осреднения для пластины состоит в том, что перемещения  $u_i$  представляются как функции двух медленных координат  $x_1, x_2$  в проекции пластины и трех быстрых координат  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  в пределах ячейки периодичности; связь между координатами задается соотношениями  $\xi_i = x_i/\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — некоторый малый параметр:  $u_i = u_i(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Малый параметр  $\varepsilon$  связан с размером неоднородности формы пластины (Рис. 2), то есть  $\varepsilon = l/L$ , где  $l$  — характерная длина ячейки периодичности, а  $L$  — характерный размер самой пластины.

Перемещения записываются как  $u_i = u_i^e + u_i^b$ , где  $u_i^e$  — перемещения, связанные с продольными деформациями в отсчетной плоскости пластины, а  $u_i^b$  — перемещения, вызванные изгибом, и представляются в виде рядов:

$$u_i^e = v_i(x_1, x_2) + \sum \varepsilon^m N_{iPQ_0 \dots Q_{m-1}}^e(\xi_1, \xi_2, \xi_3) v_{P, Q_0 \dots Q_{m-1}}(x_1, x_2), \quad (1)$$



**Рис. 2.** Ячейка периодичности сотовой пластины: общий вид с нанесенной мелкой сеткой (а) и план в плоскости  $XZ$  (б);  $\Sigma_2^{cell}$  – суммарная верхняя и нижняя поверхности ячейки,  $l$  – длина ячейки

$$\begin{aligned}
 u_I^b &= -\varepsilon \xi_3 w_{,I}(x_1, x_2) + \sum_{m=2} \varepsilon^m N_{IPQ_0 \dots Q_{m-2}}^b(\xi_1, \xi_2, \xi_3) w_{,PQ_0 \dots Q_{m-2}}(x_1, x_2), \\
 u_3^b &= w(x_1, x_2) + \sum_{m=2} \varepsilon^m N_{3PQ_0 \dots Q_{m-2}}^b(\xi_1, \xi_2, \xi_3) w_{,PQ_0 \dots Q_{m-2}}(x_1, x_2),
 \end{aligned} \tag{2}$$

первые члены которых аналогичны перемещениям, возникающим в однородной плоской пластине:  $v_1, v_2$  — медленно меняющиеся перемещения в отсчетной плоскости,  $v_3 = 0$ ,  $w$  — прогиб,  $N_{iPQ_0 \dots Q_m}^e$  — локальные функции, соответствующие состоянию растяжения в плоскости пластины,  $N_{iPQ_0 \dots Q_m}^b$  — локальные функции изгиба. Здесь и далее используются обозначения, принятые в работе [5]; буквенные индексы  $P, Q_0, \dots, Q_m, I$  пробегает значения 1, 2, а индексы  $i, j, k, l$  — значения 1, 2, 3; в зависимости от контекста символом « $\cdot$ » обозначается частная производная по  $x_I$ , где  $I = 1, 2$ , или по  $\xi_i$ , где  $i = 1, 2, 3$ .

Формулы (1), (2) позволяют выразить напряжения в виде:

$$\sigma_{ij}^e = P_{ijPQ_0} v_{P, Q_0} + \sum_{m=1} \varepsilon^m P_{ijPQ_0 \dots Q_m} v_{P, Q_0 \dots Q_m}, \tag{3}$$

$$P_{ijPQ_0} = C_{ijPQ_0} + C_{ijkl} N_{kPQ_0, l}^e,$$

$$P_{ijPQ_0 \dots Q_m} = C_{ijkQ_m} N_{kPQ_0 \dots Q_{m-1}}^e + C_{ijkl} N_{kPQ_0 \dots Q_{m-1}, l}^e,$$

$$\sigma_{ij}^b = \varepsilon Q_{ijPQ_0} w_{,PQ_0} + \sum_{m=2} \varepsilon^m Q_{ijPQ_0 \dots Q_{m-1}} w_{,PQ_0 \dots Q_{m-1}}, \tag{4}$$

$$Q_{ijPQ_0} = -\xi_3 C_{ijPQ_0} + C_{ijkl} N_{kPQ_0, l}^b,$$

$$Q_{ijPQ_0 \dots Q_{m-1}} = C_{ijkQ_{m-1}} N_{kPQ_0 \dots Q_{m-2}}^b + C_{ijkl} N_{kPQ_0 \dots Q_{m-1}, l}^b,$$

где  $C_{ijkl}$  — упругие модули пластины. При учете первых четырех слагаемых в приближении ( $m = 3$ ) однородные уравнения равновесия выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{i,j} = \frac{1}{\varepsilon} P_{ijPQ_0, j} v_{P, Q_0} + (P_{iQ_1PQ_0} + P_{ijPQ_0Q_1, j}) v_{P, Q_0Q_1} + Q_{ijPQ_0, j} w_{,PQ_0} + \varepsilon (Q_{iQ_1PQ_0} + Q_{ijPQ_0Q_1, j}) w_{,PQ_0Q_1} + \\
 + \varepsilon (P_{iQ_2Q_1PQ_0} + P_{ijPQ_0Q_1Q_2, j}) v_{P, Q_0Q_1Q_2} + \varepsilon^2 (Q_{iQ_2Q_1PQ_0} + Q_{ijPQ_0Q_1Q_2, j}) w_{,PQ_0Q_1Q_2} = 0.
 \end{aligned} \tag{5}$$

В первом приближении локальные задачи (задачи на ячейке периодичности  $V^{cell}$ ) строятся таким образом, чтобы обнулялись коэффициенты при производных  $v_{P, Q}$  и  $w_{,PQ}$

(поскольку в первом приближении остается только производная по переменной с индексом  $Q_0$ , то далее индекс «0» опускается). Эти задачи формулируются следующим образом:

$$\begin{aligned} P_{ijPQ,j} &= 0, & Q_{ijPQ,j} &= 0, & \xi &\in V^{cell}, \\ P_{ijPQ}n_j &= 0, & Q_{ijPQ}n_j &= 0, & \xi &\in \Sigma_2^{cell}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\mathbf{n}$  — вектор внешней нормали к поверхности ячейки,  $\Sigma_2^{cell}$  — верхняя и нижняя поверхности ячейки. Вся же граница  $\Sigma^{cell}$  состоит из двух частей:  $\Sigma^{cell} = \Sigma_2^{cell} + \Sigma_{lateral}^{cell}$ , причем  $\Sigma_2^{cell} = \Sigma^{top} + \Sigma^{bot}$  есть сумма верхней и нижней лицевых поверхностей, как показано на рисунке 2. На боковых поверхностях ячейки периодичности  $\Sigma_{lateral}^{cell}$  ( $\xi_I = \pm l_I^\xi / 2$ ,  $I = 1, 2$ ) ставятся условия периодичности, имеющие вид:

$$\begin{aligned} N_{iPQ}^e \Big|_{\xi_\alpha = l_\alpha^\xi / 2} &= N_{iPQ}^e \Big|_{\xi_\alpha = -l_\alpha^\xi / 2}, & C_{ijkl} N_{kPQ,l}^e n_j \Big|_{\xi_\alpha = l_\alpha^\xi / 2} &= -C_{ijkl} N_{kPQ,l}^e n_j \Big|_{\xi_\alpha = -l_\alpha^\xi / 2}, \\ N_{iPQ}^b \Big|_{\xi_\alpha = l_\alpha^\xi / 2} &= N_{iPQ}^b \Big|_{\xi_\alpha = -l_\alpha^\xi / 2}, & C_{ijkl} N_{kPQ,l}^b n_j \Big|_{\xi_\alpha = l_\alpha^\xi / 2} &= -C_{ijkl} N_{kPQ,l}^b n_j \Big|_{\xi_\alpha = -l_\alpha^\xi / 2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Проекция ячейки периодичности на отсчетную плоскость есть прямоугольник со сторонами  $l_1, l_2$ . Его площадь  $\Sigma^{cell}$  в переменных  $x_1, x_2$  равна  $l_1 l_2$  или  $\varepsilon^2 l_1^\xi l_2^\xi$ , где  $l_1^\xi$  и  $l_2^\xi$  — стороны ячейки периодичности в переменных  $\xi_1, \xi_2$ . Индексы  $P$  и  $Q$  в локальных краевых задачах (6), (7) — свободные параметры, принимающие значения 1, 2.

Для вычисления всех локальных функций  $N_{iPQ}^e$  и  $N_{iPQ}^b$  требуется решить 6 локальных задач с краевыми условиями свободной границы (6) на верхней и нижней поверхностях и условиями периодичности (7) на боковой поверхности. Условия периодичности являются следствием периодичности структуры и означают, что перемещения, напряжения и деформации представляются в виде медленно изменяющихся составляющих, на которые наложены быстро меняющиеся периодические флуктуации. Может показаться, что периодичность структуры является необходимым условием для применения метода осреднения. В действительности это не совсем так, однако периодичность вносит в процесс вычислений существенное упрощение. Поскольку все ячейки одинаковы, то достаточно решить локальную задачу только на одной ячейке. Если локальная задача зависит от медленных координат как от параметров, то она решается независимо для каждой ячейки. Такая ситуация возникает, например, в нелинейных задачах [9].

Краевые задачи (6), (7) можно решить несколькими способами. Выбор способа зависит от толщины листа  $h$ , из которого получена гофрированная пластина. Отношение толщины  $h$  к длине ячейки периодичности  $l$  есть второй (наряду с  $\varepsilon$ ) малый параметр задачи  $\beta = h/l$ . Если  $\beta \approx 1$ , то задачи на ячейке периодичности являются трехмерными и для их решения следует применять МКЭ с трехмерными элементами. Если  $\beta \ll 1$ , то ячейка периодичности представляет собой тонкое тело и для решения локальных задач можно применять МКЭ с оболочечными конечными элементами.

Разрешающее уравнение теории периодических в плане пластин получается из уравнений равновесия усилий и моментов так же, как в теории пластин с плоскими поверхностями. Эти уравнения для произвольной периодической в плане пластины следуют из трехмерных уравнений равновесия [1], если используется определение усилий и моментов, данное в [5]. Исходя из идеи двух масштабов, упругие уравнения

равновесия для пластины можно записать в следующем виде:

$$\sigma_{IJ,x_J} + (1/\varepsilon)\sigma_{Ij,\xi_j} = 0, \quad \sigma_{3J,x_J} + (1/\varepsilon)\sigma_{3j,\xi_j} = 0 \quad (I, J = 1, 2; \quad i, j = 1, 2, 3). \quad (8)$$

Интегрирование соотношений (8) по ячейке периодичности с учетом того, что  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , дает следующее уравнение:  $\frac{1}{\Sigma_{\xi}^{cell}} \left( \int_{V_{\xi}^{cell}} \sigma_{IJ} dV_{\xi} \right)_{,J} + \frac{1}{\varepsilon \Sigma_{\xi}^{cell}} \int_{\Sigma_{\xi}^{top}} S_I d\Sigma_{\xi} = 0$ ,

$\Sigma_{\xi}^{cell} \equiv l_1^{\xi} l_2^{\xi}$ . Переход к записи в усилиях  $N_{IJ} = \frac{\varepsilon}{\Sigma_{\xi}^{cell}} \int_{V_{\xi}^{cell}} \sigma_{IJ} dV_{\xi} = \frac{1}{\Sigma_{\xi}^{cell}} \int_{V_{\xi}^{cell}} \sigma_{IJ} dV$ ,

$\Sigma^{cell} = l_1 l_2 = \varepsilon^2 \Sigma_{\xi}^{cell}$  приводит уравнения равновесия к виду:  $N_{IJ,J} + \frac{1}{\Sigma_{\xi}^{cell}} \int_{\Sigma_{\xi}^{top}} S_I(\mathbf{x}, \xi) d\Sigma_{\xi} = 0$ .

Аналогично (см. [1]) получаются выражения для моментов и перерезывающих сил:

$$M_{IJ} = \frac{1}{\Sigma_{\xi}^{cell}} \int_{V_{\xi}^{cell}} x_3 \sigma_{IJ} dV, \quad Q_I = \frac{1}{\Sigma_{\xi}^{cell}} \int_{V_{\xi}^{cell}} \sigma_{I3} dV. \quad \text{Остальные уравнения равновесия имеют}$$

вид [1]:  $M_{IJ,J} + Q_I = 0$ ,  $Q_{I,I} + p(x) = 0$  (в данной работе  $p$  отвечает значению  $\varepsilon^3 p$  из статьи [1]). Здесь  $S_i = \begin{cases} S_I, & I = 1, 2 \\ S_3, & i = 1, 2, 3 \end{cases}$  — поверхностные силы.

При рассмотрении задачи поперечного изгиба пластины предполагается, что  $\int_{\Sigma_{\xi}^{top}} S_I d\Sigma_{\xi} = 0$ . Например, этот интеграл равен нулю, если пластина нагружена давлением.

В более общем случае можно обозначить  $f_I(x) = \frac{1}{\Sigma_{\xi}^{cell}} \int_{\Sigma_{\xi}^{cell}} S_I(\mathbf{x}, \xi) dV_{\xi}$ . В итоге

получаются 5 уравнений равновесия:

$$N_{IJ,J} + f_I(\mathbf{x}) = 0, \quad M_{IJ,J} + Q_I = 0, \quad Q_{I,I} + p(\mathbf{x}) = 0. \quad (9)$$

В первом приближении напряжения записываются в виде

$$\sigma_{ij} = P_{ijPQ} v_{P,Q} + \varepsilon Q_{ijPQ} w_{,PQ}. \quad (10)$$

Интегрирование (10) с учетом предыдущих выражений усилий и моментов дает определяющие соотношения для осредненной пластины:

$$\begin{aligned} N_{IJ} &= A_{IJPQ} e_{PQ} + B_{IJPQ}^{(1)} \kappa_{PQ}, \\ M_{IJ} &= B_{IJPQ}^{(2)} e_{PQ} + D_{IJPQ} \kappa_{PQ}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $e_{PQ} = v_{P,Q}$ ;  $\kappa_{PQ} = -w_{,PQ}$ . При этом жесткости на растяжение  $A_{IJPQ}$ , на изгиб  $D_{IJPQ}$  и жесткости взаимного влияния  $B_{IJPQ}^{(1)}$ ,  $B_{IJPQ}^{(2)}$  ( $B_{IJPQ}^{(2)} = B_{PQIJ}^{(1)}$ ) вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} A_{IJPQ} &= \frac{\varepsilon}{\Sigma_{\xi}^{cell}} \int_{V_{\xi}^{cell}} P_{IJPQ} dV_{\xi}, & B_{IJPQ}^{(1)} &= \frac{\varepsilon^2}{\Sigma_{\xi}^{cell}} \int_{V_{\xi}^{cell}} -Q_{IJPQ} dV_{\xi}, \\ B_{IJPQ}^{(2)} &= \frac{\varepsilon^2}{\Sigma_{\xi}^{cell}} \int_{V_{\xi}^{cell}} \xi_3 P_{IJPQ} dV_{\xi}, & D_{IJPQ} &= \frac{\varepsilon^3}{\Sigma_{\xi}^{cell}} \int_{V_{\xi}^{cell}} -\xi_3 Q_{IJPQ} dV_{\xi}. \end{aligned} \quad (12)$$

Эти жесткости входят в систему связанных осредненных уравнений равновесия, следующую из (9), (11):

$$\begin{aligned} A_{IJKL} v_{K,LJ} - B_{IJKL}^{(1)} w_{,K LJ} + f_I(\mathbf{x}) &= 0, \\ -B_{IJKL}^{(2)} v_{K,LIJ} + D_{IJKL} w_{,K LIJ} &= p(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (13)$$

Поскольку жесткости  $A_{IJKL}$  имеют порядок  $\varepsilon$ , изгибные жесткости — порядок  $\varepsilon^3$ , а смешанные —  $\varepsilon^2$ , то при асимптотическом анализе целесообразно считать, что  $p(\mathbf{x}) = O(\varepsilon^3)$ , а  $f_I = O(\varepsilon^2)$ . Тогда можно ввести новые силы, так что  $p = \varepsilon^3 \tilde{p}$ ,  $f_I = \varepsilon^2 \tilde{f}_I$ , и система (13) примет вид:

$$\begin{aligned} A_{IJKL} v_{K,LJ} - B_{IJKL}^{(1)} w_{,K LJ} + \varepsilon^2 \tilde{f}_I &= 0, \\ -B_{IJKL}^{(2)} v_{K,LIJ} + D_{IJKL} w_{,K LIJ} &= \varepsilon^3 \tilde{p}. \end{aligned}$$

При этом  $v_I = O(\varepsilon)$ , а  $w = O(1)$ . Таким образом, для вычисления жесткостей (12) необходимо решить локальные задачи (6), (7).

Вычисление жесткостей важно для анализа деформируемости гофрированной пластины и, следовательно, эффективности ее применения в различных технических изделиях, например, в барабанах стиральных машин или в качестве элементов кузовов автомобилей.

Далее приводится сравнение жесткостей трех пластин: пластины со смещенными четырехугольными ячейками (Рис. 1, *а*); пластины с шестиугольными ячейками (сотовой) (Рис. 1, *б*); пластины, составленной из четырехугольных ячеек (Рис. 1, *в*). Используемая в работе сотовая пластина (Рис. 1, *б*) является реальной, изготовленной по специальной технологии, при которой два из шести ребер соты оказываются выпуклыми вверх, в то время как оставшиеся четыре ребра выпуклы вниз (они выделены на рисунке 3 жирными линиями). Пластина утрачивает симметрию при любом повороте осей  $X$  и  $Y$  на  $60^\circ$ . Поэтому эффективные жесткости не изотропны, хотя отклонения ячеек от правильной шестиугольной формы невелики. Для гофрированных пластин небольшое изменение формы приводит к существенным изменениям жесткостей. Две другие пластины (Рис. 1, *а*, *в*) являются модельными.

Численное решение задач (6), (7) осуществлено методом конечных элементов (МКЭ), реализованным в виде программы на языке Фортран. Используются трехмерные изопараметрические элементы с трilinearными функциями формы, называемые элементами Brick [12]. В цель данной статьи не входит детальное описание всех аспектов численной реализации решения, но на тех, которые представляют интерес, следует остановиться.

Решение линейных краевых задач с помощью МКЭ в настоящее время является рутинной процедурой, однако ряд причин, присущих конкретной задаче, может изменить это положение. Так в задачах (6), (7) усложняющими факторами служат малая толщина пластины и наличие периодических условий. Для того чтобы малое значение толщины не приводило к неверным с точки зрения механики результатам — локингу (locking) [13], элементы выбираются с соотношением сторон порядка единицы. Учитывая сложную форму гофрированной пластины, это требование не кажется чрезмерным, а соответствует стремлению обеспечить необходимую точность вычисления всех жесткостей. Число узлов сетки в поперечном направлении колеблется от 2 до 5, вдоль сторон ячейки периодичности — от 30 до 100, что приводит к линейным системам от 14 до 90 тысяч уравнений. Решение системы осуществляется прямым решателем и вполне доступно для компьютера средней мощности. Например, решение всех шести задач (6), (7) занимает 12 минут в случае самой большой сетки на ноутбуке с частотой процессора 1,8 ГГц.

Можно отметить, что решение линейных систем прямым методом весьма эффективно в данном случае вследствие малости числа узлов в поперечном направлении, что приводит к матрице системы с не слишком широкой лентой.

Задачам (6), (7) соответствуют вариационные уравнения:

$$\begin{aligned} \int_{V_\xi^{\text{cell}}} C_{ijkl} N_{kPQ,l}^e M_{i,j}^{pr} dV_\xi + \int_{\Sigma_2^{\text{cell}}} C_{ijPQ} n_j M_i^{pr} d\Sigma_\xi = 0, \\ \int_{V_\xi^{\text{cell}}} C_{ijkl} N_{kPQ,l}^b M_{i,j}^{pr} dV_\xi - \int_{\Sigma_2^{\text{cell}}} \xi_3 C_{ijPQ} n_j M_i^{pr} d\Sigma_\xi = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь  $N_{iPQ}^e$ ,  $N_{iPQ}^b$  представляют собой решения, а  $M_i^{pr}$  пробные функции. И те, и другие принадлежат пространству функций  $G$ , являющемуся подпространством  $W_2^1$ , в котором функции удовлетворяют условиям периодичности:  $G = \left\{ f : f \in W_2^1, f \Big|_{\xi_\alpha=l_\alpha/2} = f \Big|_{\xi_\alpha=-l_\alpha/2} \right\}$  ( $\alpha=1,2$ ). При выводе (14) учтены граничные условия (6) и условия периодичности (7). Далее уравнения (14) употребляются стандартным образом [12] в сочетании с методом Галеркина, в котором пространство  $G$  аппроксимируется конечномерным подпространством  $G^N$  кусочно-полиномиальных функций, обладающих периодичностью. Глобальные базисные функции  $\psi_i$ , использованные в данной работе, строятся с помощью изопараметрического отображения из трилинейных локальных функций формы стандартного кубического элемента и обладают свойством периодичности. Последнее означает, что если узел  $i$  находится на боковой границе  $\xi_\alpha = -l_\alpha/2$ , то  $\psi_i \Big|_{\xi_\alpha=l_\alpha/2} = \psi_i \Big|_{\xi_\alpha=-l_\alpha/2}$  ( $\alpha=1,2$ ).

В случае ячеек периодичности, обладающих двумя перпендикулярными друг другу плоскостями симметрии, решение локальных задач (6), (7) упрощается. Ячейки именно такой формы используются далее для всех трех типов исследуемых пластин. Итак, рассматривается случай, когда плоскости  $\xi_1\xi_3$  и  $\xi_2\xi_3$  являются плоскостями симметрии формы (и упругих свойств, в общем случае). Тогда условия симметрии и периодичности сводятся к краевым условиям на боковой границе. В случае  $P, Q=1, 1$  или  $P, Q=2, 2$  на боковой границе выполняются условия равенства нулю нормального перемещения и касательных напряжений. В случае  $P, Q=1, 2$ , наоборот, равняются нулю касательные перемещения и нормальное напряжение. Например, при  $P=Q$  условия периодичности (7) заменяются условиями

$$\begin{aligned} N_{\alpha PP}^e \Big|_{\xi_\alpha=l_\alpha/2} = N_{\alpha PP}^e \Big|_{\xi_\alpha=-l_\alpha/2} = 0, \quad C_{ijkl} N_{kPP,l}^e n_j \Big|_{\xi_\alpha=l_\alpha/2} = C_{ijkl} N_{kPP,l}^e n_j \Big|_{\xi_\alpha=-l_\alpha/2} = 0, \\ N_{\alpha PP}^b \Big|_{\xi_\alpha=l_\alpha/2} = N_{\alpha PP}^b \Big|_{\xi_\alpha=-l_\alpha/2} = 0, \quad C_{ijkl} N_{kPP,l}^b n_j \Big|_{\xi_\alpha=l_\alpha/2} = C_{ijkl} N_{kPP,l}^b n_j \Big|_{\xi_\alpha=-l_\alpha/2} = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$(i=1,2,3, i \neq \alpha),$

(по  $P$  суммирование не производится).

Другим упрощением решения задач (6), (7) может быть замена искомым функций на новые неизвестные функции вида:  $M_{iPQ}^e = N_{iPQ}^e + 1/2(\xi_P \delta_{iQ} + \xi_Q \delta_{iP})$ ,  $M_{3PQ}^e = N_{3PQ}^e$  и  $M_{iPQ}^b = N_{iPQ}^b - \xi_3/2(\xi_P \delta_{iQ} + \xi_Q \delta_{iP})$ ,  $M_{3PQ}^b = N_{3PQ}^b + 1/2 \xi_P \xi_Q$ . Вместо (6) функции  $M_{kPQ}^e$ ,  $M_{kPQ}^b$  теперь удовлетворяют однородным уравнениям равновесия, а также модифицированным условиям периодичности:

$$\begin{aligned}
 & \left[ M_{IPQ}^e - (1/2)(\xi_P \delta_{IQ} + \xi_Q \delta_{IP}) \right] \Big|_{\xi_\alpha = l_\alpha^\xi / 2} = \left[ M_{IPQ}^e - (1/2)(\xi_P \delta_{IQ} + \xi_Q \delta_{IP}) \right] \Big|_{\xi_\alpha = -l_\alpha^\xi / 2}, \\
 & M_{3PQ}^e \Big|_{\xi_\alpha = l_\alpha^\xi / 2} = M_{3PQ}^e \Big|_{\xi_\alpha = -l_\alpha^\xi / 2}, \\
 & \left[ M_{IPQ}^b + (\xi_3 / 2)(\xi_P \delta_{IQ} + \xi_Q \delta_{IP}) \right] \Big|_{\xi_\alpha = l_\alpha^\xi / 2} = \left[ M_{IPQ}^b + \xi_3 / 2(\xi_P \delta_{IQ} + \xi_Q \delta_{IP}) \right] \Big|_{\xi_\alpha = -l_\alpha^\xi / 2}, \\
 & \left[ M_{3PQ}^b - (1/2)\xi_P \xi_Q \right] \Big|_{\xi_\alpha = l_\alpha^\xi / 2} = \left[ M_{3PQ}^b - (1/2)\xi_P \xi_Q \right] \Big|_{\xi_\alpha = -l_\alpha^\xi / 2}, \quad (\alpha = 1, 2).
 \end{aligned} \tag{16}$$

На свободной границе выполняется обычное условие отсутствия нагрузки:

$$\begin{aligned}
 & (C_{ijkl} M_{kPQ,l}^e)_{,j} = 0, \quad (C_{ijkl} M_{kPQ,l}^b)_{,j} = 0, \\
 & C_{ijkl} M_{kPQ,l}^e n_j = 0, \quad C_{ijkl} M_{kPQ,l}^b n_j = 0.
 \end{aligned} \tag{17}$$

В случае двоякосимметричной ячейки периодичности вместо (17) имеют место условия, аналогичные (15). При  $P = Q$  они выглядят так:

$$\begin{aligned}
 & \left[ M_{\alpha PP}^e - \xi_\alpha \right] \Big|_{\xi_\alpha = \pm l_\alpha^\xi / 2} = 0, \quad C_{ijkl} M_{kPP,l}^e n_j \Big|_{\xi_\alpha = l_\alpha^\xi / 2} = C_{ijkl} M_{kPP,l}^e n_j \Big|_{\xi_\alpha = -l_\alpha^\xi / 2} = 0, \\
 & \left[ M_{\alpha PP}^b + \xi_3 \xi_\alpha \right] \Big|_{\xi_\alpha = \pm l_\alpha^\xi / 2} = 0, \quad C_{ijkl} M_{kPP,l}^b n_j \Big|_{\xi_\alpha = l_\alpha^\xi / 2} = C_{ijkl} M_{kPP,l}^b n_j \Big|_{\xi_\alpha = -l_\alpha^\xi / 2} = 0, \\
 & i = 1, 2, 3, \quad i \neq \alpha, \quad \alpha = 1, 2.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Задача (17), (18) представляет собой обычную смешанную краевую задачу, стандартно решаемую МКЭ. Случай  $P \neq Q$  похож на рассмотренный.

Функции  $M_{kPQ}^e$  имеют ясный механический смысл: это есть флуктуации поля перемещений, возникающие в случае макрооднородной деформации растяжения–сдвига:  $v_I = \varepsilon_{IJ}^0 x_J, v_3 = 0$ . Тогда перемещения в пределах ячейки периодичности имеют вид:  $u_i = \varepsilon M_{iPQ}^e(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \varepsilon_{PQ}^0$ . Аналогично,  $M_{kPQ}^b$  есть флуктуации поля перемещений, возникающие в случае макрооднородного состояния изгиба и кручения, когда снова в пределах одной ячейки периодичности прогиб составляет  $w = (1/2) \kappa_{PQ} x_P x_Q$ , а перемещения равны  $u_i = \varepsilon M_{iPQ}^b(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \kappa_{PQ}^0$ .

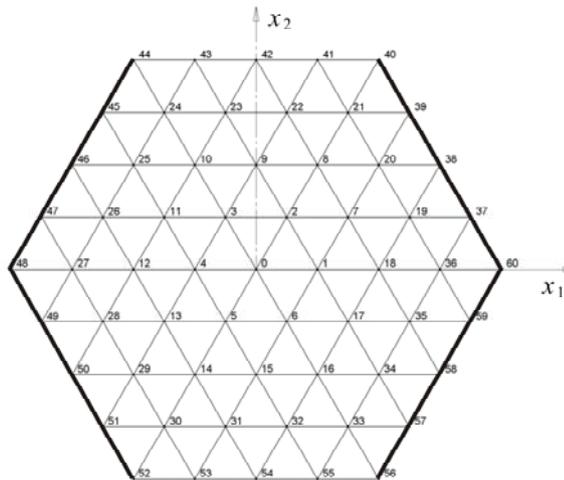


Рис. 3. Элементы грубого разбиения ячейки периодичности сотовой пластины (выделены ребра, выпуклые вниз)

Таблица 1. Координаты узлов элементов грубого разбиения ячейки периодичности сотовой пластины

Номер узла, $N$	$z_n$ , мм	Номер узла, $N$	$z_n$ , мм
0	1,000	21, 24, 30, 33	0,320
1, 2, 3, 4, 5, 6	0,940	22, 23, 31, 32	0,630
7, 11, 13, 17	0,740	27, 36	0,285
8, 10, 14, 16	0,745	37, 39, 45, 47, 49, 51, 57, 59	-0,170
9, 15	0,875	38, 46, 50, 58	-0,245
12, 18	0,700	40, 44, 48, 52, 56, 60	0
19, 26, 28, 35	0,310	41, 43, 53, 55	0,220
20, 25, 29, 34	0,300	42, 54	0,315

В разработанной программе вычисления жесткостей возможны два способа задания формы пластины. В первом способе значения координаты  $z$  узлов грубой сетки (Рис. 1, Рис. 3) вводятся в программу вместе с прочими данными, во втором — берутся из файла координат  $z$  узлов мелкой сетки. При втором способе форма пластины моделируется более точно. В качестве примера в Таблице 1 приводятся координаты  $z$  узлов элементов грубой сетки для сотовой пластины, показанной на рисунке 3.

Конечно-элементная сетка, на которой решаются локальные задачи, является более мелкой, чем сетка, используемая для пластины в целом. Например, для ячейки периодичности сотовой пластины вычисления проводятся на прямоугольной сетке, показанной на рисунке 2. При этом координаты узлов мелкой сетки (уже прямоугольной) получаются интерполяцией данных грубой сетки.

Поскольку для всех исследуемых пластин плоскости  $\xi_1\xi_3$  и  $\xi_2\xi_3$  являются плоскостями симметрии, уравнения (11) приобретают более простой вид:

$$\begin{aligned}
 N_{11} &= A_{1111}e_{11} + A_{1122}e_{22} + B_{1111}^{(1)}\kappa_{11} + B_{1122}^{(1)}\kappa_{22}, \\
 N_{22} &= A_{2211}e_{11} + A_{2222}e_{22} + B_{2211}^{(1)}\kappa_{11} + B_{2222}^{(1)}\kappa_{22}, \\
 M_{11} &= B_{1111}^{(2)}e_{11} + B_{1122}^{(2)}e_{22} + D_{1111}\kappa_{11} + D_{1122}\kappa_{22}, \\
 M_{22} &= B_{2211}^{(2)}e_{11} + B_{2222}^{(2)}e_{22} + D_{2211}\kappa_{11} + D_{2222}\kappa_{22}, \\
 N_{12} &= A_{1212}e_{12} + B_{1212}^{(1)}\kappa_{12}, \quad M_{12} = B_{1221}^{(2)}e_{12} + D_{1212}\kappa_{12},
 \end{aligned}$$

то есть уравнения для растяжения–изгиба (первые четыре выражения) можно решать независимо от уравнений сдвига–кручения (пятое и шестое выражения).

Для верификации авторской программы использовалась коммерческая конечно-элементная программа (ККЭП). Для сравнения в Таблице 2 приведены некоторые результаты вычислений жесткостей на одинаковых, состоящих из однотипных элементов типа  $B_{\text{rick}}$  сетках с количеством узлов  $60 \times 40 \times 5$ . Отношение толщины листа  $h$  к стороне ячейки периодичности  $l_1$  принято равным 0,0236. Из Таблицы 2 следует,

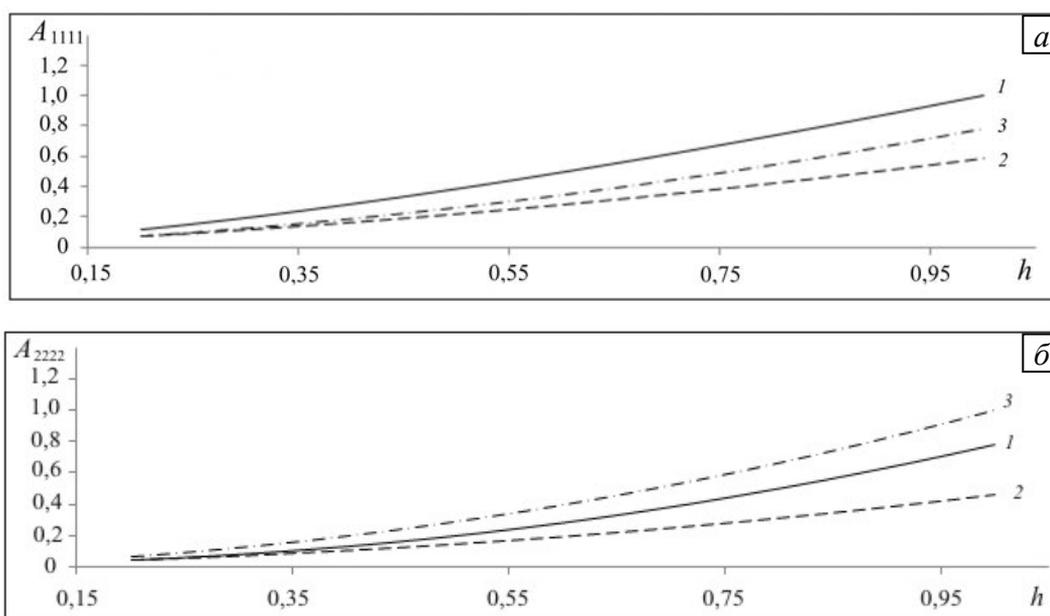
Таблица 2. Результаты вычислений авторов и с помощью ККЭП (для наглядности компоненты жесткостей записаны в формате матрицы)

	$A_{1111}$	$A_{1122}$	$B_{1111}^1$	$B_{1122}^1$
Авторская программа	$1,44 \cdot 10^{-2}$	$1,03 \cdot 10^{-3}$	$5,58 \cdot 10^{-5}$	$6,51 \cdot 10^{-5}$
ККЭП	$1,44 \cdot 10^{-2}$	$1,02 \cdot 10^{-3}$	$5,50 \cdot 10^{-5}$	$6,50 \cdot 10^{-5}$
	$A_{2211}$	$A_{2222}$	$B_{2211}^1$	$B_{2222}^1$
Авторская программа	$1,05 \cdot 10^{-3}$	$5,52 \cdot 10^{-3}$	$-1,80 \cdot 10^{-6}$	$2,79 \cdot 10^{-5}$
ККЭП	$1,02 \cdot 10^{-3}$	$5,60 \cdot 10^{-3}$	$-1,00 \cdot 10^{-6}$	$2,60 \cdot 10^{-5}$

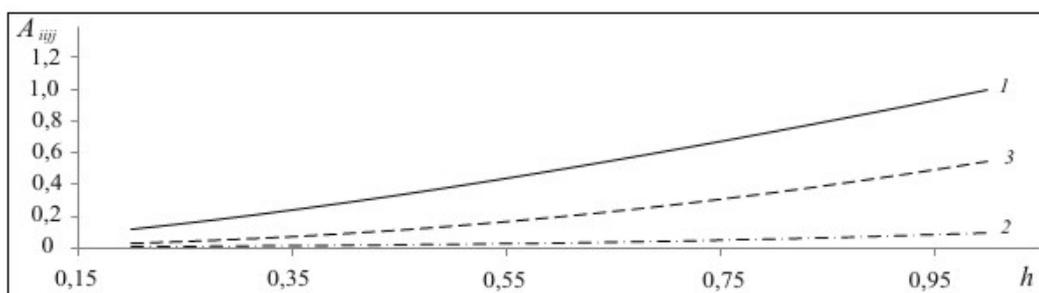
что значения жесткостей отличаются друг от друга почти на три порядка. Поэтому их вычисление с принятой в инженерных расчетах точностью 5% представляет сложную задачу и требует использования мелкой сетки. Хорошее совпадение жесткостей, найденных с помощью разных программ, говорит о достоверности результатов.

С использованием разработанной программы исследована зависимость жесткостей от параметров пластины: толщины листа  $h$ , высоты пластины  $f$  (см. Рис. 1) и выбора координаты отсчетной плоскости  $z_{ref}$ . На представленных графиках значения жесткостей  $\tilde{A}_{ijj}$ ,  $\tilde{B}_{ijj}$ ,  $\tilde{D}_{ijj}$  отнесены к соответствующей максимальной жесткости. Величины  $h$ ,  $f$  и  $z_{ref}$  также являются безразмерными (каждый параметр нормирован по своему максимальному значению). Знак тильды в дальнейшем опущен. Зависимости  $A_{1111}$ ,  $A_{2222}$ ,  $A_{1122}$  показаны на рисунках 4, 5.

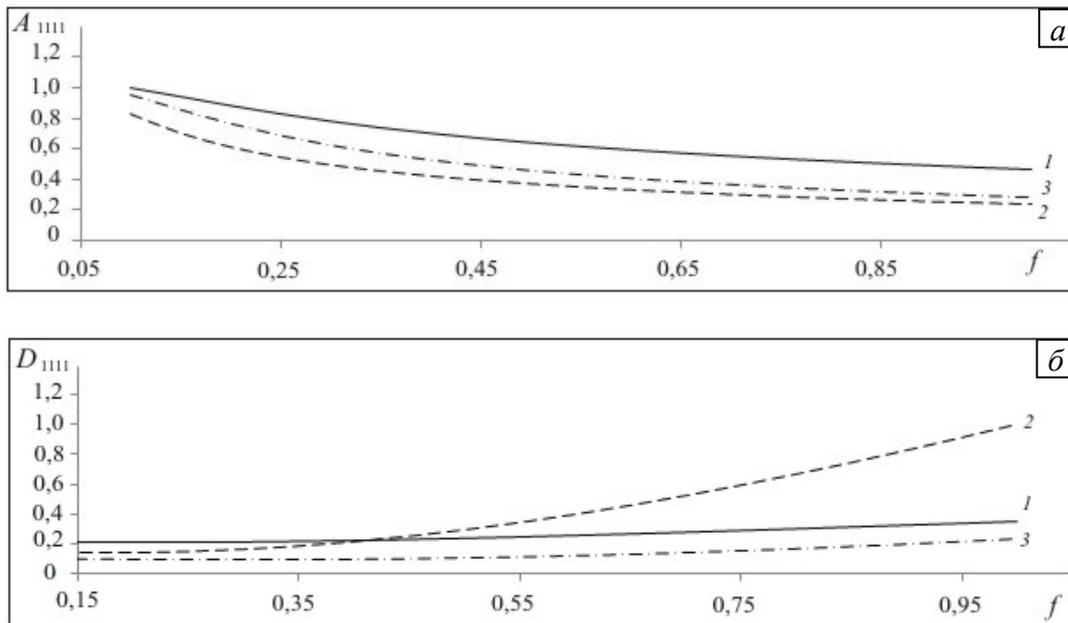
Наблюдается монотонная зависимость жесткостей от толщины пластины. При этом графики на рисунке 4 показывают, что никакая пластина не имеет по жесткости однозначного преимущества. Действительно, если наибольшее значение компоненты  $A_{1111}$  характерно для сотовой пластины, то наибольшее значение компоненты  $A_{2222}$  достигается у четырехугольной симметричной пластины. На рисунке 5 хорошо видно, что продольные жесткости  $A_{1111}$  и  $A_{2222}$  у сотовой пластины не равны вследствие имеющей место несимметрии ее формы.



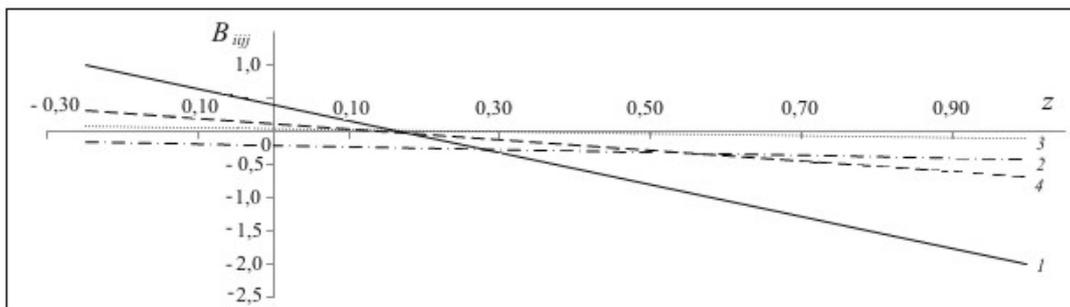
**Рис. 4.** Компоненты жесткости  $A_{1111}$  (а) и  $A_{2222}$  (б) для пластин различного типа: сотовая пластина (кривая 1), пластина со смещенной четырехугольной ячейкой (2), пластина с четырехугольной ячейкой (3)



**Рис. 5.** Зависимость жесткостей сотовой пластины от толщины листа:  $A_{1111}$  (кривая 1),  $A_{1122}$  (2),  $A_{2222}$  (3)



**Рис. 6.** Влияние толщины пластины на продольную  $A_{1111}$  (а) и изгибную  $D_{1111}$  (б) жесткости у пластин различного типа: сотовая пластина (кривая 1), пластина со смещенной четырехугольной ячейкой (2), пластина с четырехугольной ячейкой (3)



**Рис. 7.** Зависимость значения компонент  $B_{ijj}$  матрицы жесткости сотовой пластины от положения отсчетной плоскости:  $B_{1111}$  (кривая 1),  $B_{1122}$  (2),  $B_{2211}$  (3),  $B_{2222}$  (4)

Рисунок 6 содержит зависимости жесткостей пластин от высоты  $f$ . На графиках видно, что при малых  $f$  значение жесткости  $A_{1111}$  быстро убывает с ростом высоты, а при  $f$ , больших  $0,45 \div 0,5$ , падение жесткости замедляется и изменения могут оказаться несущественными. При тех же значениях  $f$  изгибная жесткость  $D_{1111}$  резко растет для пластины типа 2, поэтому за счет продольной жесткости можно получить существенный выигрыш в изгибной жесткости. Это подтверждает необходимость проведения детального анализа жесткостей каждой пластины.

Авторами также изучена зависимость жесткостей от координаты  $Z$ , указывающей местоположение плоскости отсчета  $z_{ref}$  относительно плана пластины. При  $z_{ref} = 0$  в отсчетной плоскости находятся узлы 40, 44, 48, 52, 56, 60 (см. Таблицу 1). Положение этой плоскости больше всего сказывается на жесткостях взаимного влияния. Значение  $z_{ref}$  варьировалось в экспериментах от  $-0,25$  до  $1$  мм. Из графиков, представленных на рисунке 7, видно, что существует такое положение отсчетной плоскости, когда все жесткости взаимного влияния  $B_{ijj}$  близки к нулю. В этом случае при расчете параметров деформирования уравнения растяжения и изгиба можно решать независимо.

Подводя итог проведенным исследованиям, следует отметить, что в силу существенной анизотропии каждая из пластин рассмотренных типов обладает

преимуществом по отдельным жесткостям, но не в целом. Таким образом, у любой конкретной пластины необходимо производить расчет всех жесткостей, так как достаточно сложно обнаружить какую-либо простую закономерность в их зависимости от параметров пластины.

Авторы благодарны профессорам Ф. Мирчу и А. Дуде из Технического университета Берлина за инициирование данной работы и предоставление данных.

## Литература

1. Шешенин С.В. Асимптотический анализ периодических в плане пластин // Изв. РАН, Механика твердого тела. – 2006. – № 6. – С. 71-79.
2. Kohn R.V., Vogelius M. A new model of thin plates with rapidly varying thickness // Int. J. Solids and Struct. – 1984. – V. 20, № 4. – P. 333-350.
3. Панасенко Г.П., Резцов М.В. Осреднение трехмерной задачи теории упругости в неоднородной пластине // Докл. АН СССР. – 1987. – Т. 294. – № 5. – С. 1061-1065.
4. Levinski T., Telega J.J. Plates, laminates and shells. Asymptotic analysis and homogenization. – Singapore; London: World Sci. Publ., 2000. – 739 p.
5. Муравлева Л.В., Шешенин С.В. Об осреднении тонкостенных тел // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2004. – № 4. – С. 129-138.
6. Шешенин С.В. Применение метода осреднения к пластинам, периодическим в плане // Вестник Московского университета. – 2006. – № 1. – С. 47-51.
7. Koprakov A.G. Homogenized models for thin-walled nonhomogeneous structures with initial stresses. – Springer Verlag: Berlin, Heidelberg, 2004. – 228 p.
8. Jones R.M. Mechanics of composite materials. – Philadelphia; L.: Taylor&Francis, 1998. – 519 p.
9. Шешенин С.В., Фу М., Ивлева Е.А. Об осреднении периодических в плане пластин // Теория и практика расчета зданий, сооружений и элементов конструкций. Аналитические и численные методы. Международная научно-практическая конференция. – М.: Изд-во МГСУ, 2008. – С. 148-158
10. Behrens A., Ellert J. FE-Analyse des witkmedienbasierten Wölbstrukturierungsprozesses von Feinblechen und seine Auswirkungen auf das Verhalten charakteristischer Leichtbauerstücke. Forschungsvorhaben BE – Universität der Bundeswehr Humburg, Institut fuer Konstruktions und Fertigungstechnik. – 2003. – V. 965, N. 8. – PP. 1-3.
11. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 336 с.
12. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The finite element method. V. 1. – Butterworth-Heinemann, 2000. – 712 p.
13. Braess D. Finite Elements. Theory, fast solvers and applications in solid mechanics. – Cambridge Univ. Press, 2007. – 308 p.

Поступила в редакцию 07.09.10

---

### Сведения об авторах

Шешенин Сергей Владимирович, дфмн, проф., Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (МГУ), 119899, Москва, Ленинские горы, 1, механико-математический факультет; E-mail: Sheshenin@mech.math.msu.ru

Ходос Ольга Александровна, асп., МГУ, механико-математический факультет; E-mail: Hodos-Olga@mail.ru